Vasil Jacoš

S-циклические орграфы

Mathematica Slovaca, Vol. 29 (1979), No. 3, 201--208

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/136211`

Mathematica Slovaca

VOLUME 29 1979 NUMBER 3

S-ЦИКЛИЧЕСКИЕ ОРГРАФЫ

ВАСИЛ ЯЦОШ

Введение

Пусть $V(G)$ и $E(G)$ обозначает соотвественно множество вершин и множество ребер, а $|V(G)|$ и $|E(G)|$ количество вершин и количество ребер конечного ориентированного графа G. Путь, содержащий вершины $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ и ребра (v_i, v_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, n-1$ обозначим $v_1 \to v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_n$, а орцикл, который возникнет из этого пути добавлением дуги (v_n, v_1), обозначим Z_n, орцикл $v_1 \to v_n \to v_{n-1} \to \ldots \to v_1$ обозначим Z'_n. Граф, который возникнет из пути $v_1 \to v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_n$ добавлением дуги (v_1, v_n), обозначим Y_n.

Граф (орграф) G назовем гамильтоновым, если он содержит цикл (орцикл) длины $|V(G)|$, панциклическим, если он содержит циклы (орциклы) всех длин k, $3 \leqq k \leqq |V(G)|$ и j-панциклическим, если он содержит циклы (орциклы) всех длин k, $3 \leqq k \leqq |V(G)|$, за исключением длины $k = j$, где j — любое число множества $\{3, 4, 5, \ldots, |V(G)|\}$.

Панциклические графы были исследованы в работах [1], [2], [3] и [4], а j-панциклические в статьях [5], [6] и [7]. Далее приведем определение понятия S-циклического графа, которое является общим обобщением панциклического и j-панциклического графа. Систему всех подмножеств множества $M_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ обозначим через $\mathscr{P}(M_n)$ и пусть $S \in \mathscr{P}(M_n)$. Граф (орграф) G с n вершинами, который содержит цикл (орцикл) длины k тогда и только тогда, когда $k \in S$, назовем S-циклическим графом (орграфом) с n вершинами, или (n, S)-графом ((n, S)-орграфом). Из приведенных определений следует, что панциклические и j-панциклические графы являются специальными случаями (n, S)-графов.

Степень $d(x, G)$ верчины x орграфа G определяется как число

$$d(x, G) = d^+(x, G) + d^-(x, G),$$

где $d^+(x, G)$ — количество всех дуг, входящих в вершину x, и
$d^-(x, G)$ — количество всех дуг, выходящих из вершины x.

Число

$$\delta(G)=\min_{x\in V(G)} d(x,G) \quad (\Delta G=\max_{x\in V(G)} d(x,G))$$

назовем минимальной (максимальной) степенью орграфа G.

В этой работе доказано существование плоского (n, S)-орграфа для каждой пары (n,S), где n – натуральное число и $S\subseteq M_n$, что обобщает результат, полученный в работе [6]. Далее для каждого $n\geq 4$ находятся множества $S\in\mathcal{P}(M_n)$, для которых существуют (n,S)-орграфы G с $\delta(G)\geq 3$ как и несколько множеств $S\in\mathcal{P}(M_n)$ таких, что не существует (n, S)-орграф G с $\delta(G)\geq 3$.

Плоские (n, S)-орграфы и (n, S)-орграфы с $\delta(G)\geq 3$

Теорема 1. *Пусть n — натуральное число и $S\subseteq M_n$. Тогда существует плоский (n, S)-орграф.*

Доказательство. Для $n=1, 2$ (см. рис. 1) и для остальных n теорема доказывается описанием конструкции, причем нужно иметь ввиду два случая:

1. Пусть $n\in S$. Построим орцикл Z_n. Если $j\in S$ и $j\neq n$, тогда соединим в Z_n дугой вершину v_j с v_1. Легко заметить, что полученный орграф не содержит других орциклов, кроме орциклов длины $j\in S$.
2. Пусть $n\notin S$. Построим Y_n. Если $j\in S$, тогда в Y_n соединим дугой вершину v_j с v_1. Существование орциклов требуемой длины очевидно.

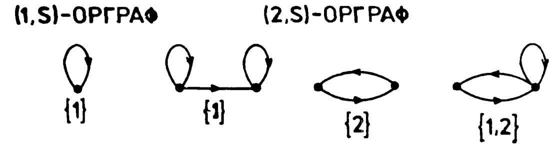

Рис. 1

Замечание. Пусть $n\geq 2$ и $S\subseteq M_n$. Если $1\in S$, тогда тривиально существует (n, S)-орграф с $\delta(G)\geq 3$.

Теорема 2. *Пусть $n\geq 4$ и $S\subseteq M_n$. Пусть выполнено по крайней мере одно из следующих условий:*

(1) $n\notin S$.

