Mathematica Slovaca

Edmund Hlawka

Pythagoräische Tripel: Gleichverteilung und geometrische Anwendungen. II.

Mathematica Slovaca, Vol. 55 (2005), No. 1, 47--129

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/133897

Math. Slovaca, **55** (2005), No. 1, 47–129

Mathematica Slovaca

PYTHAGORÄISCHE TRIPEL: GLEICHVERTEILUNG UND GEOMETRISCHE ANWENDUNGEN (2. TEIL)

EDMUND HLAWKA

(Communicated by Karol Nemoga)

ABSTRACT. The first part of this article appeared in [Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis **11** (2003), 29–72]. In this earlier paper the author continued his investigations on Pythagoreian triples, uniform distribution and applications which he already started in [Bonner Math. Schriften 121, Univ. Bonn, Bonn, 1980] and in [Aequationes Math. 58 (1999)]. In the first part of this paper the author focuses on the construction of Pythagoreian triples by means of prime numbers in the Gaussian number field and various geometric applications. In the first three sections of part I applications to line geometry and to spherical trigonometry are discussed. Sections 4–6 are devoted to rotations in the three dimensional space. The present second part is not self-content, it makes use of the notation and results of the first part. It starts with Section 7, which is devoted to the orthogonal group in higher dimensions. Section 8 gives applications to non Euclidean geometry and in Section 9 Clifford's surface is discussed. In Section 10 Gödel's cosmological model is considered. In Sections 11 and 12 applications to a probabilistic model and to infinite series are discussed. The paper ends with several remarks on solitons, Doppler's phenomenon and aberration and on extensions of the theory to quaternions and imaginary quadratic number fields.

§7

Im ersten Teil der Arbeit haben wir Drehungen im dreidimensionalen Raum betrachtet. Wir wollen im folgenden einen Blick auf den höherdimensionalen Fall werfen. Jede orthogonale Matrix O läßt sich durch passende Transformation TOT^{-1} (T orthogonal) auf Normalform O_1 bringen: Ist n die betreffende Dimension des zugrundeliegenden euklidischen Raumes gerade ($n = 2s$), so

2000 Mathematics Subject Classification: 11K06.
Keywords: Pythagoreian triples, uniform distribution, discrepancy.

wird, wenn die Determinante $\operatorname{Det} O = 1$ ist,

$$O_1 = \begin{bmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_s \end{bmatrix}, \tag{1}$$

wo D_j von der Gestalt

$$\begin{bmatrix} \cos 2\pi\vartheta_j & \sin 2\pi\vartheta_j \\ -\sin 2\pi\vartheta_j & \cos 2\pi\vartheta_j \end{bmatrix} \tag{2}$$

ist. Ist aber n ungerade ($n = 2s + 1$), dann ist sie von der Gestalt

$$O_1 = \begin{bmatrix} D_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & D_s & \\ & & & e \end{bmatrix}, \tag{3}$$

wo $e = 1$ ist.

Ist $\operatorname{Det} O_1 = -1$ und $n = 2s + 2$, so gilt wieder (3) mit

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Für $n = 2s+1$ ist aber wieder $e = -1$. Wir nehmen nun s geeignete Primzahlen $p_1, \ldots, p_s$ und die zugehörigen $\pi_1, \ldots, \pi_s$ und setzen in gewohnter Weise für $j = 1, \ldots, s$

$$X(\pi_j) = \frac{A_j^2 - B_j^2}{A_j^2 + B_j^2} = \cos 2\pi\vartheta_j\,, \tag{4}$$

$$Y(\pi_j) = \frac{2A_j B_j}{A_j^2 + B_j^2} = \sin 2\pi\vartheta_j\,. \tag{4'}$$

Man erhält weitere Drehungen, wenn man Potenzen $\pi_j^{l_j}$ nimmt, wo l_j eine ganze Zahl ist für $j = 1, \ldots, s$ ist.

Wir können aber auch die Gestalt der Drehungen, welche wir für $n = 2$ in §4 entwickelt haben, heranziehen:

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\,, \tag{4''}$$

wo $\alpha = A + \mathrm{i}B = \bar{\delta}$ und $\beta = C + \mathrm{i}D = \bar{\gamma}$.

Wir wollen dann die Transformation in homogener Form schreiben, indem wir

$$z = \frac{z_1}{z_2}\,, \qquad w = \frac{w_1}{w_2} \tag{5}$$

setzen: Es ist dann

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha z_1 + \beta z_2 , \\ w_2 &= \gamma z_1 + \gamma z_2 . \end{aligned} \tag{6}$$

Wir haben damals für die Größen A, B, C, D folgende Darstellung gegeben (vgl. §4 (30) (34)):

$$\begin{aligned} A &= \cos \frac{\vartheta}{2} , \\ B &= \sin \frac{\vartheta}{2} \zeta_0 = \sqrt{1-A^2}\zeta_0 , \\ C &= \sin \frac{\vartheta}{2} \eta_0 = \sqrt{1-A^2}\eta_0 , \\ D &= -\sin \frac{\vartheta}{2} \xi_0 = -\sqrt{1-A^2}\xi_0 . \end{aligned}$$

Es war (ζ_0, η_0, ξ_0) bzw. $(-\zeta_0, -\eta_0, -\xi_0)$ der Drehvektor und ϑ bzw. $\pi - \vartheta$ der Drehwinkel. Wir können dann, wenn $n = 2s$ für die Drehung O die Darstellung geben

$$O_1 = \begin{bmatrix} \Phi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Phi_s \end{bmatrix} , \tag{7}$$

wobei

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \gamma_j & \delta_j \end{bmatrix} \tag{8}$$

und

$$\begin{aligned} \alpha_j &= A_j + \mathrm{i}B_j , \qquad & \bar{\gamma}_j &= -\beta_j , \\ \beta_j &= C_j + \mathrm{i}D_j , \qquad & \bar{\delta}_j &= \alpha_j \end{aligned} \tag{9}$$

und

$$|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2 = A_j^2 + B_j^2 + C_j^2 + D_j^2 = 1 \tag{10}$$

für $j = 1, \ldots, s$.

Wir nehmen wieder geeignete Primzahlen, die wir in drei Gattungen einteilen: $p_1, \ldots, p_s$, $p'_1, \ldots, p'_s$, $p''_1, \ldots, p''_s$ mit den zugehörigen $\pi_1, \ldots, \pi_s$, $\pi'_1, \ldots, \pi'_s$, $\pi''_1, \ldots, \pi''_s$.

Wir konstruieren die $A_1, \ldots, A_s$ mit Hilfe der π_j

$$A_j = X(\pi_j) = \cos \frac{\vartheta_j}{2} , \qquad \sqrt{1 - A_j^2} = Y(\pi_j) = \sin \frac{\vartheta_j}{2} . \tag{11}$$

Dann konstruieren wir uns mit Hilfe der π'_j

$$u_j = X(\pi'_j) , \qquad v_j = Y(\pi'_j) \tag{12}$$

und mit Hilfe der π_j''

$$u_j' = X(\pi_j''), \qquad v_j' = Y(\pi_j''). \tag{13}$$

Dann berechnen wir den Drehvektor

$$(\zeta_{0j}, \eta_{0j}, \xi_{0j}), \tag{14}$$

$$\zeta_{0j} = \varepsilon_j u_j';$$

$$\eta_{0j} = v_j v_j', \tag{15}$$

$$\xi_{0j} = u_j v_j'. \tag{16}$$

Dies ist gerade die Darstellung der Sphäre (10), (10′), (10″) in §1, aber jetzt in der Reihenfolge (z, y, x).

Die u_j, v_j sind von der Gestalt

$$uj = \frac{U_j^2 - V_j^2}{U_j^2 + V_j^2}, \qquad v_j = \frac{2U_j V_j}{U_j^2 + V_j^2}. \tag{17}$$

Das sind Größen, die wir früher mit a, b bzw. A, B, usw. bezeichnet haben. Die u_j', v_j' entstehen aus den u_j, v_j, indem wir U_j', V_j' statt U_j, V_j schreiben.

Wir erhalten die B, C, D in der Form

$$(B_j, C_j, D_j) = \sqrt{1 - A_j^2}(\zeta_{0j}, \eta_{0j}, -\xi_{0j}). \tag{18}$$

Bei dieser Konstruktion sind die Vorzeichen ε_j noch willkürlich wählbar. Wir haben 2^s Möglichkeiten. Will man sie wieder konstruieren, so nimmt man weitere s geeignete Primzahlen $p_1^{(3)}, \ldots, p_s^{(3)}$ mit den zugehörigen $\pi_1^{(3)}, \ldots, \pi_s^{(3)}$. Wir betrachten s Teilintervalle $J_j = \langle 0, a_j \rangle$ des Einheitsintervalls (man kann z.B. wieder $a_j = \frac{1}{2}$ nehmen). Ist χ_j die Indikatorfunktion von J_j für $j = 1, \ldots, s$, betrachtet man für ganzzahliges $l = 1, 2, \ldots$

$$\varepsilon_j = 1 - 2\chi_j(\{l\sigma\}) \tag{19}$$

($\{\alpha\}$ = Bruchteil von α: $\alpha - [\alpha]$), wobei

$$e^{i\pi\sigma_j} = \frac{\pi_j^{(3)}}{\overline{\pi}_j^{(3)}}. \tag{20}$$

Es ist ja die Folge $(l\sigma_j)$ gleichverteilt modulo 1 in E^s.

Man kann die Konstruktion noch verallgemeinern, indem man in den Gattungen der Primzahlen (es sind jetzt im ganzen vier) vier Gattungen von ganzen Zahlen $(l_1^{(3)}, \ldots, l_s^{(3)})$ $k = 1, 2, 3, 4$ zugrundelegt und die $\pi_j^{(k)}$ zur Potenz $l_j^{(k)}$ erhebt.

Werfen wir noch einen Blick auf die unitären Transformationen U, die auf Diagonalform gebracht, die Darstellung

$$U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \bar{\lambda}_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_s & \\ & & & & \bar{\lambda}_s \end{bmatrix}, \tag{21}$$

haben, wobei die λ_j vom Betrag Eins sind ($\bar{\lambda}_j$ ist die Konjugierte zu λ_j).

Nehmen wir wieder s geeignete Primzahlen $p_1, \ldots, p_s$ mit den zugehörigen $\pi_1, \ldots, \pi_s$, dann schreiben wir für $j = 1, \ldots, s$

$$\lambda_j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\vartheta_j} = \frac{\pi_j}{\bar{\pi}_j} \tag{22}$$

bzw. allgemein

$$\lambda_j^{(k)} = \left(\frac{\pi_j}{\bar{\pi}_j}\right)^{l_{j,k}}, \tag{23}$$

wo $l_{j,k}$ wieder ganze Zahlen sind.

