Ladislav Mišík

Sätze des Khintchine Typus für Mengenfunktionen

Mathematica Slovaca, Vol. 27 (1977), No. 2, 155--171

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/136140`

Math. Slovaca, 27, 1977, No. 2, 155—171

SÄTZE DES KHINTCHINE TYPUS FÜR MENGENFUNKTIONEN

LADISLAV MIŠÍK

A. Khintchine hat in [1] bewiesen, daß folgendes Lemma gilt: *Wenn eine monotone Funktion f in einem Punkt x die approximative Ableitung $f'_{ap}(x)$ besitzt, dann hat sie auch die Ableitung $f'(x)$ und $f'(x)=f'_{ap}(x)$.* In [2] und [3] sind gewisse Verallgemeinerungen des Lemmas von Khintchine gegeben. In [4] und [5] sind folgende Verschärfungen des Lemmas von Khintchine bewiesen: *Die Menge aller approximativen derivierten Zahlen einer monotonen Funktion* ([5]), *bzw. einer Lipschitzfunktion* ([4]) *ist gleich der Menge aller derivierten Zahlen.*

In dieser Arbeit sind ähnliche Sätze für Mengenfunktionen und speziell für Funktionen vom Intervall bewiesen.

1. Es sei $\mathscr{B}$ ein System von Teilmengen der Menge X und m eine positive monotone auf $\mathscr{B}$ definierte Funktion, d.h. $m(A)>0$ für jedes $A\in\mathscr{B}$ und $m(A)\leqq m(B)$, wenn $A, B\in\mathscr{B}$ und $A\subset B$ gilt.

Für jede Menge $A\in\mathscr{B}$ bedeutet $\mathscr{B}(A)$ die Menge $\{B\in\mathscr{B}: B\subset A\}$.

Es sei $A_n\in\mathscr{B}$ für $n=1, 2, 3, \ldots$ und $x\in X$. *Dann konvergiert die Folge* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *zu dem Punkt x, im Zeichen* $A_n\to x$, *wenn* $x\in A_n$ *für* $n=1, 2, 3, \ldots$ *und* $\lim_{n\to\infty} m(A_n)=0$ *gilt.* $A_n\not\to x$ bedeutet, daß $A_n\to x$ nicht gilt.

Es sei $\sigma: \mathscr{B}\to\langle-\infty,\infty\rangle$ eine Funktion, $C\subset\langle-\infty,\infty\rangle$ und $A\in\mathscr{B}$. Dann wird $P(C; A)$ die Menge $\left\{\gamma\in(0,\infty)\right.$: *es existiert ein solches* $B\in\mathscr{B}(A)$, *daß* $m(B)=\gamma$ *und* $\left.\frac{\sigma(B)}{m(B)}\in C \text{ ist}\right\}$ bedeuten. Die Menge $P((\alpha,\infty\rangle; A)$, bzw. $P(\langle-\infty,\alpha); A)$ werden wir kurz $P_\alpha(A)$, bzw. $P^\alpha(A)$ bezeichnen.

Das äußere Lebesguemaß der Menge A im euklidischen Raum E_l werden wir als $|A|$ bezeichnen. Das Intervall $\langle-\infty,\infty\rangle$ werden wir mit der üblichen Topologie von zweipunktiger Kompaktifikation nehmen. Die abgeschlossene Hülle der Menge Y werden wir mit $\bar{Y}$ bezeichnen.

Definitionen. *Es sei* $\sigma: \mathscr{B}\to\langle-\infty,\infty\rangle$, $x\in X$. *Dann definieren wir:*

$$\bar{\mathrm{D}}\sigma(x)=\inf\left\{\beta: \text{ für jede Folge } \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ gilt: } \left(A_n\in\left\{A\in\mathscr{B}: x\in A, \frac{\sigma(A)}{m(A)}>\beta\right\}\right.\right.$$
$$\left.\left.\text{für } n=1, 2, 3, \ldots\right)\Rightarrow(A_n\not\to x)\right\};$$

$\bar{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)=\inf\Big\{\beta$: *für jede Folge* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *gilt: entweder* $\Big(\Big(A_n\in\Big\{A\in\mathscr{B}: x\in A,$

$\dfrac{\sigma(A)}{m(A)}>\beta\Big\}$ *für* $n=1,2,3,\ldots\Big)\Rightarrow(A_n\not\to x)$ *oder* $\Big((A_n\to x)$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|P_\beta(A_n)|}{m(A_n)}=0\Big\}$;

$\underline{\mathrm{D}}\,\sigma(x)=-\bar{\mathrm{D}}(-\sigma)(x)$;

$\underline{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)=-\bar{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap}}(-\sigma)(x)$;

$\mathscr{D}^*\sigma(x)=\Big\{\alpha\in\langle-\infty,\infty\rangle$: *für jede Umgebung* $U(\alpha)$ *des Punktes* α *existiert eine solche Folge* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, *daß* $A_n\in\Big\{A\in\mathscr{B}: \dfrac{\sigma(A)}{m(A)}\in U(\alpha)\Big\}$ *für* $n=1, 2, 3, \ldots$ *und* $A_n\to x$ *ist*$\Big\}$;

$\mathscr{D}\sigma(x)=\Big\{\alpha\in\langle-\infty,\infty\rangle$: *es existiert eine solche Folge* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, *daß* $A_n\in\mathscr{B}$ *für* $n=1,2,3,\ldots$, $A_n\to x$, $\dfrac{\sigma(A_n)}{m(A_n)}\to\alpha$ *gilt*$\Big\}$;

$\overset{*}{\mathscr{D}}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)=\Big\{\alpha\in\langle-\infty,\infty\rangle$: *für jede Umgebung* $U(\alpha)$ *des Punktes* α *existiert eine solche Folge* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, *daß* $A_n\in\Big\{A\in\mathscr{B}: \dfrac{\sigma(A)}{m(A)}\in U(\alpha)\Big\}$ *für* $n=1, 2, 3, \ldots$, $A_n\to x$ *und* $\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{|P(U(\alpha); A_n)|}{m(A_n)}>0$ *ist*$\Big\}$;

$\mathscr{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)=\Big\{\alpha\in\langle-\infty,\infty\rangle$: *es existiert eine solche Folge* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, *daß* $A_n\in\mathscr{B}$ *für* $n=1, 2, 3, \ldots$, $\dfrac{\sigma(A_n)}{m(A_n)}\to\alpha$, $A_n\to x$ *und* $\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{|P(U(\alpha); A_n)|}{m(A_n)}>0$ *für jede Umgebung* $U(\alpha)$ *des Punktes* α *gilt*$\Big\}$.

Lemma 1. *Es gilt:*

(a) $\mathscr{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)\subset\mathscr{D}\sigma(x)\cap\mathscr{D}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(x)\subset\mathscr{D}\sigma(x)\cup\mathscr{D}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(x)\subset\mathscr{D}^*\sigma(x)=\overline{\mathscr{D}\sigma(x)}$;

(b) $\mathscr{D}^*\sigma(x)=\overline{\mathscr{D}^*\sigma(x)}$ und $\overline{\mathscr{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)}\subset\mathscr{D}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(x)=\overline{\mathscr{D}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(x)}$;

(c) $\bar{\mathrm{D}}\,\sigma(x)=\sup\,\mathscr{D}^*\sigma(x)=\sup\,\mathscr{D}\sigma(x)$, $\underline{\mathrm{D}}\,\sigma(x)=\inf\,\mathscr{D}^*\sigma(x)=\inf\,\mathscr{D}\sigma(x)$;

(d) $\underline{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)=\inf\,\mathscr{D}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(x)\leqq\inf\,\mathscr{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$, $\sup\,\mathscr{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)\leqq\sup\,\mathscr{D}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(x)=$ $=\bar{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$;

(e) $\underline{\mathrm{D}}\,\sigma(x)\leqq\underline{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$ und $\bar{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)\leqq\bar{\mathrm{D}}\,\sigma(x)$.

Beweis. Die Behauptungen (a), (b), (c) und (e) sind aus den Definitionen leicht beweisbar.

(d) Die Ungleichung $\inf\,\mathscr{D}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(x)\leqq\inf\,\mathscr{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$ ist klar.

Es sei $\alpha\in\mathscr{D}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$. Dann muß für jedes β, für welches $\alpha<\beta$ gilt, eine solche Folge $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ existieren, daß $\dfrac{\sigma(A_n)}{m(A_n)}<\beta$ für $n=1, 2, 3, \ldots$, $A_n\to x$

und $\limsup_{n\to\infty} \frac{|P^{\beta}(A_n)|}{m(A_n)} > 0$ gilt. Daraus folgt, daß $\bar{D}_{ap}\ \sigma(x) \leqq \beta$ gilt. Es muß also $\underline{D}_{ap}\ \sigma(x) \leqq \alpha$ für jedes $\alpha \in \mathscr{D}^*_{ap}\sigma(x)$ gelten. So bekommen wir, daß $\underline{D}_{ap}\ \sigma(x) \leqq \leqq \inf\ \mathscr{D}^*_{ap}\ \sigma(x)$. ist.

Wenn $\underline{D}_{ap}\ \sigma(x) = \infty$ ist, dann gilt $\underline{D}_{ap}\ \sigma(x) = \inf\ \mathscr{D}^*_{ap}\ \sigma(x)$.

Es sei $\alpha = \underline{D}_{ap}\sigma(x) < \infty$ und es sei $U(\alpha)$ ein Intervall, welches eine Umgebung von α ist. Es sei $\delta = \inf\ U(\alpha)$ und $\gamma = \sup\ U(\alpha)$. Dann existiert eine solche Folge $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ und eine positive Zahl ε, daß $A_n \to x$, $A_n \in \left\{A \in \mathscr{B}\colon x \in A, \frac{\sigma(A)}{m(A)} < \gamma\right\}$ und $\frac{|P^{\gamma}(A_n)|}{m(A_n)} > \varepsilon$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt.