(2) $n\in S\nsubseteq\left\{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+2,\ \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+3,\ \ldots,\ n\right\}$.

(3) $S=\left\{\left[\frac{n}{2}\right]+k+1,\ \left[\frac{n}{2}\right]+k+2,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{2}\right]+\right.$
$\left.+2k+1, n-k, n-k+1, \ldots, n-1, n\right\}$
или
$S=\left\{2,\ \left[\frac{n}{2}\right]+k+1,\ \left[\frac{n}{2}\right]+k+2,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{2}\right]+\right.$
$\left.+k+1, n-k, n-k+1, \ldots, n-1, n\right\}$
для $n \geqslant 6k+5,\ k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

(4) $S=\left\{\left[\frac{n}{2}\right]+k,\ \left[\frac{n}{2}\right]+k+i,\ \left[\frac{n}{2}\right]+k+2i, \ldots, n-i, n\right\}$
или
$S=\left\{2,\ \left[\frac{n}{2}\right]+k,\ \left[\frac{n}{2}\right]+k+i,\ \left[\frac{n}{2}\right]+k+2i, \ldots, n-i, n\right\}$
для
(а) $k \in \left\{1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{n-1}{4}\right]\right\},\quad i=1,$
(б) $n=2k(i+1)$, где i и k *натуральные числа.*

Тогда существует (n, S)*-орграф с* $\delta(G)\geqslant 3$.

Доказательство. В силу замечания мы можем предполагать, что $1 \notin S$. Пусть выполнено (1); т. е. $n \notin S$. Построим Y_n и соединим дугами вершины v_j с v_1, если $j \in S$, v_j с v_n, если $j \notin S \cup \{1, 2, n-1, n\}$, а также вершину v_1 с v_{n-1}, если $n-1 \notin S$, и наконец, вершину v_2 с v_n. Таким образом возникнет орграф s n вершинами, который содержит только орциклы всех длин k, $k \in S$. Дуга (v_1, v_{n-1}), а также дуги, инцидентные с вершиной v_n, не способствуют возникновение никакого орцикла по причине их ориентации. Остальные добавленные дуги обеспечивают существование только орциклов требуемой длины, потому что они соединяют у ориентированного пути $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_n$ только вершины v_j с v_1 и никакие другие.

Пусть выполнено (2), т. е.

$$n \in S \not\subseteq \left\{\left[\frac{n}{2}\right]+2,\ \left[\frac{n}{2}\right]+3,\ \ldots,\ n\right\}.$$

Тогда

(i) Если $S=M_n$, то построим орцикл Z_n и для любого $j \in S$ соединим дугой вершину v_j с v_1, наконец, соединим дугой вершину v_2 с v_n. Существование орциклов требуемой длины очевидно.

(ii) Если $S \neq M_n$ построим орцикл Z_n' и для каждого $j \in S-\{n\}$ соединим дугой вершину v_1 с v_j и наконец соединим дугой вершину v_i с $v_{i+j'-1}$, где $j'=\min S$, а $i=2, 3, \ldots, n-j'+1$. Это можно всегда сделать, потому что

$$\min S < \left[\frac{n}{2}\right]+2.$$

В случае такого добавления дуг возникнет орцикл только требуемой длины и никакой другой. Запрещает этому ориентация дуги (v_1, v_n). Существование орциклов длины j очевидно.

Пусть выполнено (3). т. е.

$$S=\left\{\left[\frac{n}{2}\right]+k+1,\ \left[\frac{n}{2}\right]+k+2,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{2}\right]+2k+1,\ n-k,\ n-k+1,\ \ldots,\ n-1, n\right\}.$$

Построим орцикл длины Z_n и соединим дугами: вершины v_j с v_{j+2} и v_{j+1} с v_{j+3} для $j=1,\ 5,\ 9,\ \ldots,\ 4k-3$, где $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, также в случае $n\equiv 1 \pmod 2$ вершину v_p,

$$p=\left[\frac{n}{2}\right]+2k+1,$$

с вершиной v_1, а вершину v_l с $v_{l+1+n-p}$, где $l=4k+1,\ 4k+2,\ \ldots,\ p-1$ (см. рис. 2), в случае $n\equiv 0 \pmod 2$ вершину v_p,

$$p=\left[\frac{n}{2}\right]+2k,$$

с вершиной v_n и вершину v_l с v_{l+n-p}, где $l=4k+1, 4k+2, \ldots, p-1$ (см. рис. 3).