Wir haben dann die Darstellung

$$\lambda_j^{(k)} = X\left(\pi_j^{l_{j,k}}\right) + \mathrm{i}Y\left(\pi_j^{l_{j,k}}\right). \tag{24}$$

Führt man nach Olga Taussky Todd eine passende Transformation aus (vgl. [TAU02], die allerdings $\sqrt{2}$ enthält), so kommen die X bzw. Y direkt ins Spiel.

Wir führen dies nicht näher aus und bemerken noch, daß wir durch *unsere* Konstruktion auch Hermitsche Matrizen H in der Form

$$H = \frac{U - E}{U + E} \tag{25}$$

erhalten können, und zwar in Diagonalform. Die auftretenden Koeffizienten sind von der Form $\operatorname{ctg} \pi\vartheta_j$ bzw. $\operatorname{ctg} \pi l_{j,k}\vartheta_j$. Es wird

$$\operatorname{ctg} \pi\vartheta_j = \frac{X\left(\pi_j^{l_{j,k}}\right)}{Y\left(\pi_j^{l_{j,k}}\right)} \tag{26}$$

und es ist nach dem Satz von Scherrer-Hadwiger der Nenner stets ungleich Null.

Wollen wir in O alle Drehwinkel in Erscheinung bringen, so brauchen wir $\frac{1}{2}n(n-1)$ Drehungen $D_i(\vartheta_{kj})$, wo i die Zeile bedeutet und (k, j) alle Paare mit $k > j$ sind. Dabei durchläuft j die Zahlen $i = 0, 1, \ldots, n-2$ und $k = 1, \ldots, n-1$. Zur ganzen Darstellung verweisen wir auf die berühmte Arbeit von A. Hurwitz [HUR01; S. 546 564], vergleiche auch [HUR02].

Bei der zweiten Darstellung, wobei wir die Matrizen $E(\rho, \alpha, \beta)$ benützen, benötigt man $3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 - 1$ Parameter ρ, α, β. Auch hier sei wieder auf die Darstellung bei Hurwitz verwiesen. Bemerkenswert ist, daß man die Parameter auf den Quader Q: $0 \leq \rho < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, $0 \leq \beta < 2\pi$ einschränken kann. Man kann dann gleichverteilte Folgen in Q betrachten verteilt mit einer Dichte ρ, welche das Volumselement in Q ist.

Hurwitz hat mit Hilfe dieses Maßes Invarianten zur orthogonalen Gruppe konstruiert. Nimmt man eine gleichverteilte Folge zu dieser Dichte, so kann man damit solche Invarianten approximieren. Betrachten wir ρ, α, β im Komplexen, so kommt man zu den Invarianten der unitären Gruppe. Mit Hilfe des "unitären Tricks", den Hurwitz erfunden hat, kommt man zur linearen Gruppe, die ja auch in der Geometrie der Zahlen eine wichtige Rolle spielt.

So kommt man – ein alter Traum des Verfassers zu einer Verbindung der beiden Gebiete. Für den Fall $n = 2$ liegen hier alle Hilfsmittel vor.

Kehren wir zur Transformation (7) zurück. Betrachten wir nun zwei Drehungen mit verschiedenen Drehvektoren $r_1 = (\zeta_1, \eta_1, \xi_1)$ und $r_2 = (\zeta_2, \eta_2, \xi_2)$, die sich nicht im Vorzeichen ε unterscheiden. Es sind r_1 und r_2 Vektoren von der Länge 1. Wenn σ der Winkel von r_1 und r_2 ist, so gilt bekanntlich

$$\cos\sigma = r_1 r_2 = \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \xi_1\xi_2 \,.$$

Betrachten wir die A_j, B_j, C_j, D_j definiert in (9), so gilt

$$B_j^2 + C_j^2 + D_j^2 = 1 - A_j^2 < 1 \quad \text{und} \quad \neq 0\,,$$

so finden wir

$$\cos\sigma = \frac{B_1 B_2 + C_1 C_2 + D_1 D_2}{\sqrt{B_1^2 + C_1^2 + D_1^2}\sqrt{B_2^2 + C_2^2 + D_2^2}}\,.$$

Dies führt zu folgender Deutung: Betrachten wir die Vektoren $r = (\zeta, \eta, \xi)$ als Punkte auf der Sphäre, dann können wir σ als Entfernung d der beiden Punkte r_1 und r_2 ansehen

$$d(r_1, r_2) = \arccos r_1 r_2 \,.$$

Betrachten wir die Ebenen $u\xi + v\eta + w\xi = 0$, so können wir als Abstand d von zwei Ebenen $E_1 = (u_1, v_1, w_1)$ und $E_2 = (u_2, v_2, w_2)$, den Winkel der beiden Ebenen

$$d(E_1, E_2) = \arccos \frac{u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}}$$

ansehen. Ein Beispiel sind die (B, C, D).

Wir sprechen von einer sphärischen Geometrie. Identifizieren wir $r = (\zeta, \eta, \xi)$ und $-r = (-\zeta, -\eta, -\xi)$, d.h. erklären wir als Punkte die Paare $(r, -r)$, so wird aus der Sphäre das Modell einer projektiven Ebene, d.h. wir betrachten die

Drehachsen und achten nicht auf den Drehsinn, so erhalten wir bei Beibehaltung der Definitionen vom Abstand der Punkte bzw. Ebenen die elliptische Geometrie.

Wir haben vorher den Kosinus der Winkel σ zwischen zwei Drehachsen durch die zugehörigen Drehvektoren (r_1, v_1) bzw. (r_2, v_2) durch die zugehörigen Größen A, B, C, D ausgedrückt. Wir wollen nun diesen Kosinus $\cos\sigma$ durch die zugehörigen Fixpunkte z_1, z_2 (vgl. §4 (29)) ausdrücken. Es sei $F(w) = 0$ ein quadratische Gleichung, welche z_1, z_2 als Wurzel besitzt, die bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt ist.

Wir setzen $w = \frac{w_1}{w_2}$, dann wird aus $F(w)$ eine homogene Form $F(w_1, w_2)$ und wir können sie schreiben (wenn $z_1 = s + \mathrm{i}t$)

$$F(w_1, w_2) = (s - \mathrm{i}t)w_1^2 + \left(1 - |s|^2 - |t|^2\right)w_1 w_2 + (s - \mathrm{i}t)w_2^2$$

(Man braucht nur

$$(z - z_1)(z - z_2) = (z - z_1)\left(z + \frac{1}{\bar{z}_1}\right)$$

zu bilden, den Nenner $\bar{z}_1$ wegschaffen und dann F homogen machen!).

F. Klein nennt diese Form die diametrale Form zur Drehachse, die der Durchmesser der Einheitssphäre ist. Jedem Durchmesser kann eine solche Form zugeordnet werden. Diese fast vergessene Theorie gestattet viele Anwendungen.

Man kann also den beiden Drehachsen $(r_1, -r_1)$ und $(r_2, -r_2)$ zwei Formen F_1, F_2 zuordnen und unter Benützung von §4 (19), (19′) die Formel für $\cos\sigma$ so schreiben

$$\cos\sigma = \frac{4(s_1 s_2 + t_1 t_2) + \left(1 - (s_1^2 + t_2^2)\right)\left(1 - (s_2^2 + t_2^2)\right)}{(1 + s_1^2 + t_1^2)(1 + s_2^2 + t_2^2)}\,. \qquad (*)$$

Haben wir drei Drehungen, also drei Drehachsen, so haben wir auch drei Formen F_1, F_2, F_3 und damit drei Durchmesser auf der Einheitssphäre. Nun haben mit §4 (19), (19′) die auftretenden Quadratwurzeln zwei Vorzeichen, diese bestimmen also 2^6 sphärische Dreiecke. Man kann zu je zwei Formen, die man aus den drei Formen F_1, F_2, F_3 herausgreifen kann, die Funktionalformen $\frac{\partial(F_i, F_j)}{\partial(w_1, w_2)}$ bilden, die wieder diametrale Formen sind. Wir nennen sie φ_1, φ_2, φ_3. Man kann durch die sechs Formen den sphärischen Dreiecken Δ Winkel der Seiten und Winkel zwischen den Seiten zuordnen und diese mit Hilfe von $(*)$ ausdrücken (vgl. [KLE01; §36, S. 174–177]).

Man kann zwei verschiedenen diametralen Formen F_1, F_2 eine dritte solche Form F_{12} zuordnen. Sind $(r_1, -r_1)$ bzw. $(r_2, -r_2)$ Drehachsen von F_1, F_2, dann bilden wir uns das vektorielle Produkt $r_1 \times r_2$ (vgl. §3).

$$r_{12} = \frac{r_1 \times r_2}{|r_1 \times r_2|}$$

gehört zur Form F_{12}.

Bilden wir also zu den Formen F_1, F_2, F_3 die Formen F_{23}, F_{31}, F_{12}. Die zugehörigen Drehachsen bilden dann die Potenzdreiecke der sphärischen Dreiecke Δ.

Betrachtet man den pythagoräischen Fall §4 (30)–(34′), so kommt man zu den trigonometrischen Formeln, die den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Darstellungen der Drehungen herstellen, wenn man auch §3 berücksichtigt. Man nimmt drei Paare an (p_1, p_2), (p_3, p_4), (p_5, p_6).

Wenden wir auf die Punkte der Sphäre

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

die stereographische Abbildung an (wir haben sie schon in §4 benützt, verwenden jetzt aber andere Buchstaben)

$$X = \frac{\xi}{1+\xi}, \qquad Y = \frac{\eta}{1+\xi}.$$

Verwenden wir wieder die Bezeichnungen u, v, u', v', so erhalten wir

$$\xi = uv', \quad \eta = vv', \quad \xi = \varepsilon u'.$$

Für $\varepsilon = 1$ erhalten wir

$$X = \frac{U_1^2 - V_1^2}{U_1^2 + V_1^2} \cdot \frac{V_2}{U_2}, \qquad Y = \frac{2U_1V_1}{U_1^2 + V_1^2} \cdot \frac{V_2}{U_2},$$

für $\varepsilon = -1$

$$X = \frac{U_1^2 - V_1^2}{U_1^2 + V_1^2} \cdot \frac{U_2}{V_2}, \qquad Y = \frac{2U_1V_1}{U_1^2 + V_1^2} \cdot \frac{U_2}{V_2},$$

also zusammengefaßt

$$X + \mathrm{i}Y = \left(\frac{U_1^2 - V_1^2}{U_1^2 + V_1^2} + \mathrm{i}\,\frac{2U_1V_1}{U_1^2 + V_1^2}\right) W_2,$$

wo

$$W_2 = \frac{1}{2}\left((1+\varepsilon)\frac{V_2}{U_2} + (1-\varepsilon)\frac{U_2}{V_2}\right)$$

ist.