Wenn $\alpha = -\infty$ ist, dann ist $P(U(\alpha);\ A_n) = P^{\gamma}(A_n)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $\limsup_{n\to\infty} \frac{|P(U(\alpha);A_n)|}{m(A_n)} > 0$. Wenn $\alpha > -\infty$ ist, dann ist $\delta < \alpha$ und $P^{\gamma}(A_n) = P(U(\alpha);\ A_n) \cup P\left(\left(<-\infty, \frac{\delta+\alpha}{2}\right);\ A_n\right)$. Weil $\frac{\delta+\alpha}{2} < \alpha = \underline{D}_{ap}\sigma(x)$ und $A_n \to x$, muß $\lim_{n\to\infty} \frac{\left|P\left(\left(<-\infty, \frac{\delta+\alpha}{2}\right); A_n\right)\right|}{m(A_n)} = 0$. Daraus bekommen wir

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|P(U(\alpha);A_n)|}{m(A_n)} = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{|P(U(\alpha);A_n)|}{m(A_n)} + \frac{\left|P\left(\left(<-\infty, \frac{\delta+\alpha}{2}\right); A_n\right)\right|}{m(A_n)}\right) \geqq$$

$\geqq \limsup_{n\to\infty} \frac{|P^{\gamma}(A_n)|}{m(A_n)} > 0$. Damit haben wir bewiesen, daß $\alpha \in \mathscr{D}^*_{ap}\sigma(x)$ und $\underline{D}_{ap}\sigma(x) = \inf\ \mathscr{D}^*_{ap}\ \sigma(x)$ ist.

Die zweite Behauptung ist klar.

2. Es sei m ein Maß auf $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ ein Teilsystem von $\mathscr{A}$. In diesem Teil des Artikels werden wir voraussetzen, daß für m und $\mathscr{B}$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

1° *Für jedes $B \in \mathscr{B}$ ist $0 < m(B) < \infty$;*

2° *es sei $m(A) < \alpha < \infty$ für $A \in \mathscr{B}$. Dann existiert ein solches $B \in \mathscr{B}$, für welches $A \subset B$ und $m(B) = \alpha$ gilt;*

3° *Für jedes $A \in \mathscr{B}$, jedes $x \in A$ und jedes α, für welches $0 < \alpha < m(A)$ gilt, existiert ein solches $B \in \mathscr{B}$, für welches $x \in B \subset A$ und $m(B) = \alpha$ ist;*

4° *Für alle solche $A, B \in \mathscr{B}$ und jede solche η, für welche $A \subset B$ und $m(A) < \eta < m(B)$ ist, existiert ein solches $C \in \mathscr{B}$, für welches $A \subset C \subset B$ und $m(C) = \eta$ ist.*

Satz 1. *Es sei σ eine nichtnegative monotone Funktion, die auf $\mathscr{B}$ definiert ist. Dann gilt: $\bar{D}\,\sigma(x) = \bar{D}_{ap}\sigma(x)$ und $\underline{D}\,\sigma(x) = \underline{D}_{ap}\sigma(x)$.*

Beweis. Nach der Lemma 1. (e) gilt: $\bar{D}_{ap}\sigma(x) \leqq \bar{D}\,\sigma(x)$. Setzen wir voraus, daß $\bar{D}_{ap}\sigma(x) < \bar{D}\,\sigma(x)$ gilt. Dann existieren solche Zahlen α, β und γ aus $(-\infty, \infty)$, daß

$0 \leqq \bar{\mathrm{D}}_{ap}\sigma(x) < \alpha < \beta < \gamma < \bar{\mathrm{D}}\,\sigma(x)$ ist. Man kann also aus der Menge $\left\{A \in \mathscr{B}: x \in A, \frac{\sigma(A)}{m(A)} > \gamma\right\}$ eine solche Folge $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ auswahlen, daß $A_n \to x$ erfüllt ist. Aus 2° geht hervor, daß für jedes n eine solche Menge $B_n \in \mathscr{B}$ existiert, daß $A_n \subset B_n$ und $\min\left(\frac{\gamma}{\beta}, 2\right) m(A_n) < m(B_n) < \min\left(\frac{\gamma}{\alpha}, 3\right) m(A_n)$ erfüllt ist.

Es sei $\max\left(\frac{1}{2}, \frac{\beta}{\gamma}\right) \leqq \eta \leqq 1$. Dann gilt $m(A_n) < \max\left(\frac{1}{2}, \frac{\beta}{\gamma}\right) m(B_n) \leqq \leqq \eta m(B_n) \leqq m(B_n)$. Aus 3° bekommen wir, daß ein solches $D_n \in \mathscr{B}$ existiert, für welches $A_n \subset D_n \subset B_n$ und $m(D_n) = \eta m(B_n)$ gilt. Weiter bekommen wir:

$$\frac{\sigma(D_n)}{m(D_n)} \geqq \frac{\sigma(A_n)}{m(B_n)} > \frac{\sigma(A_n)}{\min\left(\frac{\gamma}{\alpha}, 3\right) m(A_n)} > \gamma \max\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{1}{3}\right) \geqq \alpha .$$

Daraus bekommen wir, daß $\left\{\eta m(B_n): \max\left(\frac{1}{2}, \frac{\beta}{\gamma}\right) \leqq \eta \leqq 1\right\} \subset P_\alpha(B_n)$ für jedes n ist. Es ist also $\frac{|P_\alpha(B_n)|}{m(B_n)} \geqq 1 - \max\left(\frac{1}{2}, \frac{\beta}{\gamma}\right) > 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Man kann ableiten, daß $\frac{\sigma(B_n)}{m(B_n)} > \alpha$, $x \in B_n$ für jedes n und $\lim\limits_{n\to\infty} m(B_n) = 0$ ist. Damit haben wir bewiesen, daß $B_n \in \left\{A \in \mathscr{B}: x \in A, \frac{\sigma(A)}{m(A)} > \alpha\right\}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots, B_n \to x$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|P_\alpha(B_n)|}{m(B_n)} > 0$ gilt. Darum muß $\alpha \leqq \mathrm{D}_a\,\sigma(x)$ gelten. Das ist aber ein Widerspruch.

Es sei jetzt $\underline{\mathrm{D}}\,\sigma(x) < \underline{\mathrm{D}}_{ap}\sigma(x)$. Dann existieren drei solche Zahlen α, β, $\gamma \in (-\infty, \infty)$, daß $0 \leqq \underline{\mathrm{D}}\,\sigma(x) < \alpha < \beta < \gamma < \underline{\mathrm{D}}_{ap}\sigma(x)$ ist. Daraus folgt, daß eine solche Folge $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ existiert, für welche $A_n \in \left\{A \in \mathscr{B}: x \in A, \frac{\sigma(A)}{m(A)} < \alpha\right\}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $A_n \to x$ gilt. Aus 3° geht hervor, daß für jedes n ein solches $B_n \in \mathscr{B}$ existiert, daß $B_n \subset A_n$, $x \in B_n$ und $\max\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{1}{3}\right) m(A_n) \leqq m(B_n) \leqq \leqq \max\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{2}\right) m(A_n)$ gilt. Es sei $1 \leqq \eta \leqq \min\left(\frac{\beta}{\alpha}, 2\right)$. Dann gilt: $m(B_n) \leqq \eta m(B_n) \leqq \min\left(\frac{\beta}{\alpha}, 2\right) m(B_n) \leqq m(A_n)$ für jedes n. Aus 4° bekommen wir die Existenz von solchen $D_n \in \mathscr{B}$, daß $B_n \subset D_n \subset A_n$ und $m(D_n) = \eta m(B_n)$ gilt. Daraus bekommen wir, daß $\frac{\sigma(D_n)}{m(D_n)} \leqq \frac{\sigma(A_n)}{m(B_n)} \leqq \frac{\sigma(A_n)}{\max\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{1}{3}\right) m(A_n)} < \frac{\alpha}{\max\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{1}{3}\right)} \leqq \gamma$ gilt.

Es muß also $\left\{\eta m(B_n): 1 \leqq \eta \leqq \min\left(\frac{\beta}{\alpha}, 2\right)\right\} \subset P^{\gamma}(A_n)$ sein. Da $A_n \in \left\{A \in \mathscr{B}: x \in A,\ \frac{\sigma(A)}{m(A)} < \gamma\right\}$ für $n = 1, 2, 3, \dots$, $A_n \to x$ und

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|P^{\gamma}(A_n)|}{m(A_n)} \geqq \limsup_{n\to\infty} \frac{\left(\min\left(\frac{\beta}{\alpha}, 2\right) - 1\right) m(B_n)}{m(A_n)} \geqq$$

$\left(\min\left(\frac{\beta}{\alpha}, 2\right) - 1\right) \max\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{1}{3}\right) > 0$ gilt, muß $\underline{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(x) \leqq \gamma$ gelten. Das ist ein Widerspruch.

Damit haben wir bewiesen, daß $\underline{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(x) \leqq \underline{D}\,\sigma(x)$ ist. Daraus und aus der Lemma 1 (e) bekommt man, daß $\underline{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(x) = \underline{D}\,\sigma(x)$ ist.

Folgerung 1. *Es sei σ eine nichtnegative monotone Funktion, die auf $\mathscr{B}$ definiert ist. Wenn $\underline{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(x) = \bar{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$ ist, dann ist auch $\underline{D}\,\sigma(x) = \bar{D}\,\sigma(x)$.*

Eine Funktion σ die auf $\mathscr{B}$ definiert ist, heißt eine Lipschitzfunktion mit der Konstante L bezüglich der Funktion m, wenn $|\sigma(B) - \sigma(C)| \leqq Lm(B - C)$ für jedes B, $C \in \mathscr{B}$, für welche $C \subset B$ ist.

Satz 2. *Es sei σ eine additive Lipschitzfunktion bezüglich der Funktion m. Dann gilt: $\mathscr{D}\sigma(x) = \mathscr{D}^*\sigma(x) = \mathscr{D}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(x) = \mathscr{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$.*

Beweis. Nach der Lemma 1. gilt es: $\mathscr{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(x) \subset \mathscr{D}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(x) \subset \mathscr{D}^*\sigma(x) = \mathscr{D}\sigma(x)$. Wir werden zeigen, daß auch die Inklusion $\mathscr{D}\sigma(x) \subset \mathscr{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$ gilt.

Es sei σ eine Lipschitzfunktion mit der Konstante L bezüglich der Funktion m. Es sei $\alpha \in \mathscr{D}\sigma(x)$ und $U(\alpha)$ eine Umbegung von α. Es sei $V(\alpha)$ eine solche Umgebung von α, für welche $V(\alpha) \subset U(\alpha)$ und $\varrho(V(\alpha), \langle -\infty, \infty\rangle - U(\alpha)) \geqq \varepsilon$ gilt, wobei ε eine positive Zahl ist. Dabei ϱ ist die Metrik auf $\langle -\infty, \infty\rangle$.

