Helmut Jürgensen

Fastideale in vollständig O-einfachen Halbgruppen

Mathematica Slovaca, Vol. 26 (1976), No. 2, 73--76

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136110

MATHEMATICA SLOVACA

VOLUME 26 1976 NUMBER 2

FASTIDEALE IN VOLLSTÄNDIG 0-EINFACHEN HALBGRUPPEN

HELMUT JÜRGENSEN

In [3, 4] behandelte Verbeek die Grundlagen einer Erweiterungstheorie für Halbgruppen und definierte und untersuchte insbesondere die Vereinigungserweiterungen, die sich in sehr natürlicher Weise als Verallgemeinerung der Idealerweiterungen ergeben. Es liegt nahe zu fragen, wie weit sich diese Ideen dazu verwenden lassen, den Einfachheitsbegriff für Halbgruppen so zu modifizieren, daß die Klasse der „einfachen" Halbgruppen wesentlich verkleinert wird. Zu diesem Zweck haben wir in [2] den Begriff des Fastideals eingeführt. Fastideale bestimmen gerade — analog zur Funktion der Ideale bei der Rees Faktorisierung — die zu den Vereinigungserweiterungen gehörigen Homomorphismen. In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir, unter welchen Bedingungen vollständig [0]-einfache Halbgruppen echte Fastideale besitzen können. Es zeigt sich, daß dies nur unter sehr restriktiven Voraussetzungen möglich ist. Man kann dieses Ergebnis z. B. im endlichen Falle so interpretieren, daß sich nur selten eine einfache oder 0-einfache Halbgruppe als echte Vereinigungserweiterung gewinnen läßt; fast jede endliche [0]-einfache Halbgruppe (d. h. ohne Ideale) ist auch fasteinfach (d. h. ohne Fastideale).

Wir setzen die Terminologie, Ergebnisse und teilweise auch die Notation von [1] voraus und wollen nur die aus [2, 3, 4] benötigten Begriffe einführen:

1. Definition [3, 4]. *A, S, E seien Halbgruppen, i ein idempotentes Element von S. E heißt Vereinigungserweiterung von A mit S bezüglich i, wenn E einer Halbgruppe E' mit Multiplikation $+$ isomorph ist, für die gilt:*

(1) $E' = A \cup (S \setminus i)$,

(2) $\forall a, b \in A, \forall s, t \in S \setminus i$:

$$a + b = ab \qquad s + t \begin{cases} = st, & \text{falls } st \neq i, \\ \in A, & \text{falls } st = i, \end{cases}$$

$$a + s \begin{cases} = is, & \text{falls } is \neq i, \\ \in A, & \text{falls } is = i, \end{cases} \qquad s + a \begin{cases} = si, & \text{falls } si \neq i, \\ \in A, & \text{falls } si = i. \end{cases}$$

2. Definition [2]. *E sei eine Halbgruppe, $A \subseteq E$. A heißt Rechtsfastideal (Linksfastideal), falls gilt:*

(1) *A ist Unterhalbgruppe von E.*

(2) *Für alle $e \in E \setminus A$ ist $Ae \subseteq A$ oder $|Ae| = 1$*
($eA \subseteq A$ oder $|eA| = 1$).

A heißt Fastideal, falls A Rechtsfastideal und Linksfastideal ist.
Es gilt

3. Satz [2]. *E ist genau dann Vereinigungserweiterung von A mit S bezüglich i, wenn E ein zu A isomorphes Fastideal A' besitzt und es einen Homomorphismus f von E auf S gibt, so daß $f|_{E \setminus A'}$ bijektiv und $A'f = i$ ist.*

In Analogie zur Reesfaktorisierung nach Idealen kann man also die Faktorisierung nach Fastidealen folgendermaßen einführen: Falls E Halbgruppe und A Fastideal von E ist, sei $E \backslash A :— (E \setminus A) \cup i$ mit der Multiplikation

$$i + i = i \qquad\qquad x + y = \begin{cases} i, & \text{falls } xy \in A, \\ xy, & \text{falls } xy \notin A, \end{cases}$$

$$i + x = \begin{cases} i, & \text{falls } Ax \subseteq A, \\ z, & \text{falls } z \in Ax \nsubseteq A, \end{cases} \qquad x + i = \begin{cases} i, & \text{falls } xA \subseteq A, \\ z, & \text{falls } z \in xA \nsubseteq A, \end{cases}$$

für alle $x, y \in E \setminus A$. Mit leichten Modifikationen gelten die üblichen Isomorphiesätze [2].

Mit dem folgenden Satz charakterisieren wir die Fastideale in vollständig 0-einfachen Halbgruppen.

4. Satz. *S sei eine vollständig 0-einfache Halbgruppe, U eine Teilmenge von S U ist genau dann ein Fastideal von S, wenn eine der folgenden Aussagen erfüllt ist:*

(1) *U ist triviale Untergruppe.*
(2) *$U = S$.*
(3) *S ist nullteilerfrei, $U = S \setminus 0$.*
(4) *$S \setminus 0$ ist Links-0-Halbgruppe, $U \subseteq S \setminus 0$.*
(5) *$S \setminus 0$ ist Rechts-0-Halbgruppe, $U \subseteq S \setminus 0$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß die Bedingungen jeweils hinreichen Für (1) und (2) ist das trivial. Für (3) ist $S \setminus U = 0$ und $|0U \quad 1 \quad U0$, also U Fastideal. Aus (4) folgt $sU \quad s$ für alle $s \in S$ und $U(S \setminus 0) \subseteq U$; damit ist U Fastideal. (5) ergibt sich dual.