Wir hatten umgekehrt

$$\xi = \frac{2X}{1+X^2+Y^2}, \qquad \eta = \frac{2Y}{1+X^2+Y^2}, \qquad \xi = \varepsilon\frac{1-(X^2+Y^2)}{1+(X^2+Y^2)}. \qquad (\dagger)$$

Wir erhalten

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\zeta^2 = \frac{4\big((\mathrm{d}X)^2 + (\mathrm{d}Y)^2\big)}{(1+X^2+Y^2)^2}$$

als Bogendifferential für die sphärische bzw. elliptische Geometrie, von der wir vorher gesprochen haben.

Dies führt uns nun zur hyperbolischen Geometrie, zur eigentlichen nichteuklidischen Geometrie, kurz NE Geometrie genannt.

Bevor wir dies tun, wollen wir noch die Formel §7 (∗) begründen. Wir benützen dazu §4 (19), (19′) und (29′).

Es wird

$$z_1 + z_2 = z_1 - \frac{1}{\bar{z}_1} = \frac{|z_1|^2 - 1}{\bar{z}_1} = \frac{2B}{\mathrm{i}(-C + \mathrm{i}D)}$$

und

$$z_1 z_2 = -\frac{z_1}{\bar{z}_1} = -\frac{C + \mathrm{i}D}{C - \mathrm{i}D}\,.$$

Daraus folgt sofort

$$1 - z_1 z_2 = \frac{z_1 + \bar{z}_1}{\bar{z}_1} = \frac{2C}{C - \mathrm{i}D}$$

und

$$1 + z_1 z_2 = -\mathrm{i}\,\frac{z_1 - \bar{z}_1}{\bar{z}_1} = -\frac{2D}{\mathrm{i}(C - \mathrm{i}D)}\,.$$

Nun sollte $z_1 = s + \mathrm{i}t$ Sein, daraus folgt sofort für den Vektor

$$v = (B, C, D)\,,$$
$$v = Ew\,,$$

wo w der Vektor

$$\left(1-(s^2+t^2), 2s, 2t\right)$$

ist und E der Faktor $\frac{C-\mathrm{i}D}{\bar{z}_1}$.

Es ist

$$|v|^2 = |E|^2 |w|^2\,.$$

Nun ist

$$|v|^2 = B^2 + C^2 + D^2$$

und

$$|w|^2 = \left(1 - s^2 - t^2\right)^2 + 4st = \left(1 + s^2 + t^2\right)^2\,.$$

Wir erhalten

$$\frac{v}{|v|} = \varepsilon \frac{w}{|w|}\,,$$

wobei $\varepsilon = \pm 1$ ist, also explizit

$$\frac{(B, C, D)}{\sqrt{B^2 + C^2 + D^2}} = \frac{(1-s^2-t^2, 2s, 2t)}{1 + s^2 + t^2}\,.$$

Daraus folgt unmittelbar (*). Wir hätten auch (†) benützen können.

Es liegt nun nahe, auch im höherdimensionalen Fall – sagen wir für $n = 2s$, so die Darstellung §7 (7) – s solche diametrale binäre Formen $F_1, \ldots, F_s$ zu verwenden und das Produkt

$$F = F_1 \cdots F_s$$

zu bilden, welches eine zerlegbare Form vom Grade $2s$ in $2s$ Variablen w ist, und als diametrale Form von O_1 zu betrachten.

§8

Wir legen statt der Sphäre das Hyperboloid

$$H: \; Z^2 - (X^2 + Y^2) = 1 \tag{1}$$

zugrunde. Sind $p_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$, $p_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$ zwei Punkte von H, so definieren wir den Abstand $d(p_1, p_2)$ durch

$$\operatorname{Cos} d = Z_1 Z_2 - (X_1 X_2 + Y_1 Y_2) \tag{2}$$

und als Abstand von zwei Geraden E_1, E_2, gegeben durch

$$u_1 X + v_1 Y + w_1 Z = 0, \qquad u_2 X + v_2 Y + w_2 Z = 0,$$
$$\cos d(E_1, E_2) = \frac{u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}},$$

also wie im elliptischen Fall.

Um rationale Punkte von (1) zu erhalten, nehmen wir wieder zwei geeignete Primzahlen p_1, p_2 mit den zugehörigen $\pi_1 = U_1 + \mathrm{i}V_1$, $\pi_2 = U_2 + \mathrm{i}V_2$ und definieren

$$L_j = \frac{1}{2}\left(\frac{U_j}{V_j} + \frac{V_j}{U_j}\right) \qquad \text{und} \qquad M_j = \frac{1}{2}\left(\frac{U_j}{V_j} - \frac{V_j}{U_j}\right).$$

Wir setzen jetzt (nach Weierstraß) für x, y, z große Buchstaben (W-Koordinaten genannt)

$$\begin{aligned} Z &= L_1 L_2, \\ X &= M_1 L_2, \\ Y &= M_2. \end{aligned}$$

Wir haben dabei benützt, daß

$$L_j^2 - M_j^2 = 1$$

ist. Wir erhalten weitere Punkte, wenn wir ganze Zahlen m_1, m_2 und $\pi_1^{m_1}$, $\pi_2^{m_2}$ zugrundelegen.[1]

Wenden wir wieder stereographische Projektionen

$$x = \frac{X}{1+Z}, \qquad y = \frac{Y}{1+Z}$$

und die Umkehrung an

$$X = \frac{2x}{1-(x^2+y^2)}, \qquad Y = \frac{2y}{1-(x^2+y^2)}, \qquad Z = \frac{1+x^2+y^2}{1-(x^2+y^2)},$$

wo $x^2+y^2<1$ sein muß, so erhalten wir

$$\mathrm{d}s^2 = 4\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{\bigl(1-(x^2+y^2)\bigr)^2}$$

(1. Poincarèsches Modell).

Dabei haben wir Gelegenheit folgende Transformation zu besprechen

$$W(Z) = \frac{(A+\mathrm{i}B)Z+(C-\mathrm{i}D)}{(C+\mathrm{i}D)Z+A-\mathrm{i}B} = \frac{\alpha Z+\beta}{\gamma Z+\delta}, \tag{8.1}$$

wobei $Z = X+\mathrm{i}Y$ und $|Z|<1$ ist,

$$\delta = \bar{\alpha}, \qquad \beta = \bar{\gamma}$$

ist und

$$A^2+B^2-(C^2+D^2) = |\alpha|^2-|\gamma|^2 = \varepsilon \tag{8.2}$$

ist. Dabei ist $\varepsilon = 1$ oder -1.

Man kann den zweiten Fall auf den ersten zurückführen: Definiert man

$$\alpha_0 = -\mathrm{i}\bar{\gamma}, \qquad \beta_0 = -\mathrm{i}\bar{\alpha},$$

so wird

$$W(\bar{Z}) = \frac{\alpha_0\bar{Z}+\bar{\gamma}_0}{\gamma_0\bar{Z}+\delta_0}$$

und

$$|\alpha_0|^2-|\gamma_0|^2 = |\gamma|^2-|\alpha|^2 = 1\,.$$

[1] Die Kreisverwandtschaften (vgl. [PER01])

$$X' = \frac{\sqrt{1-v^2}X}{vZ+1}, \quad Y' = \frac{\sqrt{1-v^2}Y}{vZ+1}, \quad Z' = \frac{Z+v}{vZ+1}$$

erhalten dann rationale Koeffizienten, wenn wir in gewohnter Weise $v = \frac{2AB}{A^2+B^2}$ setzen.

Setzt man dann $\bar{Z} = Z'$, führt also eine "Umklappung" durch, so wird

$$W(Z') = \frac{\alpha_0 Z' + \beta_0}{\gamma_0 Z' + \delta_0}\,.$$

Wir erhalten die gleiche Transformation (8.1), wenn wir (α, γ) durch $(-\alpha, -\gamma)$ ersetzen.

Transformation (8.1) können wir auch anders schreiben: Wenn

$$Z_0 = -\frac{\beta}{\alpha}\,, \qquad e^{i\pi\vartheta} = -\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\,, \tag{8.1'}$$

dann wird $|Z_0| < 1$ und wir erhalten

$$Z' = e^{i\pi\vartheta}\,\frac{Z - Z_0}{Z_0 Z - 1}\,. \tag{8.1''}$$

Wir definieren nun drei Gaußsche Zahlen $U_1 + iV_1$, $U_2 + iV_2$, $U_3 + iV_3$, am besten drei verschiedene Primzahlen π_j bzw. Potenzen davon. Dabei definieren wir

$$a(j) = \frac{U_j^2 - V_j^2}{U_j^2 + V_j^2}\,, \qquad b(j) = \frac{2U_jV_j}{U_j^2 + V_j^2}\,, \tag{8.3}$$

$$c(j) = \frac{1}{2}\left(\frac{U_j}{V_j} + \frac{V_j}{U_j}\right), \qquad d(j) = \frac{1}{2}\left(\frac{U_j}{V_j} - \frac{V_j}{U_j}\right). \tag{8.3'}$$

Es ist stets

$$\big(a(1)\big)^2 + \big(b(1)\big)^2 = 1\,, \qquad \big(c(j)\big)^2 - \big(d(j)\big)^2 = 1\,.$$

Wir definieren die Vektoren

$$(A, B) = \big(a(3), b(3)c(2)\big)\,, \tag{8.4}$$

$$(C, D) = b(3)d(2)\big(a(1), b(1)\big)\,. \tag{8.4'}$$

Für das erste Modell bilden wir uns dann

$$\alpha = a(3) + i b(3)c(2)\,, \tag{8.5}$$

$$\gamma = b(3)d(2)\big(a(1) + i b(1)\big) \tag{8.5'}$$

und es wird

$$|\alpha|^2 - |\gamma|^2 = \big(a(3)\big)^2 + \big(b(3)\big)^2\Big(\big(c(3)\big)^2 - \big(d(3)\big)^2\Big) = 1\,,$$

also gilt (8.2).

Beim zweiten Modell wird

$$a = A + D\,, \qquad b = C + B\,, \tag{8.6}$$
$$c = C - B\,, \qquad d = A - D\,. \tag{8.6'}$$

Das gewünschte Resultat ist

$$ad - bc = A^2 - D^2 - \left(C^2 - B^2\right) = A^2 + B^2 - \left(C^2 + D^2\right) = |\alpha|^2 - |\gamma|^2 = 1\,.$$

Wir können also mit Hilfe der pythagoräischen Tripel unendlich viele rationale Punkte, insbesondere Folgen von solchen Punkten und Geraden, im Inneren des Einheitskreises bzw. in der oberen Halbebene konstruieren.

Die geometrische Bedeutung folgt aus der Identität

$$1 - |W|^2 = \frac{1 - |Z|^2}{|\gamma Z + \delta|^2}\,.$$

Es wird das Innere, das Äußere und der Rand von $|Z| = 1$ auf das Innere, das Äußere und den Rand von $|W| = 1$ respektiv abgebildet.