Da $\alpha \in \mathscr{D}\sigma(x)$ ist, muß eine solche Folge $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ existieren, für welche $A_n \in \mathscr{B}$ für $n = 1, 2, 3, \dots$, $A_n \to x$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(A_n)}{m(A_n)} = \alpha$ gilt. Es sei $0 < \eta < 1$ so gewählt, daß $\frac{\eta}{1-\eta} 2L < \varepsilon$ erfüllt ist. Es sei $A \in \mathscr{B}$, $A \subset A_n$ und $(1-\eta)m(A_n) \leqq m(A)$. Dann gilt:

$$\left|\frac{\sigma(A)}{m(A)} - \frac{\sigma(A_n)}{m(A_n)}\right| \leqq \frac{|\sigma(A_n) - \sigma(A)|m(A_n) + |m(A) - m(A_n)|\,|\sigma(A_n)|}{(1-\eta)m^2(A_n)} \leqq$$

$$\leqq \frac{2L\eta m^2(A_n)}{(1-\eta)m^2(A_n)} < \varepsilon.$$

Da $\frac{\sigma(A_n)}{m(A_n)} \to \alpha$ gilt, existiert eine solche natürliche Zahl N, daß $\frac{\sigma(A_n)}{m(A_n)} \in V(\alpha)$ für $n \geqq N$ ist. Dann gilt $\{km(A_n): 1 - \eta \leqq k \leqq 1\} \subset P(U(\alpha); A_n)$ für jedes $n \geqq N$. Daraus bekommen wir, daß $\limsup_{n\to\infty} \frac{|P(U(\alpha); A_n)|}{m(A_n)} \geqq \limsup_{n\to\infty} \frac{\eta m(A_n)}{m(A_n)} = \eta > 0$ ist. Damit haben wir bewiesen, daß $\alpha \in \mathscr{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$ ist.

3. Wählen wir jetzt $X=E_j$, $\mathscr{B}$ gleich dem System $\mathscr{I}$ aller nichtdegenerierten abgeschlossenen Intervallen im E_j und m gleich dem Lebesguemaß im E_j, wo E_j der j-dimensionale euklidische Raum ist. Es ist ersichtlich, daß $(\mathscr{I}, m)$ die Bedingungen 1°, 2°, 3° und 4° erfüllt.

Es sei $\boldsymbol{a}=(a_1, \ldots, a_j)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, \ldots, b_j)$ und $a_i<b_i$ für $i=1, 2, \ldots, j$. Das Intervall $I=\{\boldsymbol{x}\in E_j: \boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_j),\ a_i\leqq x_i\leqq b_i$ für $i=1, 2, \ldots, j\}$ werden wir auch mit $\langle \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}\rangle$ bezeichnen, und die Punkte $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ werden wir Hauptecken von I nennen. Wenn $\boldsymbol{u}=(u_1, \ldots, u_j)$ und $\boldsymbol{v}=(v_1, \ldots, v_j)$ zwei Ecken von I sind, dann werden wir sagen, daß $\boldsymbol{u}$ die gegenüberliegende Ecke zu $\boldsymbol{v}$ ist, wenn $u_i\neq v_i$ für $i=1, 2, \ldots, j$ ist.

Es sei I ein Intervall aus $\mathscr{I}$, $A\subset I$ und $\boldsymbol{v}$ eine Ecke von I. Dann werden wir mit $J(A; \boldsymbol{v})$ die Menge aller Intervalle $J\in\mathscr{I}$, deren eine Ecke der Punkt $\boldsymbol{v}$ und zu ihm gegenüberliegende Ecke in der Menge A ist, bezeichnen.

Es sei σ eine Funktion, die auf $\mathscr{I}$ definiert ist. Es sei $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Intervallen aus $\mathscr{I}$ und $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine solche Folge von Punkten, daß $\boldsymbol{v}_n$ eine Ecke von I_n für $n=1, 2, 3, \ldots$ ist. Es sei $\alpha\in\langle -\infty, \infty\rangle$ und $U(\alpha)$ eine Umgebung von α.

Dann werden wir die Menge $\{I\in\mathscr{I}: I\subset I_n,\ \boldsymbol{v}_n$ *ist eine Ecke von I und* $\dfrac{\sigma(I)}{m(I)}\in U(\alpha)\}$ mit $J(I_n; \boldsymbol{v}_n; U(\alpha))$ bezeichnen. Das Zeichen $\mathscr{D}^\circ\sigma(\boldsymbol{x})$ wird die Menge $\Big\{\alpha\in\langle -\infty, \infty\rangle$: *es existiert eine solche Folge* $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ *von Intervallen aus* $\mathscr{I}$, *daß* $I_n\to\boldsymbol{x}$, $\dfrac{\sigma(I_n)}{m(I_n)}\to\alpha$ *ist und für jede Umgebung* $U(\alpha)$ *von* α *existiert eine solche natürliche Zahl N, eine solche Folge* $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ *von Intervallen und eine solche Folge* $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *von Punkten, daß* $\boldsymbol{v}_n$ *eine Ecke von* I_n, $J(J_n; \boldsymbol{v}_n)\subset J(I_n; \boldsymbol{v}_n; U(\alpha))$ *für* $n=N, N+1, N+2, \ldots$ *und* $\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{|J_n|}{|I_n|}>0$ *ist*$\Big\}$ bezeichnen.

Man kann leicht folgende Lemma beweisen:

Lemma 2. *Es sei I ein nichtdegeneriertes abgeschlossenes Intervall, Y ein Intervall, welches im I enthalten ist, und* $\boldsymbol{v}$ *eine Ecke von dem Intervall I. Dann gilt*
$$\frac{|\{|A|: A\in J(Y; \boldsymbol{v})\}|}{|I|}\geqq\frac{|Y|}{|I|}.$$

Lemma 3. *Es sei* σ *eine Funktion, die auf* $\mathscr{I}$ *definiert ist. Dann gilt* $\mathscr{D}^\circ\sigma(\boldsymbol{x})\subset\mathscr{D}_{ap}\sigma(\boldsymbol{x})$.

Beweis. Es sei $\alpha\in\mathscr{D}^\circ\sigma(\boldsymbol{x})$. Dann existiert eine solche Folge $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Intervallen aus $\mathscr{I}$, daß $I_n\to\boldsymbol{x}$, $\dfrac{\sigma(I_n)}{m(I_n)}\to\alpha$ ist und daß für jede Umgebung $U(\alpha)$ von α eine solche Folge $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Intervallen und eine solche Folge $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Punkten existiert, für welche $\boldsymbol{v}_n$ eine Ecke von I_n, $J(J_n; \boldsymbol{v}_n)\subset J(I_n; \boldsymbol{v}_n; U(\alpha))$ für $n=1, 2, 3, \ldots$ und $\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{|J_n|}{|I_n|}>0$ ist.

Weil $\{|I| : I \in J(I_n\,;\, v_n\,;\, U(\alpha))\} \subset P(U(\alpha);\, I_n)$ ist, folgt aus der Lemma 2., daß $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{|P(U(\alpha);\, I_n)|}{|I_n|} \geqq \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{|\{|I| : I \in J(J_n\,;\, v_n)\}|}{|I_n|} \geqq \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{|J_n|}{|I_n|} > 0$ ist. Damit muß $\alpha \in \mathscr{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(\boldsymbol{x})$ sein.

Satz 3. *Es sei σ eine additive Intervallfunktion, die zugleich eine Lipschitzfunktion ist. Dann ist $\mathscr{D}\sigma(\boldsymbol{x}) \subset \mathscr{D}^\circ \sigma(\boldsymbol{x})$.*

Beweis. Es sei L eine Konstante, für welche $|\sigma(I)| \leqq L|I|$ für jedes $I \in \mathscr{I}$ ist. Es sei $\alpha \in \mathscr{D}\sigma(\boldsymbol{x})$. Dann existiert eine solche Folge $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Intervallen aus $\mathscr{I}$, daß $\dfrac{\sigma(I_n)}{m(I_n)} \to \alpha$ und $I_n \to \boldsymbol{x}$ gilt. Es sei $U_n(\alpha) = \left(\alpha - \dfrac{1}{n},\, \alpha + \dfrac{1}{n}\right)$ und $V_n(\alpha) = \left(\alpha - \dfrac{1}{2n},\, \alpha + \dfrac{1}{2n}\right)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Es existiert eine solche steigende Folge $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ von natürlichen Zahlen, daß $\dfrac{\sigma(I_{k_n})}{|I_{k_n}|} \in V_n(\alpha)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Es sei η eine solche Zahl, für welche $0 < \eta < 1$ und $\dfrac{\eta}{1-\eta}\, 2L < \dfrac{1}{2n}$ gilt. Es sei v_n eine Ecke von dem Intervall I_{k_n} und u_n die zu v_n gegenüberliegende Ecke von I_{k_n}. Wir setzen $\delta = (1-\eta)^{\frac{1}{j}}$ und $t_n = (1-\delta)\, v_n + \delta u_n$. Es sei Y_n das Intervall, dessen zwei gegenüberliegende Ecken die Punkte u_n und t_n sind. Es sei $z \in Y_n$ und I das Intervall, dessen gegenüberliegende Ecke die Punkte z und v_n sind. Für das Intervall I gilt:

$$\left|\frac{\sigma(I)}{|I|} - \frac{\sigma(I_{k_n})}{|I_{k_n}|}\right| \leqq \frac{|\sigma(I) - \sigma(I_{k_n})|\; |I_{k_n}|}{|I|\; |I_{k_n}|} + \frac{\big||I| - |I_{k_n}|\big|\, |\sigma(I_{k_n})|}{|I|\; |I_{k_n}|} \leqq \frac{2L|I_{k_n}|(|I_{k_n}| - |I|)}{(1-\eta)|I_{k_n}|^2} \leqq$$

$$\leqq \frac{2L\eta |I_{k_n}|^2}{(1-\eta)|I_{k_n}|^2} < \frac{1}{2n}.$$

Weil $\dfrac{\sigma(I_{k_n})}{|I_{k_n}|} \in V_n(\alpha)$ ist, bekommen wir aus der letzten Ungleichung, daß $\dfrac{\sigma(I)}{m(I)} \in U_n(\alpha)$ ist. Es ist also $J(Y_n\,;\, v_n) \subset J(I_n\,;\, v_n\,;\, U_n(\alpha))$. Es ist ersichtlich, daß $\dfrac{|Y_n|}{|I_{k_n}|} = (1-\delta)^j > 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt. Also es gilt: $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{|Y_n|}{|I_{k_n}|} = (1-\delta)^j > 0$. Darum muß $\alpha \in \mathscr{D}^\circ \sigma(\boldsymbol{x})$ sein.

Es sei $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_j)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_j)$ und $u_i < v_i$ für $i = 1, 2, \ldots, j$. Unter dem Parameter der Regularität von Intervall $I = \langle \boldsymbol{u}\,;\, \boldsymbol{v}\rangle$ werden wir die Zahl $\dfrac{|I|}{l^j}$ verstehen, wobei $l = \max\{v_i - u_i\colon\, i = 1, 2, \ldots, j\}$ ist ([6]). Den Parameter der Regularität von I werden wir mit $r(I)$ bezeichnen.