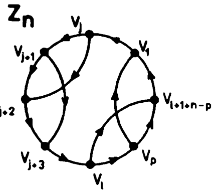

Рис. 2

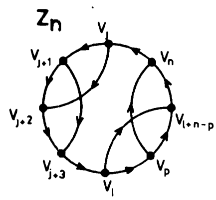

Рис. 3

Таким образом получим (n, S)-орграф, в котором существование орциклов опеределенной длины легко проверить. Существование орцикла длины

$$\left[\frac{n}{2}\right]+k+1,\ \left[\frac{n}{2}\right]+k+2,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{2}\right]+2k+1$$

проверим, если используем дуги (v_p, v_1) или (v_p, v_n).

Конструкцию (n, S)-орграфов в случае, когда

$$S=\left\{2,\ \left[\frac{n}{2}\right]+k+1,\ \left[\frac{n}{2}\right]+k+2,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{2}\right]+2k+1,\ n-k,\ \ldots,\ n\right\}$$

проведем как на рис. 2, 3 и, кроме того, еще соединим дугой вершину v_2 с v_1.

Пусть выполнено (4), т. е.

$$S=\left\{\left[\frac{n}{2}\right]+k,\ \left[\frac{n}{2}\right]+k+1+i,\ \left[\frac{n}{2}\right]+k+2i,\ \ldots,\ n\right\}$$

Для $k=1$ в случае (4) описание конструкции вытекает из (2), а для остальных k в случае (4) (a) описание конструкции рассматривается в зависимости от сравнения n по модулю 4. Построим орцикл Z_n, а потом соединим дугами:

(a) для $i=1$, если

(i) $n \equiv 0 \pmod 4$ и $k=2, 3, \ldots, n/4-1$ вершины v_j с v_{j+2} и v_{j+1} с v_{j+3}, где $j=1$, 5, 9, …, $n-3$, далее соединим вершину v_j с v_{j+3}, где $j=1$, 5, 9, 13, …, $n-11-4(k-2)$, как это приведено на рис 4.

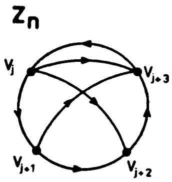

Рис. 4

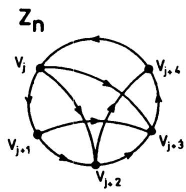

Рис. 5

(ii) $n \equiv 1 \pmod 4$ и

$$k=\left[\frac{n}{4}\right],$$

вершины v_j с v_{j+2} и v_{j+1} с v_{j+3}, где $j=1, 5, 9, \ldots, n-4$, и вершины v_{j+2} с v_{j+4} в случае, когда

$$j=n-4, \text{ и } k=2, 3, 4, \ldots, \left[\frac{n}{4}\right]-1,$$

потом кроме соединенных вершин соединим еще вершину v_j с v_{j+3}, где $j=1, 5, 9, 13, \ldots, n-12-4(k-2)$ (см. рис. 5).

(iii) $n \equiv 2 \pmod 4$ и

$$k=\frac{n-2}{4}$$

вершины v_j с v_{j+2} и v_{j+1} с v_{j+3}, где $j=1, 5, 9, 13, \ldots, n-5$, вершины v_{j+2} с v_{j+4} и v_{j+3} с v_{j+5} в случае $j=n-5$, а если

$$k=2, 3, 4, \ldots, \frac{n-2}{4}-1,$$

то, кроме соединенных вершин, соединим еще вершины v_j с v_{j+3}, где $j=1, 5, 9, \ldots, n-13-4(k-2)$ (см. рис. 6).

(iv) $n \equiv 3 \pmod 4$ и

$$k=\left[\frac{n-2}{4}\right],$$

соединим вершины v_j с v_{j+2} и v_{j+1} с v_{j+3}, где $j=1, 5, 9, \ldots, n-6$, а также вершины v_{j+2} с v_{j+4}, v_{j+3} с v_{j+5} а v_{j+4} с v_{j+6} в случае, если $j=n-6$, а если

$$k=2, 3, 4, \ldots, \left[\frac{n-2}{4}\right]-1,$$

то, кроме соединенных вершин, соединим еще вершину v_j с v_{j+3}, где $j=1, 5, 9$, $n-14-4(k-2)$ (см. рис. 7).

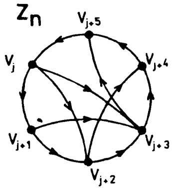

Рис. 6

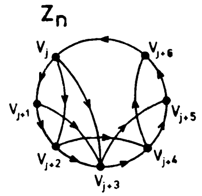

Рис. 7

(б) для $n=2k(i+1)$, где $k \geqslant 2$ и $i=1, 2, 3, \ldots$, (когда $k=1$, то описание конструкции, как в (2)) вершины v_j с v_{j+i+1} и v_{j+i} с v_{j+2i+1}, где $j=1, 2i+3, 4i+5, 6i+7, \ldots, n-2i+1$, и, наконец, вершину v_p с v_l, где $j<p<j+i$, $j+i+1<l<j+2i+1$ соответственно (см. рис. 8). Таким образом получим (n, S)-орграфы с $\delta(G) \geqslant 3$.