Wir führen mit Poincaré eine NE-Geometrie ein: Als Gerade bezeichnen wir den Durchschnitt des Einheitskreises mit einem Kreis von der Gestalt

$$-a\left(1 + |Z|^2\right) + (b + \mathrm{i}c)Z + (b - \mathrm{i}c)\bar{Z} = 0$$

wo $a \neq 0$ ist und

$$|b + \mathrm{i}c|^2 > a^2\,,$$

explizit

$$Z = m + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\vartheta}\,,$$

wobei

$$m = \frac{b + \mathrm{i}c}{a}\,, \qquad r = \left(\frac{b^2 + c^2}{a^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Die Spiegelung an der Geraden wird gegeben durch eine linear gebrochene Abbildung $w = A(\bar{Z})$ mit der Matrix

$$A = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{|m|^2 - 1}}\begin{bmatrix} m & -1 \\ 1 & -\bar{m} \end{bmatrix}\,.$$

Wenn $a = 0$ ist, sind es die Geraden

$$(b + \mathrm{i}c)Z + (b - \mathrm{i}c)\bar{Z} = 0$$

durch den Nullpunkt. Die Spiegelung hat jetzt die Form

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta} \end{bmatrix}\,,$$

wo ϑ der Winkel der Geraden mit der x-Achse ist.

Die Winkel zwischen solchen "Geraden" sind die euklidischen Winkel.

Als NE-Bewegungen bezeichnen wir die Transformation (8.1).

Die Fixpunkte in (8.1) werden durch die Gleichung

$$Z_1, Z_2 = \frac{-B\,\mathrm{i} \pm \sqrt{A^2-1}}{2(C+\mathrm{i}D)}$$

bestimmt.

Im Falle $A^2 < 1$ haben wir eine Drehung am Drehpunkt

$$Z_1 = \mathrm{i}\,\frac{-B+\sqrt{1-A^2}}{2(C+\mathrm{i}D)} = \mathrm{i}\,\frac{b_3(1+c_2)}{c_2} = \mathrm{i}b_3\frac{1+c_2}{b_3c_2}\,.$$

Im Falle $A^2 > 1$ ist es eine Schiebung.

Wir führen nun im ersten Modell eine Metrik, den Abstand zweier Punkte im offenen Einheitskreis $|z| < 1$ ein: Es seien Z_0, Z_0' zwei Punkte, dann ist die Distanz

$$D(Z_0, Z_0') = \left|\frac{Z_0 - Z_0'}{\bar{Z}_0' Z_0 + 1}\right|$$

und die Entfernung der beiden Punkte

$$E_{-1}(Z_0, Z_0') = \frac{1}{2}\log\frac{1+D(Z_0,Z_0')}{1-D(Z_0,Z_0')}$$

(vgl. [BEH01]), die bekanntlich der Logarithmus eines Doppelverhältnisses ist. D und E_{-1} sind invariant gegenüber den "Bewegungen" (8.1). Analoges gilt für das zweite Modell.

Bevor wir weitergehen betrachten wir noch den dreidimensionalen Fall

$$z^2 - \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) = 1\,.$$

Hier erhalten wir rationale Punkte (z, x_1, x_2, x_3), indem wir drei geeignete Primzahlen p_1, p_2, p_3 mit den zugehörigen π_1, π_2, π_3 nehmen, wobei wir für $j = 1,2,3$

$$\pi_j = L_j + \mathrm{i}M_j$$

nehmen.

Wir erhalten analog

$$\begin{aligned} z &= L_1L_2L_3\,,\\ x_1 &= M_1L_2L_3\,,\\ x_2 &= \quad\;\; M_2L_3\,,\\ x_3 &= \qquad\quad M_3\,. \end{aligned}$$

Es gibt noch eine oft verwendete Parameterdarstellung der NE-Geometrie. Es sei $\pi = U + \mathrm{i}V$ eine Gaußsche Primzahl und es sei wieder

$$L = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{U}{V} + \tfrac{V}{U}\right), \qquad M = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{U}{V} - \tfrac{V}{U}\right).$$

Wir setzen $z = L$, dann erhalten wir

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 - L^2 = M^2 .$$

Dies ist bei festem M eine Sphäre mit Mittelpunkt $(1,0,0,0)$ und Radius $|M|$ eine sogenannte Grenzsphäre. Wir benützen jetzt die Parameterdarstellung der Sphäre in §1 und erhalten als Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}
x_1 &= M\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}\frac{2CD}{C^2 + D^2}, \\
x_2 &= M\frac{2AB}{A^2 + B^2}\frac{2CD}{C^2 + D^2}, \\
x_3 &= \varepsilon M\frac{C^2 - D^2}{C^2 + D^2}, \\
z &= L .
\end{aligned}$$

Im zweidimensionalen Fall haben wir den Grenzkreis

$$x = M\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}, \qquad y = M\frac{2AB}{A^2 + B^2}, \qquad z = L .$$

Dabei seien die zugehörigen Primzahlen $\pi_1 = A + \mathrm{i}B$, $\pi_2 = C + \mathrm{i}D$ und π.

Während wir für die sphärische Geometrie ein Modell im dreidimensionalen Raum haben, eben die Sphäre, so wurde für die NE Geometrie ein solches von Beltrami gegeben, nämlich die Pseudosphäre. Sie entsteht bekanntlich aus der Traktrix

$$z = \lg\left(1 + \sqrt{\frac{1}{r^2} - 1} - \sqrt{1 - r^2}\right) = \Phi(r) \tag{3}$$

für $0 < r < 1$ durch Drehung um die z-Achse

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = \Phi(r) .$$

Beachten wir, daß

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \sqrt{\frac{1}{r^2} - 1}, \tag{4}$$

so erhalten wir für die obige Fläche, wo r und φ die Parameter sind,

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{r}\right)^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2 . \tag{5}$$

Nehmen wir als neue Parameter

$$\xi = \frac{1}{r}, \qquad \eta = \varphi, \tag{6}$$

so erhalten wir

$$ds^2 = \frac{(d\xi)^2 + (d\eta)^2}{\eta^2}. \tag{7}$$

Setzen wir $\zeta = \xi + i\eta$, dann ist

$$|d\zeta|^2 = (d\xi)^2 + (d\eta)^2, \qquad \frac{1}{2i}(\zeta - \bar{\zeta}) = \eta.$$

Es schreibt sich dann das Bogenelement

$$ds^2 = \frac{4|d\zeta|^2}{(\zeta - \bar{\zeta})^2}. \tag{8}$$

Wir machen nun die Transformation: Abbildung des Einheitskreises in die obere Halbebene

$$\zeta = i\,\frac{Z + i}{iZ + 1}, \tag{9}$$

also wird

$$|d\zeta|^2 = \frac{4\,dZ\,d\bar{Z}}{|1 - Z|^4}$$

und

$$\zeta - \bar{\zeta} = 2i\,\frac{1 - |Z|^2}{|1 - Z|^2}$$

(2. Poincarésches Modell), also

$$\frac{|d\zeta|^2}{(\zeta - \bar{\eta})^2} = \frac{4|dZ|^2}{(1 - |Z|)^2}. \tag{10}$$

Aus den Automorphismen (8.1) des Einheitskreises werden die Automorphismen der oberen Halbebene $\operatorname{Im}\zeta > 0$

$$\zeta' = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d},$$

wo a, b, c, d reelle Zahlen mit $ad - bc = 1$ sind und folgender Zusammenhang besteht

$$\alpha = \frac{a + d}{2} + i\,\frac{b + c}{2},$$
$$\beta = \frac{b + c}{2} + i\,\frac{a - d}{2}.$$

Die "Geraden" sind die oberen Halbkreise

$$|\xi - x_0|^2 = r^2,$$

wo x_0 auf der x-Achse liegt und r der Radius ist und auch die Halbgeraden

$$\operatorname{Re}\xi = x_0\,, \qquad \operatorname{Im}\xi > 0\,.$$

Kehren wir zum ersten Modell zurück: Wir hatten die Abbildung (8.1) in der Form (8.1′), (8.1″) geschrieben

$$W(Z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\vartheta}\,\frac{Z - Z_0}{\bar{Z}_0 Z - 1}\,.$$

Es war

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\vartheta} = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\,, \qquad Z_0 = -\frac{\beta}{\alpha}\,.$$

Es wird jetzt

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\vartheta} = \frac{a(3) + \mathrm{i}b(3)c(2)}{a(3) - \mathrm{i}b(3)c(2)}\,.$$

Da die $a(j)$, $b(j)$, $c(j)$ rationale Zahlen sind, so erhalten wir dadurch ein neues pythagoräisches Tripel, das noch weiter betrachtet werden kann.

Weiters wird

$$|Z_0| = \frac{|b(3)d(2)|}{\left|\big(a(3)\big)^2 + \big(b(3)d(2)\big)^2\right|^{\frac{1}{2}}} < 1\,.$$

Wir hatten noch die "Geraden" , also die zum Einheitskreis orthogonalen Kreise k mit Mittelpunkt m und Radius r eingeführt, wobei

$$m = \frac{c}{a} \qquad \text{und} \qquad r = \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|^2 - 1}$$

waren. Wir nehmen jetzt für m und r

$$m = \frac{1}{2}\left(\frac{U_4}{V_4} + \frac{V_4}{U_4}\right),$$

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{U_4}{V_4} - \frac{V_4}{U_4}\right),$$

also wieder rationale Zahlen.

Im zweiten Fall sind die "Geraden" Halbkreise mit Mittelpunkt X_0 auf der x-Achse

$$|Z - X_0|^2 = r^2\,,$$

wo wir Mittelpunkt und Radius als rationale bzw. als nicht negative rationale Zahlen wählen und $\operatorname{Im} Z > 0$ sein soll. Das Kleinsche Modell erhält man aus dem ersten Poincareschen Modell durch die Darbouxschen Transformationen (§4 (27))

$$\xi = \frac{2x}{1+x^2+y^2}\,, \qquad \eta = \frac{2y}{1+x^2+y^2}\,, \qquad \left(\zeta = \frac{1-(x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)}\right).$$

wo (ξ,η) ein Punkt im Kleinschen Modell $\xi^2+\eta^2<1$ und (x,y) ein Punkt im ersten Poincaréschen Modell mit $x^2+y^2<1$ ist.

Umkehrung $(\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1)$ nach §4 (26):

$$x = \frac{\xi}{1+\xi}\,, \qquad y = \frac{\eta}{1+\xi}$$

und

$$\zeta = \pm\sqrt{1-(\xi^2+\eta^2)}\,.$$

Es besteht also auf der Pseudosphäre die NE Geometrie, allerdings enthält das Modell Singularitäten, wie man sofort sieht. D. Hilbert hat unter starken Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gezeigt, daß es keine singularitätenfreien Modelle in der NE Geometrie im dreidimensionalen Raum gibt. Es hat nun Bieberbach [BIE01] ein singularitätenfreies Modell der NE Geometrie im Hilbertraum gefunden. Ein weiteres Modell hat Blanusza [BLA01] und [BLA02] gegeben. Dort ist auch weitere Literatur angegeben. Auch ist vermerkt, daß es sogar ein singularitätenfreies Modell im dreidimensionalen Fall gibt, nämlich von Nash (1954) unter schwachen Annahmen. Blanusza hat auch für die mehrdimensionale NE-Geometrie singularitätenfreie Modelle im Hilbertraum angegeben, später auch in hochdimensionalen endlichen Räumen.