Lemma 4. *Es sei σ eine nichtnegative nichtfallende Funktion, die auf $\mathscr{I}$ definiert ist. Es sei $\alpha \in \langle 0, \infty\rangle$, n eine natürliche Zahl und $I \in \mathscr{I}$.*

a) *Es sei $\alpha < \infty$, $\boldsymbol{x} \in I$, $\dfrac{\sigma(I)}{|I|} < \alpha + \dfrac{1}{2n}$, $k = \dfrac{2n\alpha + 1}{2n\alpha + 2}$ und $\delta = k^{\frac{1}{j}}$. Dann existiert ein* *solches Intervall Y und eine solche Ecke $\boldsymbol{v}$ vom Intervall I, daß $Y \subset I$, $\dfrac{|Y|}{|I|} = (1-\delta)^j$ und $\boldsymbol{x} \in J$, $\dfrac{\sigma(J)}{|J|} < \alpha + \dfrac{1}{n}$ und $r(J) \geqq kr(I)$ für jedes Intervall J gilt, dessen eine Ecke der Punkt $\boldsymbol{v}$ ist und die zu $\boldsymbol{v}$ gegenüberliegende Ecke im Y liegt.*

b) *Es sei $0 < \alpha - \dfrac{3}{2n} < \alpha < \infty$, $\dfrac{\sigma(I)}{|I|} > \alpha - \dfrac{1}{2n}$, $k = \dfrac{2n\alpha - 1}{2n\alpha - 2}$ und $\delta = k^{\frac{1}{j}}$. Dann existieren zwei solche Intervalle $I' \in \mathscr{I}$ und Y, daß $I \cup Y \subset I'$, $|I'| = k|I|$, $\dfrac{|Y|}{|I'|} = \left(1 - \dfrac{1}{\delta}\right)^j$ gilt, daß I und I' eine gemeinsame Ecke $\boldsymbol{v}$ haben und daß $I \subset J$, $\dfrac{\sigma(J)}{|J|} > \alpha - \dfrac{1}{n}$ und $r(J) \geqq \dfrac{1}{k} r(I)$ für jedes Intervall J gilt, dessen eine Ecke der Punkt $\boldsymbol{v}$ ist und die zu $\boldsymbol{v}$ gegenüberliegende Ecke im Y liegt.*

c) *Es sei $\dfrac{\sigma(I)}{|I|} > 2K$. Dann existieren solche zwei Intervalle $I' \in \mathscr{I}$ und Y, daß $I \cup Y \subset I'$, $\dfrac{|Y|}{|I'|} = (1 - 2^{-\frac{1}{j}})^j$, $|I'| = 2|I|$ gilt, daß I und I' eine gemeinsame Ecke $\boldsymbol{v}$ haben und daß $I \subset J$, $\dfrac{\sigma(J)}{|J|} > K$ und $r(J) \geqq \frac{1}{2} r(I)$ für jedes Intervall J gilt, dessen eine Ecke der Punkt $\boldsymbol{v}$ ist und die zu $\boldsymbol{v}$ gegenüberliegende Ecke im Y liegt.*

B e w e i s. a) Es ist ersichtlich, daß $\frac{1}{2} < \delta < 1$ ist. Es sei $I = \langle \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z} \rangle$. Dann existiert ein solches Intervall $I' \in \mathscr{I}$, dessen eine Ecke der Punkt $\frac{1}{2}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ ist und die zu dem Punkt $\frac{1}{2}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ gegenüberliegende Ecke eine Ecke $\boldsymbol{v}$ von I ist, daß $\boldsymbol{x} \in I'$ ist. Es sei $\boldsymbol{u}$ die zu $\boldsymbol{v}$ gegenüberliegende Ecke von I. Es sei Y das Intervall, dessen eine Ecke der Punkt $\boldsymbol{u}$ ist und die zu $\boldsymbol{u}$ gegenüberliegende Ecke der Punkt $\boldsymbol{t} = (1-\delta)\boldsymbol{v} + \delta\boldsymbol{u}$ ist. Es ist leicht zu beweisen, daß $\dfrac{|Y|}{|I|} = (1-\delta)^j$ ist. Es sei J ein Intervall aus $\mathscr{I}$, dessen eine Ecke der Punkt $\boldsymbol{v}$ ist und die zu $\boldsymbol{v}$ gegenüberliegende Ecke im Y liegt. Dann ist $\boldsymbol{x} \in I' \subset J \subset I$ und $\dfrac{\sigma(J)}{|J|} \leqq \dfrac{\sigma(I)}{k|I|} < \alpha + \dfrac{1}{n}$. Da das Volumen des Intervalls, dessen zwei gegenüberliegende Ecken die Punkte $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{v}$ sind, gleich $k|I|$ ist, gilt $r(J) \geqq kr(I)$.

b) Es sei $I = \langle \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v} \rangle$. Es ist $1 < k < 2$. Wir setzen $\boldsymbol{t} = \delta\boldsymbol{u} + (1-\delta)\boldsymbol{v}$. Es sei $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_j)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_j)$ und $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_j)$. Dann ist $t_i < u_i$ für $i = 1, 2, \ldots, j$. Wir werden das Intervall $\langle \boldsymbol{t}; \boldsymbol{u} \rangle$ mit Y und das Intervall $\langle \boldsymbol{t}; \boldsymbol{v} \rangle$ mit I' bezeichnen. Dann ist $I \cup Y \subset I'$, $|I'| = k|I|$ und $\dfrac{|Y|}{|I'|} = \left(1 - \dfrac{1}{\delta}\right)^j$. Es sei J ein Intervall $\langle \boldsymbol{x}; \boldsymbol{v} \rangle$, wo $\boldsymbol{x} \in Y$ ist. Dann gilt: $I \subset J$ und $\dfrac{\sigma(J)}{|J|} \geqq \dfrac{\sigma(I)}{|I'|} = \dfrac{1}{k} \dfrac{\sigma(I)}{|I|} > \alpha - \dfrac{1}{n}$. Es sei $p =$

$=\max\{v_i-u_i: i=1,2,\dots,j\}$ und $l=\max\{v_i-t_i: i=1,2,\dots,j\}$. Dann ist $l\approx k^{\frac{1}{j}}p$ und $r(J)\geqq\frac{|I|}{l'}=\frac{|I|}{kp'}=\frac{1}{k}\,r(I)$.

c) Es sei $\delta=2^{\frac{1}{j}}$ und $I=\langle \boldsymbol{u};\boldsymbol{v}\rangle$. Wir setzen $\boldsymbol{t}=\delta\boldsymbol{u}+(1-\delta)\boldsymbol{v}$. Es sei $\boldsymbol{u}=(u_1,\dots,u_j)$, $\boldsymbol{v}=(v_1,\dots,v_j)$ und $\boldsymbol{t}=(t_1,\dots,t_j)$. Dann gilt $t_i<u_i$ für $i=1,2,\dots,j$. Es seien Y und I' wie in b). Dann ist $I\cup Y\subset I'$, $|I'|=2|I|$ und $\frac{|Y|}{|I'|}=\left(1-\frac{1}{\delta}\right)^j$. Es sei J das Intervall $\langle \boldsymbol{x};\boldsymbol{v}\rangle$, wo $\boldsymbol{x}\in Y$ ist. Dann ist $I\subset J$, $\frac{\sigma(J)}{|J|}>K$ und $r(J)\geqq\frac{1}{2}r(I)$.

Es sei $\gamma>0$. Wenn wir in den Definitionen von $\bar{\mathrm{D}}\sigma(x)$, $\underline{\mathrm{D}}\sigma(x)$, $\bar{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$, $\underline{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$, $\mathscr{D}\sigma(x)$, $\mathscr{D}^*\sigma(x)$, $\mathscr{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$, $\mathscr{D}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$ für die dort benutzte Folge $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ noch die Bedingung $\liminf\limits_{n\to\infty} r(A_n)\geqq\gamma$ fordern, dann werden wir diese Zahlen, bzw. Mengen mit $\bar{\mathrm{D}}_\gamma\sigma(\boldsymbol{x})$, $\underline{\mathrm{D}}_\gamma\sigma(\boldsymbol{x})$, $\bar{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap},\gamma}\sigma(\boldsymbol{x})$, $\underline{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap},\gamma}\sigma(\boldsymbol{x})$, $\mathscr{D}_\gamma\sigma(\boldsymbol{x})$, $\mathscr{D}^*_\gamma\sigma(\boldsymbol{x})$, $\mathscr{D}_{\mathrm{ap},\gamma}\sigma(\boldsymbol{x})$ und $\mathscr{D}^*_{\mathrm{ap},\gamma}\sigma(\boldsymbol{x})$ bezeichnen.

Wenn wir in den Definitionen von $\bar{\mathrm{D}}\sigma(x)$, $\underline{\mathrm{D}}\sigma(x)$, $\bar{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$, $\underline{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$, $\mathscr{D}\sigma(x)$, $\mathscr{D}^*\sigma(x)$, $\mathscr{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$ und $\mathscr{D}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$ für die dort benutzte Folge $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ noch die Bedingung $\liminf\limits_{n\to\infty} r(A_n)>0$ fordern, dann werden wir diese Zahlen, bzw. Mengen mit $\bar{\mathrm{D}}_0\sigma(\boldsymbol{x})$, $\underline{\mathrm{D}}_0\sigma(\boldsymbol{x})$, $\bar{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap},0}\sigma(\boldsymbol{x})$, $\underline{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap},0}\sigma(\boldsymbol{x})$, $\mathscr{D}_0\sigma(\boldsymbol{x})$, $\mathscr{D}^*_0\sigma(\boldsymbol{x})$, $\mathscr{D}_{\mathrm{ap},0}\sigma(\boldsymbol{x})$ und $\mathscr{D}^*_{\mathrm{ap},0}\sigma(\boldsymbol{x})$ bezeichnen. Für diese Zahlen, bzw. Mengen mit dem Indices γ, bzw. 0 gelten ähnliche Behauptungen, wie in Lemma 1 für $\bar{\mathrm{D}}\sigma(x)$, $\underline{\mathrm{D}}\sigma(x)$, $\bar{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$, $\underline{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$, $\mathscr{D}\sigma(x)$, $\mathscr{D}^*\sigma(x)$, $\mathscr{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(\boldsymbol{x})$ und $\mathscr{D}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(\boldsymbol{x})$ gelten.