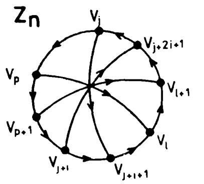

Рис. 8

В каждом из приведенных орграфов орциклы определенной длины можно проверить. Напр.: орцикл длины

$$\left[\frac{n}{2}\right]+k+i \quad (k=2),$$

где $n \geqslant 8$, $i=1, 2, \ldots$ и $j=1$ будет $v_j \to v_{j+i+2} \to v_{j+i+3} \to \ldots \to v_{j+n-2} \to v_{j+n-1} \to v_j$.

Конструкцию (n, S)-орграфов для $S \in \{(5, 6, 7), (2, 5, 6, 7)\}$ (см. рис. 9*a* и 9*b*), а конструкцию (n, S)-орграфов для

$$S=\left\{2, \left[\frac{n}{2}\right]+k, \left[\frac{n}{2}\right]+k+i, \left[\frac{n}{2}\right]+k+2i, \ldots, n\right\}$$

проведем как в случае (а) и (б), где $2 \notin S$, и кроме того, соединим дугой еще верьину v_2 с v_1.

Теорема 3. *Если* $S = \{n\}$, $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ *или* $S = \{n-k, n\}$, *где* $n \geqslant 2k+3$, *то не существует* (n, S)*-орграф с* $\delta(G) \geqslant 3$.

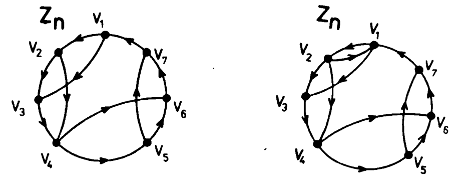

Рис. 9

Доказательство. При доказательстве теоремы поступаем от противного:

1) Пусть $S = \{n\}$. Предположим, что такой (n, S)-орграф G существует. Очевидно, что G содержит хотя бы один орцикл Z_n и не содержит вершину x с $d(x, G) < 3$. Тогда очевидно, что в вершину v_1 должна входить дуга или выходить из нее, кроме дуг (v_n, v_1) и (v_1, v_2). Пусть дуга входит в вершину v_1 из любой вершины v_k, тогда возникнет орцикл длинны $k \neq n$, что противоречит предположению. Если дуга выходит из вершины v_1 и входит в любую вершину v_k, тогда возникнет орцикл длины $n-k+2 \neq n$, что опять противоречит предположению.

2) Пусть $S = \{n-k, n\}$. Предположим, что такой орграф G существует. Очевидно, что, как и в предыдущем случае, G содержит один орцикл Z_n и не содержит вершину x с $d(x, G) < 3$. Не нарушая общности далее предположим, что из вершины v_1 дуга выходит и что в вершину v_n дуга входит (см. рис. 10). Дуга, выходящая из вершины v_1, должна входить в вершину

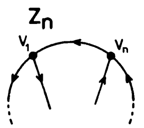

Рис. 10

v_{k+2}, потому что иначе бы возник орцикл длины $\neq n, n-k$. Дуга, входящая в вершину v_n, должна выходить из вершины v_{n-k-1}, потому что иначе опять бы возник орцикл длины $\neq n, n-k$. Поскольку $2k+3 \leqslant n$, то $k+2 \leqslant n-k-1$, то $v_1 \to v_{k+2} \to \ldots \to v_{n-k-1} \to v_n \to v_1$ будет орцикл длины $(n-k-1) - (k+2) + 3 = n-2k \neq n, n-k$, что противоречит предположению.

ЛИТЕРАТУРА

[1] BONDY, J. A.: Pancyclic graphs I, J. Combinatorial Theory 11, 1971, 80—84.
[2] BONDY, J. A.: Pancyclic graphs II, J. Combinatorial Theory 20, 1976, 41—46.
[3] HÄGGKVIST, R., THOMASSEN, C.: On pancyclic digraphs, J. Combinatorial Theory 20, 1976, 20—40.
[4] HOBBS, A. M.: The square of block is vertex pancyclic, J. Combinatorial Theory 20, 1976, 1—4.
[5] JACOŠ, V., JENDROĽ, S.: A problem concerning j-pancyclic graphs, Mat. Čas. 24, 1974, 259—262.
[6] JACOŠ, V.: On j-pancyclic graphs, Mat. Čas. 25, 1975, 281—256.
[7] MALKEVITCH, J.: On the lengths of cycles in planar graphs. Lecture Notes in Mathematics, Recent Trends in Graph Theory, Berlin—Heidelberg—New York 186, 1971, 191—195.

Поступило 21. 9. 1976

Katedra matematickej informatiky
Elektrotechnická fakulta VŠT
Zbrojnícka 3
040 00 Košice