Wir wollen nun die Methode von Bieberbach auseinandersetzen und dabei der Rezension von Cohn Vossen zu [BIE01] (siehe [COH01]) folgen. Wir entwickeln die rechte Seite von (10) in eine Potenzreihe. Da

$$\frac{1}{\left(1-|Z|^2\right)^2} = \sum_{l=1}^{\infty} l|Z|^{2l-1}\,, \tag{11}$$

so folgt, da $|Z|^2 = Z\bar{Z}$, $\mathrm{d}|Z|^2 = \mathrm{d}Z\bar{Z}$

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{l=1}^{\infty} lZ^{l-1}\,\mathrm{d}Z\bar{Z}^{l-1}\,\mathrm{d}Z\,. \tag{12}$$

Wir setzen nun für $l = 1,2,3,\dots$

$$X_{2l-1} + \mathrm{i}X_{2l} = \frac{1}{\sqrt{l}}Z^l\,, \tag{13}$$

$$X_{2l-1} - \mathrm{i}X_{2l} = \frac{1}{\sqrt{l}}\bar{Z}^l\,, \tag{13'}$$

$$\mathrm{d}X_{2l-1} + \mathrm{i}\,\mathrm{d}X_{2l} = \frac{1}{\sqrt{l}}Z^{l-1}\,\mathrm{d}Z = \sqrt{l}Z^{l-1}\,\mathrm{d}Z\,, \tag{14}$$

$$\mathrm{d}X_{2l-1} + \mathrm{i}\,\mathrm{d}X_{2l} = \sqrt{l}\bar{Z}^{l-1}\,\mathrm{d}\bar{Z}\,. \tag{14'}$$

Es ist also

$$(\mathrm{d}X_{2l-1})^2 + (\mathrm{d}X_{2l})^2 = (Z\bar{Z})^{l-1}\,\mathrm{d}Z\,\mathrm{d}\bar{Z}\,,$$

also ist

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{l=1}^{\infty}\bigl((\mathrm{d}X_{2l-1})^2 + (\mathrm{d}X_{2l})^2\bigr)\,. \tag{15}$$

Wir führen Polarkoordinaten ein

$$Z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\vartheta}\,, \tag{16}$$

also ist

$$Z_l = X_{2l-1} + \mathrm{i}X_{2l} = \frac{1}{\sqrt{l}}\,r^l\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi l\vartheta}\,, \tag{17}$$

also

$$X_{2l-1} = \frac{1}{\sqrt{l}}\,r^l\cos\pi l\vartheta\,, \tag{18}$$

$$X_{2l} = \frac{1}{\sqrt{l}}\,r^l\sin\pi l\vartheta\,. \tag{19}$$

Es seien p_1, p_2 geeignete Primzahlen mit den zugehörigen U, V, also

$$\pi_1 = U_1 + \mathrm{i}V_1\,, \qquad \pi_2 = U_2 - V_2\,,$$

dann sei

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\vartheta} = \frac{\pi_1}{\bar{\pi}_1}\,, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\vartheta} = \left(\frac{\pi_1}{\bar{\pi}_1}\right)^l = \frac{U_{1l} + \mathrm{i}V_{1l}}{U_{1l} - \mathrm{i}V_{1l}}$$

und

$$r = \left(\frac{U_2^2 - V_2^2}{U_2^2 + V_2^2}\right)^2 < 1\,, \tag{20}$$

da

$$1 - r = \left(\frac{2U_2V_2}{U_2^2 + V_2^2}\right)^2 > 0\,, \tag{20'}$$

so wird

$$X_{2l-1} = \frac{1}{\sqrt{l}}\left(\frac{U_2^2 - V_2^2}{U_2^2 + V_2^2}\right)^{2l}\frac{U_{1l}^2 - V_{1l}^2}{U_{1l}^2 + \mathrm{i}V_{1l}^2}\,, \tag{21}$$

$$X_{2l} = \frac{1}{\sqrt{l}}\left(\frac{U_2^2 - V_2^2}{U_2^2 + V_2^2}\right)^{2l}\frac{2U_{1l}V_{1l}}{U_{1l}^2 + \mathrm{i}V_{1l}^2}\,, \tag{21'}$$

also

$$Z_l = \frac{1}{\sqrt{l}}\left(\frac{U_2^2 - V_2^2}{U_2^2 + V_2^2}\right)^{2l}\left(\frac{U_1 + \mathrm{i}V_1}{U_1 - \mathrm{i}V_1}\right)^l\,. \tag{21''}$$

Wir können vom Kreis zur oberen Halbebene übergehen

$$\zeta_l = \mathrm{i}\,\frac{Z_l + \mathrm{i}}{\mathrm{i}\,Z_l + 1} = \xi_l + \mathrm{i}\eta_l$$

und

$$\xi_l + \mathrm{i}\eta_l = \frac{2Z_l}{1 - |Z_l|^2}\,, \qquad \zeta_l = \frac{1 + |Z_l|^2}{1 - |Z_l|^2}\,.$$

Die Z_l sind Funktionen von r, $\cos\pi l\vartheta$ und $\sin\pi l\vartheta$. Die Folge $(Z_1, Z_2, \ldots)$ bzw. (X_l, Y_l, Z_l) ist ein *Punkt* P in der NE Geometrie. Wollen wir eine Folge von Punkten in der NE Geometrie erhalten, so müssen wir eine unendliche Teilfolge aus der Folge der geeigneten Primzahlen, z.B. die Folge der geeigneten Primzahlen selbst, wählen. "Darüber" liegt die Folge von Punkten der NE Geometrie, welche eine Folge im Hilbertraum bilden. Das gleiche gilt für die Folge der $((\zeta_l))$.

Nun gibt es bekanntlich zu jedem Punkt P in der oberen Halbebene eine Transformation T von der Gestalt

$$\zeta' = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} = T(\xi)\,,$$

wobei a, b, c, d ganze rationale Zahlen mit $ad - bc = 1$ sind (Man nennt eine solche Transformation eine Modultransformation. Wir haben sie schon am Anfang der ganzen Reihe von Arbeiten über pythagoräischen Zahlen behandelt), sodaß ζ' im "Fundamentalbereich" der Modulgruppe liegt. Der Fundamentalbereich – die Modulfigur – ist

$$-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\zeta' \leq \frac{1}{2}\,, \qquad |\zeta'| \geq 1\,, \qquad \operatorname{Im}\zeta' > 0\,.$$

Führt man eine solche Transformation (wir wollen sie T_l nennen) bei ζ_l durch, so liegt die Folge $(T_l\zeta_l)$ in der Modulfigur. Diese Modulgruppe wird bekanntlich durch folgende Transformation erzeugt

$$\zeta' = \zeta + 1\,, \qquad \zeta' = \zeta - 1 \qquad \text{und} \quad \zeta' = -\frac{1}{\zeta}\,.$$

So kann man zu jeder geeigneten Primzahl die zugehörige Folge $(T_l\zeta_l)$ konstruieren und gewinnt eine Folge von Punkten in der Modulfigur, die näher zu untersuchen hier nicht am Platz ist (vgl. auch die Arbeit [HLA05]).

Die Methode von B l a n u s z a geht ebenfalls von der geometrischen Reihe aus und zwar für die Funktion $\frac{1}{1+y^2}$ (wir nehmen nun für die Bezeichnung kleine Buchstaben)

$$1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + y^2)^l} = \frac{1}{y^2} + 1\,.$$

Durch Differentiation erhält man

$$\sum \frac{ly}{(1+y^2)^{l+1}} = \frac{1}{y^3},$$

also auch

$$\sum \frac{ly^2}{(1+y^2)^{l+2}} = \frac{1}{y^2(1+y^2)}.$$

Blanusza setzt nun

$$x_0 = \lg\left(y + \sqrt{1+y^2}\,\right)$$

$$x_{2l-1} + \mathrm{i} x_{2l} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{l}x}}{\sqrt{l}(1+y^2)^{\frac{l}{2}}}.$$

Es ist

$$\mathrm{d}x_0 = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}},$$

$$\mathrm{d}z_l = \mathrm{d}x_{2l-1} + \mathrm{i}\,\mathrm{d}x_{2l} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{l}x}}{\sqrt{l}} \frac{\mathrm{d}z}{(1+y^2)^{\frac{l}{2}}}$$

und es ist

$$(\mathrm{d}x_0)^2 + \sum_{l=1}^{\infty} |\,\mathrm{d}z_l|^2 = \mathrm{d}y^2\left(\frac{1}{1+y^2} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{ly^2}{(1+y^2)^{l+2}}\right) + \mathrm{d}x^2 \sum_{l=1}^{\infty}(1+y^2)^{-l}$$

$$= \mathrm{d}y^2\left(\frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{y^2(1+y^2)}\right) + \frac{\mathrm{d}x^2}{y^2} = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$$

und

$$\sum_{l=1}^{\infty} |z_l|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \frac{1}{(1+y^2)^l} = -\lg\left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right).$$

Es wird

$$x_0 = \lg\left|\frac{A}{B}\right| \quad \text{bzw.} \quad \lg\left|\frac{B}{A}\right|,$$

$$x_{2l-1} + \mathrm{i} x_{2l} = \left(\tfrac{1}{2}\left(\left|\tfrac{A}{B}\right| + \left|\tfrac{B}{A}\right|\right)\right)^{-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{l}x}.$$

Anhang.

Wir wollen noch etwas über die Darstellung von konfokalen Schalen von Ellipsen bzw. Hyperbeln anfügen.

Betrachten wir zunächst den Fall der Ebene. Wir setzen

$$x = u_1 c_2,$$

$$y = v_1 s_2.$$

Dann ist die Ellipse

$$\left(\frac{x}{u_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{v_1}\right)^2 = 1$$

bzw. die Hyperbel

$$\left(\frac{x}{c_2}\right)^2 - \left(\frac{y}{s_2}\right)^2 = 1\,.$$

Dabei bedeutet

$$c_j = \frac{C_j^2 - D_j^2}{C_j^2 + D_j^2}\,, \qquad d_j = \frac{1}{2}\left(\frac{C_j}{D_j} + \frac{D_j}{C_j}\right)\,,$$

$$s_j = \frac{2C_jD_j}{C_j^2 + D_j^2}\,, \qquad v_j = \frac{1}{2}\left(\frac{C_j}{D_j} - \frac{D_j}{C_j}\right)\,.$$

Im Raum

$$x = u_1 c_2\,,$$
$$y = u_1 s_2 c_3\,,$$
$$z = v_1 s_2 s_3\,.$$

Wir können auch wieder die $u_{1l}, v_{2l}, c_{2l}, s_{2l}, \ldots$ mit $l = 1, 2, \ldots$ benützen.