Mit dem Zeichen $\mathscr{D}^{\circ}_0\sigma(\boldsymbol{x})$ werden wir die Menge $\Big\{\alpha\in\langle-\infty,\infty\rangle$: *für jede Umgebung $U(\alpha)$ von α existiert eine solche positive Zahl γ, zwei solche Folgen $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Intervallen und eine solche Folge $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Punkten, daß $I_n\to\boldsymbol{x}$, $\frac{\sigma(I_n)}{|I_n|}\in U(\alpha)$, $r(I_n)\geqq\gamma$, $\boldsymbol{v}_n$ eine Ecke von I_n, $r(I)\geqq\gamma$ für jedes $I\in J(J_n;\boldsymbol{v}_n)$, $J(J_n;\boldsymbol{v}_n)\subset J(I_n;\boldsymbol{v}_n;U(\alpha))$ für jedes n und $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{|J_n|}{|I_n|}>0$ ist*$\Big\}$ bezeichnen.

Satz 4. *Es sei σ eine nichtnegative nichtfallende Funktion, die auf $\mathscr{I}$ definiert ist. Dann ist $\underline{\mathrm{D}}\sigma(\boldsymbol{x})$, $\bar{\mathrm{D}}\sigma(\boldsymbol{x})\in\mathscr{D}^{\circ}\sigma(\boldsymbol{x})$ und $\underline{\mathrm{D}}_0\sigma(\boldsymbol{x})$, $\bar{\mathrm{D}}_0\sigma(\boldsymbol{x})\in\mathscr{D}^{\circ}_0\sigma(\boldsymbol{x})$.*

Beweis. Es sei $0\leqq\alpha=\underline{\mathrm{D}}\sigma(\boldsymbol{x})<\infty$. Dann existiert eine solche Folge $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$, daß $I_i\to\boldsymbol{x}$ und $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{\sigma(I_i)}{|I_i|}=\alpha$ ist.

Es sei $U(\alpha)$ eine Umgebung von α. Dann existiert eine solche natürliche Zahl n, daß $\left(\alpha-\frac{1}{n},\,\alpha+\frac{1}{n}\right)\subset U(\alpha)$ ist. Es sei $k_n=\frac{2n\alpha+1}{2n\alpha+2}$. Da $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{\sigma(I_i)}{|I_i|}=\alpha$ ist, muß eine solche natürliche Zahl N_1 existieren, daß $\frac{\sigma(I_i)}{|I_i|}<\alpha+\frac{1}{2n}$ für $i\geqq N_1$ ist. Aus der

Lemma 4 geht für $i \geqq N_1$ die Existenz eines solchen Intervalls J_i und einer solchen Ecke $\boldsymbol{v}_i$ von I_i hervor, daß $J_i \subset I_i$, $\dfrac{|J_i|}{|I_i|} = (1 - k_n^{\frac{1}{i}})^i$, $\boldsymbol{x} \in J$, $r(J) \geqq k_n r(I_i)$ und $\dfrac{\sigma(J)}{|J|} < \alpha + \dfrac{1}{n}$ für jedes Intervall J ist, dessen eine Ecke der Punkt $\boldsymbol{v}_i$ ist und die zu $\boldsymbol{v}_i$ gegenüberliegende Ecke im J_i liegt. Da $\alpha = \underline{\mathrm{D}}\,\sigma(\boldsymbol{x})$ ist, muß eine solche natürliche Zahl N existieren, daß $N \geqq N_1$ und $\dfrac{\sigma(J)}{|J|} > \alpha - \dfrac{1}{n}$ für jedes Intervall J, für welches $\boldsymbol{x} \in J \subset I_i$ für $i \geqq N$ gilt. Daraus ist es klar, daß $J(J_i\,;\, \boldsymbol{v}_i) \subset J(J_i\,;\, \boldsymbol{v}_i\,;\, U(\alpha))$ für $i \geqq N$ und $\limsup\limits_{i \to \infty} \dfrac{|J_i|}{|I_i|} > 0$ ist.

Das aber gibt uns $\alpha \in \mathscr{D}^\circ \sigma(\boldsymbol{x})$ ist.

Es sei $0 \leqq \alpha = \underline{\mathrm{D}}_0 \sigma(\boldsymbol{x}) < \infty$ und $U(\alpha)$ eine Umgebung von α. Es existiert eine solche natürliche Zahl n, daß $\left(\alpha - \dfrac{1}{n}, \alpha + \dfrac{1}{n}\right) \subset U(\alpha)$ ist. Es sei $k_n = \dfrac{2n\alpha + 1}{2n\alpha + 2}$. Dann existiert eine solche Folge $\{I_i\}_{n=1}^\infty$ von Intervallen und eine solche $\gamma > 0$, daß $\dfrac{\sigma(I_i)}{|I_i|} < \alpha + \dfrac{1}{n}$, $r(I_i) \geqq \gamma$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$ und $I_i \to \boldsymbol{x}$. Aus der Lemma 4 bekommen wir eine solche Folge $\{J_i\}_{i=1}^\infty$ von Intervallen und eine solche Folge $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^\infty$ von Punkten, daß für $i = 1, 2, 3, \ldots$ $J_i \subset I_i$, $\dfrac{|J_i|}{|I_i|} = (1 - \sqrt[i]{k_n})^i$, $\boldsymbol{v}_i$ die Ecke von I_i und $\boldsymbol{x} \in J$, $r(J) \geqq k_n r(I_i) \geqq \dfrac{\gamma}{2}$ und $\dfrac{\sigma(J)}{|J|} < \alpha + \dfrac{1}{n}$ für jedes Intervall J ist, dessen eine Ecke der Punkt $\boldsymbol{v}_i$ ist und die zu $\boldsymbol{v}_i$ gegenüberliegende Ecke im J_i liegt. Da $\alpha = \underline{\mathrm{D}}_0 \sigma(\boldsymbol{x})$ ist, muß eine solche natürliche Zahl N existieren, daß für $i \geqq N \dfrac{\sigma(J)}{|J|} > \alpha - \dfrac{1}{n}$ für jedes Intervall J, für welches $\boldsymbol{x} \in J \subset I_i$ und $r(J) \geqq \dfrac{\gamma}{2}$ ist.

Daraus sieht man leicht, daß $\alpha \in \mathscr{D}_0^\circ \sigma(\boldsymbol{x})$ ist.

Es sei $0 = \bar{\mathrm{D}}\,\sigma(\boldsymbol{x})$, bzw. $0 = \bar{\mathrm{D}}_0 \sigma(\boldsymbol{x})$. Dann ist $\bar{\mathrm{D}}\,\sigma(\boldsymbol{x}) = \underline{\mathrm{D}}\,\sigma(\boldsymbol{x}) = 0$, bzw. $\bar{\mathrm{D}}_0 \sigma(\boldsymbol{x}) = \underline{\mathrm{D}}_0 \sigma(\boldsymbol{x}) = 0$. Nach dem, was wir schon bewiesen haben, ist $\bar{\mathrm{D}}\,\sigma(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{D}^\circ \sigma(\boldsymbol{x})$, bzw. $\bar{\mathrm{D}}_0 \sigma(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{D}_0^\circ \sigma(\boldsymbol{x})$.

Es sei $0 < \alpha = \bar{\mathrm{D}}_0 \sigma(\boldsymbol{x}) \leqq \infty$ und $U(\alpha)$ eine Umgebung von α. Dann existiert eine solche natürliche Zahl n, daß $0 < \alpha - \dfrac{1}{n}$ und $\left(\alpha - \dfrac{1}{n}, \alpha + \dfrac{1}{n}\right) \subset U(\alpha)$, wenn $0 < \bar{\mathrm{D}}_0 \sigma(\boldsymbol{x}) < \infty$ und $(n, \infty\rangle \subset U(\alpha)$, wenn $\bar{\mathrm{D}}_0 \sigma(\boldsymbol{x}) = \infty$ ist. Es sei $k_n = \dfrac{2n\alpha - 2}{2n\alpha - 1}$, wenn $0 < \alpha < \infty$ und $k_n = \frac{1}{2}$, wenn $\alpha = \infty$ ist.

Wenn wir statt des Teiles a) der Lemma 4 die Teile b) und c) anwenden, beweisen wir ähnlich wie im Falle $0 \leqq \underline{\mathrm{D}}_0 \sigma(\boldsymbol{x}) < \infty$ die Existenz von einer Zahl

$\gamma>0$, von zwei Folgen $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ und $\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$ von Intervallen und einer Folge $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^{\infty}$ von Punkten mit folgenden Eigenschaften:

(i) Es gilt: $\frac{\sigma(I_i)}{|I_i|}\in U(\alpha)$ und $r(I_i)\geqq\gamma$ für $i=1, 2, 3, \ldots$;

(ii) $I_i\to\boldsymbol{x}$;

(iii) Für jedes i gilt: $\boldsymbol{x}\in J$, $r(J)\geqq k_n r(I_i)\geqq k_n\gamma$ und $\frac{\sigma(J)}{|J|}\in U(\alpha)$ für jedes Intervall J, dessen eine Ecke der Punkt $\boldsymbol{v}_i$ ist und die zu $\boldsymbol{v}_i$ gegenüberliegende Ecke im J_i liegt.

Daraus bekommt man, daß $\bar{\mathrm{D}}_0\sigma(\boldsymbol{x})\in\mathscr{D}_0^\circ\sigma(\boldsymbol{x})$ ist.

Ähnlich beweist man, daß $\bar{\mathrm{D}}\,\sigma(\boldsymbol{x})\in\mathscr{D}^\circ\sigma(\boldsymbol{x})$ ist, wenn $0<\bar{\mathrm{D}}\,\sigma(\boldsymbol{x})\leqq\infty$ ist.

Wenn $\underline{\mathrm{D}}\;\sigma(\boldsymbol{x})=\infty$, bzw. $\underline{\mathrm{D}}_0\sigma(\boldsymbol{x})=\infty$ ist, dann ist $\underline{\mathrm{D}}\,\sigma(\boldsymbol{x})=\bar{\mathrm{D}}\,\sigma(\boldsymbol{x})$, bzw. $\underline{\mathrm{D}}_0\sigma(\boldsymbol{x})=\bar{\mathrm{D}}_0\sigma(\boldsymbol{x})$. Daraus folgt, daß $\underline{\mathrm{D}}\,\sigma(\boldsymbol{x})\in\mathscr{D}^\circ\sigma(\boldsymbol{x})$, bzw. $\underline{\mathrm{D}}_0\sigma(\boldsymbol{x})\in\mathscr{D}_0^\circ\sigma(\boldsymbol{x})$ ist.