Zum Beweis, daß die Bedingungen notwendig sind, sei $U| \neq 1$ und $U \quad S$ vorausgesetzt. Dann gilt einer der folgenden Fälle:

(i) $0 \in U$.
(ii) $0 \notin U$, $SU \cup US \subseteq U \cup 0$.

(iii) $0 \notin U$, $US \subseteq U \cup 0$, $\exists s \in S \setminus U$: $sU \nsubseteq U \wedge sU \neq 0$.
(iv) $0 \notin U$, $SU \subseteq U \cup 0$, $\exists s \in S \setminus U$: $Us \nsubseteq U \wedge Us \neq 0$.
(v) $0 \notin U$, $\exists s \in S \setminus U$: $sU \nsubseteq U \wedge sU \neq 0$,
$\exists t \in S \setminus U$: $Ut \nsubseteq U \wedge Ut \neq 0$.

Wir behandeln die Fälle der Reihe nach:
(i) Sei $s \in S \setminus U$. Dann ist $0 = s0 \in sU \cap U$, also $sU \subseteq U$. Daher ist U Linksideal. Mit der dualen Aussage folgt, daß U Ideal ist. Daher muß $U = 0$ oder $U = S$ im Widerspruch zu den Voraussetzungen gelten. (i) ist also nicht möglich.
(ii) $U \cup 0$ ist Ideal von S. Wegen $U \neq 0$ muß $S = U \cup 0$ gelten. Wegen $U \neq S$ ist $U = S \setminus 0$. Da U Unterhalbgruppe ist, ist S nullteilerfrei, also U einfach. Es folgt (3).
Für die restlichen Fälle benötigen wir

5. Lemma. *S sei eine vollständig 0-einfache Halbgruppe, U eine Unterhalbgruppe mit $0 \notin U$. Für ein $s \in S$ gelte $|sU| = 1$ und $sU \neq 0$. Dann ist U idempotent und liegt ganz in einer $\mathscr{L}$-Klasse von S.*

Beweis: Für $x \in U$ gilt wegen $sU \neq 0$: $sx \in R_s \cap L_x$. Wegen $|sU| = 1$ folgt $U \subseteq L_x$. Die Abbildung $x \mapsto sx$ ist eine Bijektion von R_x auf $R_{sx} = R_s$, die die $\mathscr{L}$-Klassen erhält. Für $y \in S$ muß also $|U \cap H_y| \leqslant 1$ gelten. Sei $U \cap H_y \neq \emptyset$. Falls $H_y^2 = 0$ ist, folgt aus $U^2 \subseteq U$, daß im Widerspruch zur Voraussetzung $0 \in U$ gilt. Es muß also $H_y^2 = H_y$, d. h. H_y Gruppe sein. Wegen $U^2 \subseteq U$ folgt dann $U \cap H_y = \{1_{H_y}\}$. U ist also idempotent.
Fortsetzung des Beweises von Satz 4:
(iii) U ist wegen Lemma 5 idempotent und liegt ganz in einer $\mathscr{L}$-Klasse von S. Sei $x \in U$. Für die $\mathscr{H}$-Klasse H_x gilt dann $H_x \subseteq UH_x \subseteq US \subseteq U \cup 0$. Wegen $0 \notin H_x$ folgt $H_x \subseteq U$, also $|H_x| = 1$; sämtliche $\mathscr{H}$-Klassen von S sind daher einelementig. Sei $s \in S \setminus 0$ und $R_s = R_x$. Dann liegt in $R_s \cap L_x = H_x$ ein idempotentes Element, nämlich x, und daher ist $xs \in R_x \cap L_s = H_s \neq H_0$, also $xs = s$. Wegen $US \subseteq U \cup 0$ folgt $s = xs \in U$, damit $U \subseteq L_s$. S kann also nur die $\mathscr{L}$-Klassen $L_x = S \setminus 0$ und $L_0 = 0$ besitzen. S ist daher links-0-einfach; dann ist L_x linkseinfache Unterhalbgruppe und alle Elemente von L_x sind idempotent. Es folgt (4).
(iv) Dual zu (iii) folgt (5).
(v) Nach Lemma 5 liegt U ganz in einer $\mathscr{L}$-Klasse, nach dem Dualen ganz in einer $\mathscr{R}$-Klasse von S, also ganz in einer $\mathscr{H}$-Klasse. Da U idempotent ist, folgt $|U| = 1$, was nach Voraussetzung nicht möglich ist.

6. Korollar. *S sei eine vollständig einfache Halbgruppe, U eine Teilmenge von S. U ist genau dann ein Fastideal von S, wenn eine der folgenden Aussagen erfüllt ist:*

(1) *U ist triviale Untergruppe.*
(2) $U = S$.
(3) *S ist Links-0-Halbgruppe.*
(4) *S ist Rechts-0-Halbgruppe.*

LITERATUR

[1] CLIFFORD, A. H., und G. B. PRESTON: The Algebraic Theory of Semigroups. AMS, Mathematical Surveys 7, Vol 1. Providence, 1964 (2. Aufl.).
[2] JÜRGENSEN, H.: Fastideale von Halbgruppen. Semigroup Forum 9, 1974, 261—270.
[3] VERBEEK, L. A. M.: Union Extensions of Semigroups. Trans. AMS 150, 1970, 409—423.
[4] VERBEEK, L. A. M.: Semigroup Extensions. Dissertation, Delft, 1968.

Eingegangen am 22. 2. 1974

Mathematisches Seminar
der Universität Kiel
Olshausenst . 40—60
D — 2300 Kiel 1