§9. Cliffordsche Fläche

Es sei ϑ gegeben (üblicherweise nimmt man an, daß ϑ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt), dann betrachten wir im R^4 die dreidimensionale Sphäre

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \tag{1}$$

(wir haben sie früher oft mit

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$$

bezeichnet) und in ihr die Cliffordsche Fläche

$$x_1^2 + x_2^2 - (x_0^2 + x_3^2) = \cos \pi\vartheta\,. \tag{2}$$

Daraus folgt

$$x_1^2 + x_2^2 = \cos^2 \frac{\pi\vartheta}{2}\,, \qquad x_0^2 + x_3^2 = \sin^2 \frac{\pi\vartheta}{2}$$

und daraus folgt die Parameterdarstellung

$$x_1 = \cos \frac{\pi\vartheta}{2} \cos\varphi\,, \qquad x_2 = \cos \frac{\pi\vartheta}{2} \sin\varphi\,, \tag{3}$$

$$x_0 = \sin \frac{\pi\vartheta}{2} \cos\sigma\,, \qquad x_3 = \sin \frac{\pi\vartheta}{2} \sin\sigma\,. \tag{3'}$$

Das Bogenelement ds der Cliffordschen Fläche lautet

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\pi^2}{4}\,\mathrm{d}\vartheta^2 + \cos^2\frac{\pi\vartheta}{2}\,\mathrm{d}\varphi^2 + \sin^2\frac{\pi\vartheta}{2}\,\mathrm{d}\sigma^2\,. \tag{4}$$

Wenn ϑ konstant gelassen wird, so haben wir einen Zylinder vor uns. Den Kurven $\varphi+\sigma = \text{Konst}$ bzw. $\varphi-\sigma = \text{Konst}$ ensprechen Großkreise der Fläche. Auf ihnen gilt die Euklidische Geometrie. Die Gaußsche Krümmung der Fläche (3), (3′) ist Null.

Bei Hilbert Cohn-Vossen [HIL01] findet sich das Beispiel:

$$(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u\cos v, \sin u\sin v)\,.$$

Rationale Punkte werden geliefert durch die Kombination von zwei pythagoräischen Tripeln

$$\begin{bmatrix} \frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}\frac{C^2-D^2}{C^2+D^2} & \frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}\frac{2CD}{C^2+D^2} \\ \frac{2AB}{A^2+B^2}\frac{C^2-D^2}{C^2+D^2} & \frac{2AB}{A^2+B^2}\frac{2CD}{C^2+D^2} \end{bmatrix},$$

wo $\alpha = A + \mathrm{i}B$ und $\beta = C + \mathrm{i}D$ ist.

Für $\sigma = \frac{\pi}{2}$ bzw. $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ erhalten wir einen Zylinder

$$x_1^2 + x_2^2 = \cos^2\frac{\pi\vartheta}{2}\,, \qquad x_3 = \pm\sin\frac{\pi\vartheta}{2}\,, \qquad x_0 = 0\,. \tag{5}$$

Lassen wir diesen Fall beiseite und gehen wir zu inhomogenen Koordinaten über

$$y_1 = \frac{x_1}{x_0}\,, \qquad y_2 = \frac{x_2}{x_0}\,, \qquad y_3 = \frac{x_3}{x_0}\,, \tag{6}$$

so erhalten wir das Hyperboloid

$$\left(y_1^2 + y_2^2\right)\operatorname{tg}^2\frac{\pi\vartheta}{2} - y_3^2 = 1\,, \tag{7}$$

wenn ϑ nicht von der Gestalt $\vartheta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ist. Symmetrischer ist die Gestalt

$$\left(y_1^2 + y_2^2\right)\sin^2\frac{\pi\vartheta}{2} - y_3^2\cos^2\frac{\pi\vartheta}{2} = \sin^2\frac{\pi\vartheta}{2}\,, \tag{8}$$

welches auch Sonderfälle einschließt.

Wir können der Cliffordsche Fläche auch den Torus

$$\begin{aligned} x &= (a + r\cos\sigma)\cos\varphi\,,\\ y &= (a + r\cos\sigma)\sin\varphi\,,\\ z &= \qquad\; r\sin\sigma \end{aligned} \tag{9}$$

mit $a = \operatorname{ctg}\frac{\pi\vartheta}{2}$, $r = \sin\frac{\pi\vartheta}{2}$ zuordnen oder in impliziter Gestalt

$$\left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2 + z^2 = r^2\,.$$

Das Hyperboloid wird

$$\left(y_1^2 + y_2^2\right) = a^2\left(1 + y_3^2\right). \tag{7'}$$

Für $\sigma = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= a\cos\varphi\,, \\ y &= a\sin\varphi\,, \\ z &= \pm r\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Der Zylinder (5) ist die Menge der uneigentlichen Punkte des Hyperboloids (7), also abgebildet auf die Kreise

$$x^2 + y^2 = \cos^2\frac{\pi\vartheta}{2}\,, \qquad z = \pm\sin\frac{\pi\vartheta}{2}\,,$$

welche auf dem Torus liegen.

Das Hyperboloid (7) ist abgebildet auf dem Torus, wenn man jeden Punkt

$$y_1 = \operatorname{ctg}\frac{\pi\vartheta}{2}\frac{\cos\pi\varphi}{\cos\pi\sigma}\,, \qquad y_2 = \operatorname{ctg}\frac{\pi\vartheta}{2}\frac{\sin\pi\varphi}{\cos\pi\sigma}\,, \qquad y_3 = \frac{\sin\pi\sigma}{\cos\pi\sigma} \tag{11}$$

dem Punkt (8) zuordnet.

Wir nehmen jetzt wieder drei geeignete Primzahlen p_1, p_2, p_3 mit zugehörigen π_1, π_2, π_3

$$\begin{aligned} a = \cos\frac{\pi\vartheta}{2} &= X(\pi_1)\,, & r = \sin\frac{\pi\vartheta}{2} &= Y(\pi_1)\,, \\ \cos\pi\varphi &= X(\pi_2)\,, & \sin\pi\varphi &= Y(\pi_2)\,, \\ \cos\pi\sigma &= X(\pi_3)\,, & \sin\pi\sigma &= Y(\pi_3)\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Wir setzen noch

$$X(\pi_j) = \cos\pi\chi_j\,, \qquad Y(\pi_j) = \sin\pi\chi_j\,. \tag{13}$$

Wir wissen, daß die χ_j irrational sind. Die uneigentlichen Punkte $\sigma = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ bzw. $\vartheta = \pi(2l+1)$ wurden also nicht durch (13) dargestellt.

Zu den Punkten, die wir durch (12) erhalten, bei festem π_j kommen noch weitere Punkte hinzu

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_l} = X\left(\pi_2^{l_2}\right) + \mathrm{i}Y\left(\pi_2^{l_2}\right)$$

und

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma_l} = X\left(\pi_3^{l_3}\right) + \mathrm{i}Y\left(\pi_3^{l_3}\right),$$

wobei l_2, l_3 ganze Zahlen sind.

Wir erhalten so unendlich viele Punkte auf der Cliffordschen Fläche wie auf dem Hyperboloid und auf dem Torus.

Bevor wir weitergehen wollen wir noch eine Umformung beim Hyperboloid (7) vornehmen. Wir setzen

$$\varphi - \sigma = \tau .$$

Es wird dann nach (9), wenn wir noch $s = \operatorname{tg}\sigma$ setzen

$$y_1 = \frac{a}{r}\frac{\cos\sigma + \tau}{\cos\sigma} = \frac{a}{r}(\cos\tau - s\sin\tau)\,,$$
$$y_2 = \frac{a}{r}(s\cos\tau + \sin\tau)$$

und

$$y_3 = s\,.$$

Führen wir eine weitere Primzahl p_4 bzw. π_4 ein, so wird

$$\cos\tau = X(\pi)\,, \qquad \sin\tau = Y(\pi)$$

und wir erhalten

$$y_1 = \frac{a}{r}\big(X(\pi) - sY(\pi)\big)\,,$$
$$y_2 = \frac{a}{r}\big(sX(\pi) + Y(\pi)\big)\,.$$

Wir haben also eine Drehung vor uns.

Es gilt nun

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} = \frac{\pi_3}{\bar\pi_3}\frac{\pi}{\bar\pi}\,.$$

Wir können also statt der Primzahlen p_1, p_2, p_3 auch die Primzahlen p_1, p_3 und p nehmen.

Betrachten wir nun den Torus:

Wir führen in bekannter Weise statt σ die Variable

$$\psi = \int_0^\sigma \frac{\mathrm{d}v}{\frac{a}{r} + \cos v} = \frac{2r}{\sqrt{a^2 - r^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-r}{a+r}}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\right)$$

ein. Es wird der Torus auf das Rechteck

$$-\pi < \varphi \le \pi\,,$$
$$-\frac{r\pi}{\sqrt{a^2 - r^2}} < \psi \le \frac{r\pi}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

abgebildet. Die Längen der beiden Seiten des Rechtecks werden 2π bzw. $2\pi\frac{a}{r} = 2\pi\operatorname{ctg}\frac{\pi\vartheta}{2}$.

Wir setzen nun

$$\tau = \mathrm{i}\operatorname{ctg}\frac{\pi\vartheta}{2} = \mathrm{i}\left|\frac{2A_{3l}B_{3l}}{A_{3l}^2 - B_{3l}^2}\right|$$

und führen den ganzen Apparat der elliptischen Funktionen bzw. der Thetafunktionen ein. (Wir verweisen auf das sehr gut lesbare Buch [CHA01].)

Wir setzen weiters

$$q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau} = \mathrm{e}^{-\pi \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}}$$

und

$$k = \left(\frac{\Theta_1(0,\tau)}{\Theta_3(0,\tau)}\right)^2, \qquad k' = \left(\frac{\Theta_2(0,\tau)}{\Theta_3(0,\tau)}\right)^2,$$

wobei

$$\Theta_1(0,\tau) = 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2},$$

$$\Theta_2(0,\tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2},$$

$$\Theta_3(0,\tau) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}.$$

Es ist $k^2 + k'^2 = 1$.