Wenn wir in den Definitionen von $\underline{\mathrm{D}}\;\sigma(x)$, $\bar{\mathrm{D}}\,\sigma(x)$, $\underline{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$, $\bar{\mathrm{D}}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$, $\mathscr{D}\sigma(x)$, $\mathscr{D}^*\sigma(x)$, $\mathscr{D}_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$ und $\mathscr{D}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(x)$ für das System $\mathscr{B}$ nur das System aller Intervallen aus $\mathscr{I}$, deren eine Ecke der Punkt $\boldsymbol{x}$ ist nehmen und wenn wir in der Konvergenz $A_n\to\boldsymbol{x}$ die Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)=0$ durch die Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} d(A_n)=0$, wobei $d(A_n)$ den Durchmesser der Menge A_n bedeutet, ersetzen, dann werden wir diese Zahlen, bzw. Mengen mit $\hat{\underline{\mathrm{D}}}\,\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\bar{\mathrm{D}}}\,\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\underline{\mathrm{D}}}_{\mathrm{ap}}\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\bar{\mathrm{D}}}_{\mathrm{ap}}\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\mathscr{D}}\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\mathscr{D}}^*\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\mathscr{D}}_{\mathrm{ap}}\sigma(\boldsymbol{x})$ und $\hat{\mathscr{D}}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(\boldsymbol{x})$ bezeichnen.

Wenn wir in den Definitionen von $\hat{\underline{\mathrm{D}}}\,\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\bar{\mathrm{D}}}\,\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\underline{\mathrm{D}}}_{\mathrm{ap}}\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\bar{\mathrm{D}}}_{\mathrm{ap}}\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\mathscr{D}}\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\mathscr{D}}^*\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\mathscr{D}}_{\mathrm{ap}}\sigma(\boldsymbol{x})$ und $\hat{\mathscr{D}}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(\boldsymbol{x})$ für die dort benutzte Folge $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ noch die Bedingung $\liminf\limits_{n\to\infty} r(A_n)\geqq\gamma$ ($\liminf\limits_{n\to\infty} r(A_n)>0$) fordern, wo $\gamma>0$ ist, dann werden wir die so bekommenen Zahlen, bzw. Mengen mit $\hat{\underline{\mathrm{D}}}_\gamma\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\bar{\mathrm{D}}}_\gamma\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\underline{\mathrm{D}}}_{\mathrm{ap},\gamma}\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\bar{\mathrm{D}}}_{\mathrm{ap},\gamma}\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\mathscr{D}}_\gamma\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\mathscr{D}}^*_\gamma\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\mathscr{D}}_{\mathrm{ap},\gamma}\sigma(\boldsymbol{x})$ und $\hat{\mathscr{D}}^*_{\mathrm{ap},\gamma}\sigma(\boldsymbol{x})$ ($\hat{\underline{\mathrm{D}}}_0\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\bar{\mathrm{D}}}_0\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\underline{\mathrm{D}}}_{\mathrm{ap},0}\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\bar{\mathrm{D}}}_{\mathrm{ap},0}\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\mathscr{D}}_0\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\mathscr{D}}^*_0\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\mathscr{D}}_{\mathrm{ap},0}\sigma(\boldsymbol{x})$ und $\hat{\mathscr{D}}^*_{\mathrm{ap},0}\sigma(\boldsymbol{x})$) bezeichnen.

Mit dem Zeichen $\hat{\mathscr{D}}_\gamma^\circ\sigma(\boldsymbol{x})$, wo $\gamma>0$ ist, werden wir die Menge $\{\alpha\in\langle-\infty,\infty\rangle$: *für jede Umgebung* $U(\alpha)$ *von* α *gibt es zwei solche Folgen* $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ *und* $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ *von Intervallen, für welche* $I_n\in\mathscr{I}$, $r(I_n)\geqq\gamma$ *und* $\boldsymbol{x}$ *eine Ecke von* I_n *für jedes* n, $\frac{\sigma(I_n)}{|I_n|}\in U(\alpha)$, $I_n\to\boldsymbol{x}$, $r(I)\geqq\gamma$ *für jedes* $I\in J(J_n;\boldsymbol{x})$, $J(J_n;\boldsymbol{x})\subset J(I_n;\boldsymbol{x};U(\alpha))$ *für jedes* n *und* $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{|J_n|}{|I_n|}>0$ *ist*$\}$ bezeichnen. Es sei $\hat{\mathscr{D}}_0^\circ\sigma(\boldsymbol{x})$ die Menge $\cup\{\hat{\mathscr{D}}_\gamma^\circ\sigma(\boldsymbol{x}):\gamma>0\}$.

Lemma 5. *Es sei* σ *eine nichtnegative nichtfallende Funktion vom Intervall. Es sei* $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_j)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_j)$ *und* $y_i<x_i$ *für* $i=1,2,\ldots,j$. *Es sei* $\boldsymbol{u}=(u_1,\ldots,u_j)$ *und* $y_i<u_i<x_i$ *für* $i=1, 2, \ldots, j$. *Es sei* $I=\langle\boldsymbol{y};\boldsymbol{x}\rangle$ *und* $I_u=\langle\boldsymbol{u};\boldsymbol{x}\rangle$. *Es sei*

$\frac{\sigma(I)}{|I|} \leqq \alpha < \beta \leqq \frac{\sigma(I_u)}{|I_u|}$. *Dann existiert eine solche* $t \in (0,1)$, *daß für* $v = (1-t)y + tu$ $\frac{\sigma(I_v)}{|I_v|} \in (\alpha, \beta)$ *gilt.*

Beweis. Das Lemma 5 sei nicht richtig. Es sei $T = \left\{ s \in \langle 0,1 \rangle :\right.$ für $z = (1-s)y + su$ gilt: $\left.\frac{\sigma(I_z)}{|I_z|} \leqq \alpha \right\}$. Es ist evident, daß $0 \in T$ und $t = \sup T \in \langle 0,1 \rangle$ ist. Es sei $s_n \in T$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ so gewählt, daß $s_n \leqq t$ und $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = t$ ist. Daraus bekommen wir, daß $\sigma(I_w) \leqq \sigma(I_{v_n}) \leqq \alpha |I_{v_n}|$ gilt, wo $w = (1-t)y + tu$ und $v_n = (1-s_n)y + s_n u$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ ist. Daraus folgt, daß $\sigma(I_w) \leqq \alpha |I_w|$, d.h. $t \in T$ ist. Darum muß $t < 1$ sein. Weil für jedes $z = (1-s)y + su$, wo $s > t$ ist, die Ungleichung $\sigma(I_z) \geqq \beta |I_z|$ gilt, gilt: $\sigma(I_w) \geqq \beta |I_w|$. Das ist aber ein Widerspruch.

Satz 5. *Es sei σ eine nichtnegative nichtfallende Funktion vom Intervall. Dann gilt:* $\hat{\mathscr{D}}\sigma(\boldsymbol{x}) \subset \hat{\mathscr{D}}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(\boldsymbol{x})$.

Beweis. Es sei $\alpha \in \hat{\mathscr{D}}\sigma(\boldsymbol{x})$. Wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = \infty$, dann ist $\alpha = \underline{\hat{\mathrm{D}}}\sigma(\boldsymbol{x})$ oder $\alpha = \bar{\hat{\mathrm{D}}}\sigma(\boldsymbol{x})$ und man beweist, daß $\alpha \in \hat{\mathscr{D}}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(\boldsymbol{x})$ ist, ähnlich, wie man die Behauptungen: $\underline{\mathrm{D}}\sigma(\boldsymbol{x})$, $\bar{\mathrm{D}}\sigma(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{D}^\circ\sigma(\boldsymbol{x})$ im Satze 4 bewiesen hat.

Es sei $0 < \alpha < \infty$ und $0 < \alpha - \frac{1}{n}$. Wählen wir $U_n(\alpha) = \left(\alpha - \frac{1}{2n}, \alpha + \frac{1}{2n}\right)$ und $V_n(\alpha) = \left(\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}\right)$. Es sei $\{I_k\}_{k=1}^\infty$ eine Folge von Intervallen, deren eine Ecke der Punkt $\boldsymbol{x}$ ist und für welche $I_k \to \boldsymbol{x}$ und $I_k \in \left\{ I \in \mathscr{I} : \frac{\sigma(I)}{|I|} \in U_n(\alpha) \right\}$ für $k = 1, 2, 3, \dots$ ist. Wir können annehmen, daß $I_k = \langle \boldsymbol{t}_k ; \boldsymbol{x} \rangle$ für $k = 1, 2, 3, \dots$ ist. Es sei $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_j)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_j)$ und $u_i < x_i$ für $i = 1, 2, \dots, j$. Dann existiert ein solches k, daß $\boldsymbol{t}_k \in \langle \boldsymbol{u} ; \boldsymbol{x} \rangle$ ist.

Es sei $\boldsymbol{y} = (1-s)\boldsymbol{t}_k + s\boldsymbol{x}$ und $I_y = \langle \boldsymbol{y} ; \boldsymbol{x} \rangle$. Dann gilt $\frac{\sigma(I_y)}{|I_y|} \leqq \frac{\sigma(I_k)}{|I_k|} =$

$$= \frac{\sigma(I_k)}{(1-s)^j |I_k|} < \frac{\alpha + \frac{1}{2n}}{(1-s)^j} < \alpha + \frac{1}{n} \text{ für jedes } s, \text{ für welches } 0 \leqq s < 1 - \sqrt[j]{\frac{2n\alpha + 1}{2n\alpha + 2}} \text{ ist.}$$

Wenn für jedes s, für welches $0 \leqq s < 1 - \sqrt[j]{\frac{2n\alpha+1}{2n\alpha+2}}$, $\alpha - \frac{1}{n} \leqq \frac{\sigma(I_y)}{|I_y|}$ ist, dann ist $\left(\frac{2n\alpha+1}{2n\alpha+2} |I_k|, \quad |I_k| \right> \subset P(V_n(\alpha); \quad I_k)$. Daraus bekommt man, daß

$$\frac{|\overline{P(V_n(\alpha); I_k)}|}{|I_k|} \geqq \frac{\left(1 - \frac{2n\alpha+1}{2n\alpha+2}\right)|I_k|}{|I_k|} = \frac{1}{2n\alpha+2} > 0 \text{ ist.}$$

Es sei $\bar{s} \in \left(0,1-\sqrt[j]{\frac{2n\alpha+1}{2n\alpha+2}}\right)$ eine solche Zahl, daß $\frac{\sigma(I_{\bar{y}})}{|I_{\bar{y}}|} < \alpha - \frac{1}{n}$ für $\bar{y} = (1-\bar{s})\boldsymbol{t}_k + \bar{s}\boldsymbol{x}$ und $I_{\bar{y}} = \langle \bar{y}\,;\boldsymbol{x}\rangle$ gilt. Dann existiert ein solches Index m, daß $\boldsymbol{t}_m \in \operatorname{Int}\,(\langle \bar{y}\,;\boldsymbol{x}\rangle)$ ist, wobei $\operatorname{Int}(\langle \bar{y}\,;\boldsymbol{x}\rangle)$ das Innere von $\langle \bar{y}\,;\boldsymbol{x}\rangle$ bedeutet. Es sei $s^* = \inf\ \left\{s \in (0,1\rangle : \frac{\sigma(I_y)}{|I_y|} \in \left(\alpha - \frac{1}{2n},\ \alpha + \frac{1}{2n}\right),\right.$ wobei $y = (1-s)\bar{y} + s\boldsymbol{t}_m$ und $\left. I_y = \langle y\,;\boldsymbol{x}\rangle \text{ ist}\right\}$. Es sei $\boldsymbol{z} = (1-s^*)\bar{\boldsymbol{y}} + s^*\boldsymbol{t}_m$. Dann existiert eine solche Folge $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, Daß $\lim\limits_{r\to\infty} s_r = s^*$, $s^* \leqq s_r$ und $\frac{\sigma(I_{y_r})}{|I_{y_r}|} \in \left(\alpha - \frac{1}{2n}\ ,\ \alpha + \frac{1}{2n}\right)$ für $r = 1, 2, 3, \ldots$ ist, wobei $y_r = (1-s_r)\bar{y} + s_r\boldsymbol{t}_m$ und $I_{y_r} = \langle y_r\,;\boldsymbol{x}\rangle$ ist. Daraus bekommen wir, daß $\frac{\sigma(I_z)}{|I_z|} \geqq \lim\limits_{r\to\infty} \frac{\sigma(I_{y_r})}{|I_{y_r}|} \geqq \alpha - \frac{1}{2n}$ ist.

Es sei $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_j)$ und $\bar{\boldsymbol{y}} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_j)$. Wir setzen $\boldsymbol{v} = (1-s)\bar{\boldsymbol{y}} + s\boldsymbol{z}$ und $I_v = \langle \boldsymbol{v}\,;\boldsymbol{x}\rangle$. Nehmen wir jetzt solches $s \in (0,1)$, für welches $\prod\limits_{i=1}^{j}\left(1 + (1-s)\frac{z_i - \bar{y}_i}{x_i - z_i}\right) \leqq \frac{2n\alpha - 1}{2n\alpha - 2}$ ist. Dann gilt: $\frac{\sigma(I_v)}{|I_v|} \geqq \frac{\sigma(I_z)}{\prod\limits_{i=1}^{j}(x_i - v_i)} = \left(\prod\limits_{i=1}^{j}\left(1 + (1-s)\frac{z_i - \bar{y}_i}{x_i - z_i}\right)\right)^{-1} \frac{\sigma(I_z)}{|I_z|} \geqq \alpha - \frac{1}{n}$. Da für $s = 0$ $\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{y}}$ und $\frac{\sigma(I_{\bar{y}})}{|I_{\bar{y}}|} < \alpha - \frac{1}{n}$ ist, muß $\frac{|I_{\bar{y}}|}{|I_z|} = \frac{|I_{\bar{y}}|}{\sigma(I_{\bar{y}})}\frac{\sigma(I_z)}{|I_z|}\frac{\sigma(I_{\bar{y}})}{\sigma(I_z)} \geqq \frac{|I_{\bar{y}}|}{\sigma(I_{\bar{y}})}\frac{\sigma(I_z)}{|I_z|} > \frac{\alpha - \frac{1}{2n}}{\alpha - \frac{1}{n}} = \frac{2n\alpha - 1}{2n\alpha - 2}$ sein. Also muß ein solches $p \in (0,1)$ existieren, für welches $\prod\limits_{i=1}^{j}\left(1 + (1-p)\frac{z_i - \bar{y}_i}{x_i - z_i}\right) = \frac{2n\alpha - 1}{2n\alpha - 2}$ und $\prod\limits_{i=1}^{j}\left(1 + (1-s)\frac{z_i - \bar{y}_i}{x_i - z_i}\right) \in \left\langle 1, \frac{2n\alpha - 1}{2n\alpha - 2}\right\rangle$ für $s \in \langle p, 1\rangle$ gilt. Es sei $\boldsymbol{w} = (1-p)\bar{\boldsymbol{y}} + p\boldsymbol{z}$ und $I_w = \langle \boldsymbol{w}\,;\boldsymbol{x}\rangle$.

Für jedes $I_v = \langle \boldsymbol{v}\,;\boldsymbol{x}\rangle$, wo $\boldsymbol{v} = (1-s)\bar{\boldsymbol{y}} + s\boldsymbol{z}$ und $s \in \langle p, 1\rangle$ ist, gilt $\frac{\sigma(I_v)}{|I_v|} > \alpha - \frac{1}{n}$. Es sei jetzt s eine solche Zahl aus $(p, 1)$, für welche $\frac{\sigma(I_v)}{|I_v|} > \alpha - \frac{1}{2n}$ ist, wobei $\boldsymbol{v} = (1-s)\bar{\boldsymbol{y}} + s\boldsymbol{z}$ ist. Dann existiert ein solches $\beta < \alpha + \frac{1}{2n}$, daß $\alpha - \frac{1}{2n} < \beta < \frac{\sigma(I_v)}{|I_v|}$ ist. Weil $\frac{\sigma(I_{\bar{y}})}{|I_{\bar{y}}|} < \alpha - \frac{1}{n} < \alpha - \frac{1}{2n} < \beta < \frac{\sigma(I_v)}{|I_v|}$ und $\bar{y}_i < v_i < x_i$ für $i = 1, 2, \ldots, j$ ist, existiert nach der Lemma 5 ein solches $t \in (0,1)$, daß $\frac{\sigma(I_q)}{|I_q|} \in \left(\alpha - \frac{1}{2n}\ ,\ \beta\right)$ für $\boldsymbol{q} = (1-t)\bar{\boldsymbol{y}} + t\boldsymbol{v}$ und $I_q = \langle \boldsymbol{q}\,;\boldsymbol{x}\rangle$ gilt. Da $\boldsymbol{q} = (1 - tss^*)\bar{\boldsymbol{y}} + tss^*\boldsymbol{t}_m$

ist, muß $tss^* \geqq s^*$ gelten. Darum muß $t=1$ und $s=1$ sein. Das ist aber unmöglich, weil $t \in (0,1)$ ist. Daraus folgt, daß $\frac{\sigma(I_v)}{|I_v|} \leqq \alpha - \frac{1}{2n}$ für jedes $s \in (p, 1\rangle$, $\boldsymbol{v} = (1-s)\bar{\boldsymbol{y}} + s\boldsymbol{z}$ und $I_v = \langle \boldsymbol{v}; \boldsymbol{x} \rangle$ gelten muß.

Es muß also $(|I_z|, |I_w|\rangle \subset P(\overline{V_n(\alpha)}; I_w)$ sein. Daraus bekommen wir, daß

$$\frac{|P(\overline{V_n(\alpha)}; I_w)|}{|I_w|} \geqq \frac{|I_w| - |I_z|}{|I_w|} =$$

$$= \frac{\left(\prod_{i=1}^{l} \left(1 + (1-p)\frac{z_i - \bar{y}_i}{x_i - z_i}\right) - 1\right)|I_z|}{\prod_{i=1}^{l} \left(1 + (1-p)\frac{z_i - \bar{y}_i}{x_i - z_i}\right)|I_z|} =$$

$$= \frac{\frac{2n\alpha - 1}{2n\alpha - 2} - 1}{\frac{2n\alpha - 1}{2n\alpha - 2}} = \frac{1}{2n\alpha - 1} > \frac{1}{2n\alpha + 2} > 0 \text{ ist.}$$

Wir haben also bewiesen, daß es ein Intervall $I \subset \langle \boldsymbol{u}; \boldsymbol{x} \rangle$ mit einer Ecke $\boldsymbol{x}$ so existiert, daß $\frac{\sigma(I)}{|I|} \in V_n(\alpha)$ und $\frac{|P(\overline{V_n(\alpha)}; I)|}{|I|} \geqq \frac{1}{2n\alpha + 2} > 0$ gilt. Daraus bekommen wir, daß $\alpha \in \mathscr{D}^*_{\mathrm{ap}}\sigma(\boldsymbol{x})$ ist.

Satz 6. *Es sei σ eine nichtnegative nichtfallende Funktion vom Intervall. Es sei $0 < \gamma \leqq 1$ und $\delta < \frac{1}{2}\gamma$. Dann sind $\hat{\underline{\mathrm{D}}}_\gamma\sigma(\boldsymbol{x})$ und $\hat{\underline{\hat{\mathrm{D}}}}_\gamma\sigma(\boldsymbol{x})$ aus der Menge $\mathscr{D}^\circ_\delta\sigma(\boldsymbol{x})$.*

Beweis. Es sei $\alpha = \hat{\underline{\mathrm{D}}}_\gamma\sigma(\boldsymbol{x}) < \infty$. Wir setzen $U_n(\alpha) = \left(\alpha - \frac{1}{2n}, \alpha + \frac{1}{2n}\right)$ und $V_n(\alpha) = \left(\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}\right)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dann existiert eine solche Folge $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ von Intervallen, deren eine Ecke der Punkt $\boldsymbol{x}$ ist, für welche $I_k \to \boldsymbol{x}$, $\alpha - \frac{1}{2n} < \frac{\sigma(I_k)}{|I_k|} < \alpha + \frac{1}{2n}$ für jedes k und $\liminf_{k\to\infty} r(I_k) \geqq \gamma$ ist. Wir können annehmen, daß $I_k = \langle \boldsymbol{y}_k; \boldsymbol{x} \rangle$ für jedes k ist. Es sei $c = \sqrt[l]{\frac{2n\alpha + 1}{2n\alpha + 2}}$, $\boldsymbol{w}_k = c\boldsymbol{y}_k + (1-c)\boldsymbol{x}$ und $J_k = \langle \boldsymbol{y}_k; \boldsymbol{w}_k \rangle$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Es sei $I \in J(J_k; \boldsymbol{x})$. Dann ist $\frac{\sigma(I)}{|I|} \leqq \frac{\sigma(I_k)}{|I|} \leqq \frac{\sigma(I_k)}{c^j |I_k|} < \frac{\alpha + \frac{1}{2n}}{c^j} = \alpha + \frac{1}{n}$. Da $\liminf_{k \to \infty} r(\langle w_k; \boldsymbol{x} \rangle) = \liminf_{k \to \infty} r(I_k) \geqq \gamma$ ist, muß ein Index N_1 so existieren, daß $\frac{\sigma(\langle w_k; \boldsymbol{x} \rangle)}{|\langle w_k; \boldsymbol{x} \rangle|} > \alpha - \frac{1}{2n}$ für $n \geqq N_1$ gilt. Daraus folgt, daß $\alpha - \frac{1}{n} < c^j\left(\alpha - \frac{1}{2n}\right) \leqq$ $\leqq \frac{\sigma(\langle w_k; \boldsymbol{x} \rangle)}{c^{-j} |\langle w_k; \boldsymbol{x} \rangle|} \leqq \frac{\sigma(I)}{c^{-j} |\langle w_k; \boldsymbol{x} \rangle|} = \frac{\sigma(I)}{|I_k|} \leqq \frac{\sigma(I)}{|I|}$ ist. Es sei $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_j)$, $\boldsymbol{y}_k = (y_{k,1}, \ldots, y_{k,j})$ und $l_k = \max\{x_i - y_{k,i}: i = 1, 2, \ldots, j\}$. Dann gilt $r(I) \geqq \frac{|I|}{l_k^j} = \frac{|I|}{|I_k|} \frac{|I_k|}{l_k^j} =$ $= \frac{|I|}{|I_k|} r(I_k) \geqq \frac{|\langle w_k; \boldsymbol{x} \rangle|}{|I_k|} r(I_k) = c^j\, r(I_k) \geqq \frac{1}{2} r(I_k)$.