Wir setzen nun

$$\omega_1 = \pi\Theta_3^2(0,\mathrm{i}\tau), \qquad \omega_2 = \omega_1\tau.$$

Führen wir die vier Thetafunktionen ein (die Summen gehen von $-\infty$ bis ∞, der Index ist n)

$$\Theta(v,\tau) = -\mathrm{i}\sum(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\,\mathrm{e}^{(2n+1)\pi\mathrm{i}v},$$

$$\Theta_1(v,\tau) = \sum q^{(n+\frac{1}{2})^2}\,\mathrm{e}^{(2n+1)\pi\mathrm{i}v},$$

$$\Theta_2(v,\tau) = \sum(-1)^n q^{n^2}\,\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}v},$$

$$\Theta_3(v,\tau) = \sum q^{n^2}\,\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}v}.$$

Die elliptischen Funktionen stellen sich dar wie folgt

$$\operatorname{sn} u = \frac{\Theta\left(\frac{u}{\omega_1},\tau\right)}{\Theta_2\left(\frac{u}{\omega_1},\tau\right)}\frac{\Theta_3(0,\tau)}{\Theta_1(0,\tau)},$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{\Theta_1\left(\frac{u}{\omega_1},\tau\right)}{\Theta_2\left(\frac{u}{\omega_1},\tau\right)}\sqrt{\frac{k'}{k}},$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{\Theta_3\left(\frac{u}{\omega_1},\tau\right)}{\Theta_2\left(\frac{u}{\omega_1},\tau\right)}\sqrt{k'}.$$

Setzt man

$$y = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \qquad x = \operatorname{sn} u,$$

so erhält man das elliptische Gebilde

$$y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)\,,$$

da

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1\,,$$
$$\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1\,.$$

Dabei ist

$$\sqrt{k'} = \frac{\Theta_2(0,\tau)}{\Theta_3(0,\tau)}\,, \qquad \sqrt{\frac{k'}{k}} = \frac{\Theta_2(0,\tau)}{\Theta_1(0,\tau)}\,,$$

wobei

$$\sqrt{k} = \frac{\Theta_1(0,\tau)}{\Theta_3(0,\tau)}$$

ist. Betrachtet man die l-te Potenz von r_1, r_2, so sind die A_3, B_3 durch A_{3l}, B_{3l} zu ersetzen (Anwendungen siehe Bemerkung 2, [SEE01] und [SEE02]).

Bemerkung.

Es ist oft zweckmäßig, die Transformationsformel

$$\sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{i}}}\Theta_3(0,\tau) = \Theta_3\left(0,-\frac{1}{\tau}\right)$$

zu ersetzen. Diese Formel ist ein Spezialfall der berühmten Transformationsformel

$$\sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{i}}}\Theta_3(v,\tau) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi\,\mathrm{i}\,v^2}{\tau}}\,\Theta_3\left(\frac{v}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)\,.$$

Es wird

$$\frac{1}{\tau} = -\,\mathrm{i}\left|\frac{1}{2}\left(\frac{A_{3l}}{B_{3l}} - \frac{B_{3l}}{A_{3l}}\right)\right| = -\,\mathrm{i}\operatorname{tg}\frac{\pi\vartheta}{2}\,,$$

also das zugehörige $q = \mathrm{e}^{-\pi\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}$.

Wir führen noch die Kleinschen Modulfunktionen

$$J(\tau) = \frac{1}{54}\,\frac{\left(\Phi_1^8(0,\tau)+\Phi_2^8(0,\tau)+\Phi_3^8(0,\tau)\right)^3}{\left(\Phi_1(0,\tau)\Phi_2(0,\tau)\Phi_3(0,\tau)\right)^8}$$

ein und

$$\lambda(\tau) = k^2(\tau)\,.$$

Es gilt für alle ganzen Zahlen a, b, c, d mit $ad-bc=1$

$$J\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = J(\tau)$$

in der oberen Halbebene $\operatorname{Im}\tau > 0$ mit

$$J(\rho) = 0\,, \qquad J(\iota) = 1\,, \qquad J(\mathrm{i}\,\infty) = \infty\,,$$

wo $\rho = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$ im Fundamentalbereich der Modulgruppe ist.

$J(\tau)$ hat die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{2^6 3^3 q^2}\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^{2n}\right),$$

wo alle c_n nichtnegative ganze rationale Zahlen sind.

Das Bild von $J(\tau)$ im Bereich $\operatorname{Im}\tau > 0$, $-\frac{1}{2} \le R(\tau) < 0$ ist die obere Halbebene und für $\operatorname{Im}\tau > 0$, $0 \le R(\tau) < \frac{1}{2}$ ist es die untere Halbebene. Diese Abbildungen sind *bijektiv*, also existiert die inverse Funktion von $J(\tau)$.

$\lambda(\tau)$ ist ebenfalls eine Modulfunktion

$$\lambda\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \lambda(\tau) \qquad \text{mit} \quad ad - bc = 1\,,$$

wobei b, c gerade ganze Zahlen und a, d ungerade ganze Zahlen sind.

§ 10

Wir haben bisher mit Hilfe der pythagoräischen Tripel rationale Punkte auf dem Kreis, der Sphäre, der Hyperbel und anderen Mannigfaltigkeiten behandelt. Wir wollen noch einige andere Beispiele anführen, angeregt durch die in der Kosmologie verwendeten Modelle.

Wir betrachten zunächst die n-dimensionale Sphäre für alle Dimensionen. Sei n die Dimension dieser Sphäre. Wir nehmen n geeignete Primzahlen, die zugehörigen Gaußschen Primzahlen seien $\pi_1, \ldots, \pi_n$. Ist $\pi_j = U_j + \mathrm{i}V_j$, so sei

$$u_j = \frac{U_j^2 - V_j^2}{U_j^2 + V_j^2}\,, \qquad v_j = \frac{2U_jV_j}{U_j^2 + V_j^2}\,, \tag{1}$$

dann sei

$$\begin{aligned} x_1 &= v_1 v_2 \cdots v_{n-1} v_n\,, \\ x_2 &= v_1 v_2 \cdots v_{n-1} u_n\,, \\ x_3 &= v_1 \cdots v_{n-2} u_{n-1}\,, \\ &\ \vdots \\ x_n &= v_1 u_2\,, \\ x_{n+1} &= u_1\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Wir können von S_n zu S_{n+1} übergehen, wenn wir setzen

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 v_{n+1}\,, \\ x_2' &= x_1 u_{n+1}\,, \\ x_3' &= x_2\,, \\ x_4' &= x_3\,, \\ &\vdots \\ x_{n+2}' &= u_1\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Nehmen wir ganze Zahlen $l_1, \ldots, l_n$ und legen

$$\pi_1^{l_1}, \ldots, \pi_n^{l_n} \tag{4}$$

zugrunde, so erhalten wir neue Lösungen

$$x_1(l_1, \ldots, l_n), \ldots, x_{n+1}(l_1, \ldots, l_n)\,. \tag{5}$$

Am einfachsten ist der Fall $l_1 = \cdots = l_n = l$. Wir schreiben dann kurz

$$x_1(l), \ldots, x_n(l)\,. \tag{6}$$

Wir können nun weitere Mannigfaltigkeiten ins Auge fassen.

Nehmen wir eine weitere Sphäre

$$S_m:\ y_1^2 + \cdots + y_{m+1}^2 = 1\,. \tag{7}$$

Konstruieren wir mit Hilfe weiterer Primzahlen $q_1, \ldots, q_m$ und ganzen Zahlen $l_1', \ldots, l_m'$

$$y_1(l_1', \ldots, l_m'), \ldots, y_{m+1}(l_1', \ldots, l_m') \tag{8}$$

und einer weiteren Primzahl ρ

$$\begin{gathered} \rho = C + \mathrm{i}D \\ H_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{D} + \frac{D}{C}\right), \qquad H_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{D} - \frac{D}{C}\right). \end{gathered} \tag{9}$$

Wir haben dann

$$H_1^2 - H_2^2 = 1\,. \tag{10}$$

Wir setzen dann

$$\begin{aligned} Z_j &= x_j H_1\,, \qquad j = 1, \ldots, n{+}1\,, \\ W_k &= y_k H_2\,, \qquad k = 1, \ldots, m{+}1\,, \end{aligned} \tag{11}$$

so erhalten wir die Mannigfaltigkeit

$$Z_1^2 + \cdots + Z_{n+1}^2 - \left(W_1^2 + \cdots + W_{m+1}^2\right) = 1\,, \tag{12}$$

da ja

$$\left(x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2\right)H_1^2-\left(y_1^2+\cdots+y_{m+1}^2\right)H_2^2=H_1^2-H_2^2=1\,.$$

Für $n=m=1$ erhalten wir (Gödelsches Modell)

$$G:\ Z_1^2+Z_2^2-\left(Z_3^2+Z_4^2\right)=1\,. \tag{13}$$

Für $n=2,\ m=1$ (Anti-de Sitter-Modell, vgl. (18))

$$Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2-\left(Z_4^2+Z_5^2\right)=1\,. \tag{14}$$

Wir haben statt $W_1=Z_4,\ W_2=Z_5$ geschrieben.

Nehmen wir die null-dimensionale Sphäre

$$S_0:\ Z^2=1 \tag{15}$$

und in der obigen Konstruktion $m=1$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} Z_j &= x_j H_1\,,\\ Z_0 &= W_0 = H_2\,, \end{aligned} \tag{16}$$

dann haben wir

$$Z_1^2+\cdots+Z_{n+1}^2-Z_0^2=1\,. \tag{17}$$

Für $n=4$ erhalten wir den de Sitter-Raum, also explizit mit

$$Z_j = x_j\,\frac{1}{2}\left(\frac{C}{D}+\frac{D}{C}\right)\,, \tag{18}$$

$$Z_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{D}-\frac{D}{C}\right) \tag{18'}$$

und

$$\begin{aligned} x_0 &= v_1v_2v_3v_4\,,\\ x_1 &= v_1v_2v_3u_4\,,\\ x_2 &= v_1v_2u_3\,,\\ x_3 &= v_1u_2\,,\\ x_4 &= u_1\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Wir benötigen also 5 Primzahlen, um die Hyperbelwelt von de Sitter darzustellen.

Ist $x_4^2>x_5^2$ und setzt man $x_4=zH_1$ und $x_5=zH_2$, so erhält man die Sphäre $x_1^2+x_2^2+x_3^2+z^2=1$ (H. Weyl).

Wir können noch andere Mannigfaltigkeiten beschreiben (Methode von Hawking). Wir nehmen die Halbsphäre

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1 \qquad \text{mit} \quad x_5 < 0 \tag{20}$$

und die de Sitter-Welt

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 1 \qquad \text{mit} \quad x_5 > 0\,. \tag{20'}$$

Der Durchschnitt ist gerade S_3 und $x_5 = 0$. Wir nehmen dann einfach in der obigen Konstruktion die fünfte Koordinate im Fall der Sphäre negativ bzw. bei de Sitter positiv.

Anhang.

Betrachten wir den Fall $n = 3$, $m = 1$, d.h. es ist

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 = 1\,, \qquad Z_5^2 + Z_6^2 = 1\,. \tag{$*$}$$

Wir setzen für $j = 1, 2, 3, 4$

$$\hat{Z}_j = Z_j \left(\left|\frac{C}{D}\right| + \left|\frac{D}{C}\right| \right)$$

und für $j = 5, 6$

$$\hat{Z}_j = Z_j \left(\left|\frac{C}{D}\right| - \left|\frac{D}{C}\right| \right)\,,$$

so erhalten wir

$$(\hat{Z}_1)^2 + \cdots + (\hat{Z}_4)^2 - \big((\hat{Z}_5)^2 + (\hat{Z}_6)^2\big) = 1\,. \tag{$**$}$$

Wir setzen nun

$$Z_1 + \mathrm{i} Z_2 = \alpha\,, \qquad Z_3 + \mathrm{i} Z_4 = \beta\,, \qquad Z_5 + \mathrm{i} Z_6 = \tau\,,$$

so wird

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\,, \qquad |\tau|^2 = 1\,.$$

Damit haben wir einen Zusammenhang zu §4 zur Matrix

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$$

mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Wir können die dort angegebenen Parameterdarstellungen übernehmen.