Da $2\delta < \gamma$ ist, muß eine solche natürliche Zahl N existieren, die größer als N_1 ist und für welche $r(I_k) \geqq 2\delta$ für $k \geqq N$ ist. Nehmen wir jetzt die Folgen $\{I_k\}_{k=N}^{\infty}$ und $\{J_k\}_{k=N}^{\infty}$. Dann gilt: $I_k \to \boldsymbol{x}$, $\frac{\sigma(I_k)}{|I_k|} \in V_n(\alpha)$, $r(I_k) \geqq 2\delta > \delta$ für jedes $k \geqq N$, $r(I) \geqq \frac{1}{2} r(I_k)$ für jedes $I \in J(J_k; \boldsymbol{x})$, $J(J_k; \boldsymbol{x}) \subset J(I_k; \boldsymbol{x}; V_n(\alpha))$ für jedes $k \geqq N$ und $\limsup_{k \to \infty} \frac{|J_k|}{|I_k|} = (1-c)^j > 0$.

Daraus wird leicht gesehen, daß $\alpha \in \mathscr{D}_\gamma^\circ \sigma(\boldsymbol{x})$ ist.

Es sei $\hat{\mathrm{D}}_\gamma \sigma(\boldsymbol{x}) = \infty$. Es sei $U_n(\alpha) = (2n, \infty\rangle$ und $V_n(\alpha) = (n, \infty\rangle$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dann muß eine solche Folge $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ von Intervallen mit einer Ecke $\boldsymbol{x}$ existieren, für welche $Y_k \to \boldsymbol{x}$, $\liminf_{k \to \infty} r(Y_k) \geqq \gamma$ und $\frac{\sigma(Y_k)}{|Y_k|} > 2n$ für jedes k ist. Wir können annehmen, daß $Y_k = \langle \boldsymbol{y}_k; \boldsymbol{x} \rangle$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$ ist.

Es sei $c = \sqrt[j]{2}$, $w_k = c\boldsymbol{y}_k + (1-c)\boldsymbol{x}$ und $J_k = \langle w_k; \boldsymbol{y}_k \rangle$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$. Wir setzen $I_k = \langle w_k; \boldsymbol{x} \rangle$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$. Dann gilt $|I_k| = c^j |Y_k|$ und $r(I_k) = r(Y_k)$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$ und $\limsup_{k \to \infty} \frac{|J_k|}{|I_k|} = \left(1 - \frac{1}{c}\right)^j > 0$.

Es sei $I \in J(J_k; \boldsymbol{x})$. Es sei $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_j)$, $w_k = (w_{k,1}, \ldots, w_{k,j})$ und $l_k =$ $= \max\{x_i - w_{k,i}: i = 1, 2, \ldots, j\}$. Dann gilt $n = c^{-j}\, 2n < \frac{\sigma(Y_k)}{c^j |Y_k|} \leqq \frac{\sigma(I)}{|I_k|} \leqq \frac{\sigma(I)}{|I|}$ und $r(I) = \frac{|I|}{l_k^j} = \frac{|I|}{|I_k|} \frac{|I_k|}{l_k^j} \geqq \frac{|\langle \boldsymbol{y}_k; \boldsymbol{x} \rangle|}{|I_k|} r(I_k) = c^{-j}\, r(I_k) = \frac{1}{2} r(I_k)$.

Da $2\delta < \gamma$ ist, existiert eine solche natürliche Zahl N, daß $r(I_k) \geqq 2\delta$ für $k \geqq N$ ist. Jetzt können wir schon leicht ableiten, daß $\hat{\mathrm{D}}_\gamma \sigma(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{D}_\delta^\circ \sigma(\boldsymbol{x})$ ist.

Es sei $0 < \alpha = \hat{\mathrm{D}}_\gamma \sigma(\boldsymbol{x}) < \infty$. Es sei n solche natürliche Zahl, daß $0 < \alpha - \frac{3}{2n}$ ist. Es sei $U_n(\alpha)=\left(\alpha-\frac{1}{2n},\ \alpha+\frac{1}{2n}\right)$ und $V_n(\alpha)=\left(\alpha-\frac{1}{n},\ \alpha+\frac{1}{n}\right)$. Dann existiert eine solche Folge $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ von Intervallen, deren eine Ecke der Punkt $\boldsymbol{x}$ ist und für welche $Y_k\to\boldsymbol{x}$, $\liminf_{k\to\infty} r(Y_k)\geqq\gamma$ und $\frac{\sigma(Y_k)}{|Y_k|}\in U_n(\alpha)$ für jedes k ist. Wir können annehmen, daß $Y_k=\langle y_k;\boldsymbol{x}\rangle$ ist.

Es sei $c=\sqrt[i]{\frac{2n\alpha-1}{2n\alpha-2}}$, $w_k=cy_k+(1-c)\boldsymbol{x}$ und $J_k=\langle w_k;y_k\rangle$ für $k=1,2,3,\ldots$. Wir sezten $I_k=\langle w_k;\boldsymbol{x}\rangle$ für $k=1,2,3,\ldots$. Dann gilt $|I_k|=c^i|Y_k|$ und $r(I_k)=$ $=r(Y_k)$ für $k=1,2,3,\ldots$ und $\limsup_{k\to\infty}\frac{|J_k|}{|I_k|}=\left(1-\frac{1}{c}\right)^i>0$.

Es sei $I\in J(J_k;\boldsymbol{x})$. Dann gilt $\alpha-\frac{1}{n}=c^i\left(\alpha-\frac{1}{2n}\right)<c^i\frac{\sigma(Y_k)}{|Y_k|}=\frac{\sigma(Y_k)}{|I_k|}\leqq$ $\leqq\frac{\sigma(I)}{|I|}$ und $r(I)\geqq c^{-i}r(I_k)=\frac{1}{2}r(I_k)$.

Wir können schon leicht ableiten, daß $\alpha\in\hat{\mathscr{D}}^{\circ}_{\delta}\sigma(\boldsymbol{x})$ ist.

Wenn $\hat{\underline{\mathrm{D}}}_{\gamma}\sigma(\boldsymbol{x})=\infty$ ist, dann gilt $\hat{\underline{\mathrm{D}}}_{\gamma}\sigma(\boldsymbol{x})=\hat{\overline{\mathrm{D}}}_{\gamma}\sigma(\boldsymbol{x})\in\hat{\mathscr{D}}^{\circ}_{\delta}\sigma(\boldsymbol{x})$. Wenn $\hat{\overline{\mathrm{D}}}_{\gamma}\sigma(\boldsymbol{x})=0$ ist, dann gilt $\hat{\underline{\mathrm{D}}}_{\gamma}\sigma(\boldsymbol{x})=\hat{\overline{\mathrm{D}}}_{\gamma}\sigma(\boldsymbol{x})\in\hat{\mathscr{D}}^{\circ}_{\delta}\sigma(\boldsymbol{x})$.

Folgerung 2. *Es sei σ eine nichtnegative nichtfallende Funktion vom Intervall. Dann $\hat{\underline{\mathrm{D}}}_0\sigma(\boldsymbol{x})$, $\hat{\overline{\mathrm{D}}}_0\sigma(\boldsymbol{x})\in\hat{\mathscr{D}}^{\circ}_0\sigma(\boldsymbol{x})$.*

Folgerung 3. *Es sei σ eine nichtnegative nichtfallende Funktion vom Intervall. Es sei $0<\gamma\leqq 1$ und $\delta<\frac{1}{2}\gamma$. Wenn die Menge $\hat{\mathscr{D}}^{\circ}_{\delta}\sigma(\boldsymbol{x})$ nur ein Element enthält, dann gilt $\hat{\underline{\mathrm{D}}}_{\gamma}\sigma(\boldsymbol{x})=\hat{\overline{\mathrm{D}}}_{\gamma}\sigma(\boldsymbol{x})$.*

Es ist ein Problem, ob für jede nichtnegative nichtfallende Funktion σ vom Intervall zu jedem $0<\gamma\leqq 1$ ein positives δ so existiert, daß $\hat{\mathscr{D}}_{\gamma}\sigma(\boldsymbol{x})\subset\hat{\mathscr{D}}^{\circ}_{\delta}\sigma(\boldsymbol{x})$ gilt.

LITERATUR

[1] KHINTCHINE, A.: Recherches sur la structure des fonctions mesurables. Fund. Math. 9, 1927, 212—279.

[2] MIŠÍK, L.: Über einen Satz von Khintchine. Mat. Čas. 22, 1972, 243—252.

[3] MIŠÍK, L.: Über einen Satz von Khintchine II. Mat. Čas. 24, 1974, 145—154.

[4] MIŠÍK, L.: Über approximative derivierte Zahlen. Czech. Math. J. 25 (100), 1975, 154—159.

[5] MIŠÍK, L.: Über approximative derivierte Zahlen monotoner Funktionen, Czech. Math. J. 26, (101), 1976, 579—583.

[6] SAKS, S.: Theory of the Integral. Warszawa—Lwów 1937.

Received December 19, 1975

Matematický ústav SAV
Obrancov mieru 49
886 25 Bratislava

ТЕОРЕМЫ ХИНЧИНОВА ТИПА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА

Ладислав Мишик

Резюме

В этой работе доказывается несколько теорем Хинчинова типа об экстремных производных или о множестве производных чисел функций множества и особенно функций интервала.