Es sei nun $\tau' = t_1 + \mathrm{i} t_2$ eine Gaußsche ganze Zahl, dann sei

$$\tau = \frac{\tau'}{\bar{\tau}'} = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\vartheta}\,,$$

also

$$Z_5 = \frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2 + t_2^2} = \cos \pi\vartheta ,$$
$$Z_6 = \frac{2t_1 t_2}{t_1^2 + t_2^2} = \sin \pi\vartheta .$$

Wir können nun statt τ auch

$$\tau^l = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi l\vartheta}$$

nehmen, wo l eine ganze Zahl ist. Es ist

$$Z_{5l} = \cos \pi l\vartheta , \qquad Z_{6l} = \sin \pi l\vartheta .$$

Wir nennen l die fiktive Zeit $0, \pm 1, \dots$.

Wir bezeichnen $(**)$ als die komplexe de Sitter Welt. Diese Welt zu betrachten wurde ich durch einen Diskussionsbeitrag des Philosophen C. F. v. Weizsäcker zu einem Vortrag von Dirac angeregt. Obwohl von Weizsäcker dies in anderer Weise anwendet, wurde ich durch seine Bemerkung dazu geführt, eine Dichte $\rho(\tau)$ einzuführen und mit α, β, τ zu multiplizieren. So erhalten wir als Mannigfaltigkeit

$$\hat{\alpha} = \bar{\rho}\alpha , \qquad \hat{\beta} = \bar{\rho}\beta , \qquad \hat{\tau} = \bar{\rho}\tau ,$$

wobei

$$\bar{\rho} = \int_0^T \rho(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

und $0 < T < 1$. Wir erhalten also

$$|\hat{\alpha}|^2 + |\beta|^2 - |\tau|^2 = \bar{\rho}^2 ,$$

wobei die ρ von der komplexen Zeit τ oder nach von Weizsäcker von der atomaren Zeit τ, genauer von ϑ mod 1, abhängt. Nehmen wir nun eine gleichverteilte Folge (ϑ_k) im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ mit der Dichte ρ. Die Folge $(l\vartheta)$ ist nach dem Satz von Scherrer und Hadwiger eine gleichverteilte Folge modulo 1. Wir konstruieren nun eine gleichverteilte Folge $\hat{\vartheta}_k$ von der Dichte ρ

$$\hat{\vartheta}_k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left[1 + \vartheta_k - \int_0^{\vartheta_1} \rho(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right]$$

in $\langle 0, 1\rangle$. Es sei nun $T < 1$ die kosmische Zeit, dann betrachten wir

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \chi_{\langle 0,T\rangle}(\hat{\vartheta}_k) = \int_0^T \rho(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \text{Fehler} ,$$

wo nach §0 (10′)

$$|\,\text{Fehler}\,| \le \frac{20 \lg C}{\lg N}\,.$$

Diese Multiplikation mit der Dichte ρ kann man auch bei den anderen Mannigfaltigkeiten, die wir hier betrachtet haben, einführen, z.B. bei der Sphäre in §1. Diese Ähnlichkeitstransformation hat noch weitere Anwendungen.

Eine Bemerkung zum kosmologischen Modell von Gödel.

Kurt Gödel hat am 7. Mai 1949 ein Modell des Kosmos vorgeschlagen, welches großes Interesse gefunden hat (zur Literatur vgl. man [GÖD01], [GÖD02], [GÖD03], [HAW01], [HLG01] und [KUN01]).

Wenn wir das Bogenelement $\mathrm{d}s$ des Gödelschen Kosmos in der Fassung von Kundt zugrundelegen:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\mathrm{d}t - \frac{b\sqrt{2}}{\eta}\,\mathrm{d}\xi\right)^2 - b^2\left(\frac{\mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2}{\eta^2} - \mathrm{d}v^2\right)^2 ,$$

so setzen wir wie schon vorher (vgl. §8)

$$\xi + \mathrm{i}\eta = \zeta\,.$$

Wir bilden wieder auf dem Einheitskreis ab:

$$\zeta = \mathrm{i}\,\frac{z+1}{z-1}$$

und erhalten

$$\mathrm{d}\zeta = -\frac{z\,\mathrm{i}\mathrm{d}z}{(z-1)^2}\,, \qquad \mathrm{d}\xi = -\,\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2} - \frac{\mathrm{d}\bar z}{(\bar z-1)^2}\right), \qquad \eta = \frac{|z|^2}{(z-1)^2}\,.$$

Wir entwickeln nach Potenzen von z, $\bar z$ und ersetzen wie bei der Bieberbachschen Methode (vgl. §8) z^l, $\bar z^l$ durch x_{2l-1} und x_{2l} bzw. $\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}\bar z$ durch die zugehörigen $\mathrm{d}x_{2l-1}$ und x_{2l}. Wir behalten v, t bei. So erhalten wir ein Modell des Gödelschen Kosmos über dem Hilbertraum der Variablen $x_1, x_2, \ldots$. Man drückt dann $\frac{\mathrm{d}\xi}{\eta}$ in diesen neuen Variablen aus und entwickelt in eine Potenzreihe. Dies soll hier nicht näher ausgeführt werden.

Anmerkung zum Gödelschen Modell.

Gödel hat in seiner Arbeit Quaternionen eingeführt, die er als hyperbolische Quaternionen bezeichnet. Wir wollen sie kurz Gödelsche Quaternionen nennen.

$$q_G = q = x_0 + x_1 j + x_2 k + x_3 l = (x_0, x_1, x_2, x_3)\,,$$

wobei

$$j^2 = -1\,, \qquad k^2 = l^2 = 1\,,$$
$$jk = -kj = l\,, \qquad kl = -lk = -j\,, \qquad lj = -jl = k\,,$$
$$\bar{q} = x_0 - x_1 j - x_2 k - x_3 l$$

und die Norm von q

$$N(q) = q\bar{q} = x_0^2 + x_1^2 - (x_2^2 + x_3^2)$$

ist. Quaternionen mit der Norm 1 sind

$$\mathrm{I} = (\cos x_0, \sin x_0, 0, 0)\,,$$
$$\mathrm{II} = (\operatorname{ch} x_1, 0, 0, \operatorname{sh} x_1)\,,$$
$$\mathrm{III} = (1, x_2, x_2, 0)\,.$$

Faßt man sie als Abbildungen von G auf, so geht G bei Abbildung III, II, I in sich selbst über.

Diese Gödelschen Quaternionen können wir auch für unsere Pythagoräischen Tripel verwenden.

Ist α eine Gaußsche ganze Zahl $A + \mathrm{i}B$, so können wir

$$\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} + \mathrm{i}\,\frac{2AB}{A^2 + B^2}$$

die Quaternion I

$$\left(\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}, \frac{2AB}{A^2 + B^2}, 0, 0\right)$$

zuordnen und

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)\right) = \left(\frac{2\,\mathrm{i}\alpha\bar{\alpha}}{\alpha^2 - \bar{\alpha}^2}, \mathrm{i}\,\frac{\alpha^2 + \bar{\alpha}^2}{\alpha^2 - \bar{\alpha}^2}\right)$$

die Quaternion II

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right), 0, 0, \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A}\right)\right)\right).$$

Dabei ist der Ausnahmefall im Satz von Scherrer und Hadwiger natürlich ausgeschlossen.

Gödel betrachtet dann eine 2. Abbildung. Wir schreiben sie gleich explizit auf

$$u_0' = \cos\frac{t}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} r u_0\,,$$
$$u_1' = \sin\frac{t}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} r u_1\,,$$
$$u_2' = \sin\left(\varphi - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{sh} r u_2\,,$$
$$u_3' = \cos\left(\varphi - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{ch} r u_3\,.$$

Gödel nimmt dann $r = c\lg(1+\sqrt{2}\,)$ und $R = \operatorname{ch} c = 1$. Wir wollen G in der Form

$$|u_0 + \mathrm{i}u_1|^2 - |u_2 + \mathrm{i}u_3|^2 = |u_0^2 - u_2^2 + u_1^2 - u_4^2| = 1$$

schreiben. Wir nehmen drei geeignete Primzahlen p_j $(j = 1,2,3)$ mit den zugehörigen Gaußschen Primzahlen $\bar{u}_j = A_j + \mathrm{i}B_j$ $(j = 1,2,3)$. Dann betrachten wir die "timelike" Punkte

$$u_0 + \mathrm{i}u_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi_1}{\bar{\pi}_1}\right)^l \left(\frac{A_3}{B_3} + \frac{B_3}{A_3}\right),$$

$$u_2 + \mathrm{i}u_3 = \frac{1}{2}\frac{\pi_2}{\bar{\pi}_2}\left(\frac{\pi_1}{\bar{\pi}_1}\right)^l \left(\frac{A_3}{B_3} + \frac{B_3}{A_3}\right)$$

für $l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

§11

Wir machen nun eine Anwendung von §10 (5) auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wir setzen

$$P_1 = x_1^2(l)\,,\ P_2 = x_2^2(l)\,,\ \ldots\,,\ P_s = x_s^2(l) \tag{1}$$

mit $s = n+1$. Es ist

$$P_1 + P_2 + \cdots + P_s = 1 \tag{2}$$

und alle P_j sind positiv und kleiner als Eins.

Wir betrachten auf E: $0 < \zeta_j < 1$ die Intervalle

$$0 < \zeta < P_1\,, \quad P_1 < \zeta < P_1 + P_2\,, \quad \ldots\,, \quad P_n < \zeta < 1\,. \tag{3}$$

Wir nennen sie kurz

$$J_1, J_2, \ldots, J_s\,.$$

Die Längen sind $P_1, \ldots, P_s$ und alle rational. Das einfachste Beispiel ist $s = 2$

$$P_1 = \left(\frac{U_1^2 - U_2^2}{U_1^2 + U_2^2}\right)^2, \qquad P_2 = \left(\frac{2U_1U_2}{U_1^2 + U_2^2}\right)^2. \tag{4}$$

Wir können $\left(U_1^2 + U_2^2\right)^2$ als Anzahl der möglichen Fälle und $\left(U_1^2 - U_2^2\right)^2$ als Anzahl der günstigen Fälle und $(2U_1U_2)^2$ als Anzahl der ungünstigen Fälle auffassen oder umgekehrt.

Für jedes Intervall J_j gilt dann für die relative Häufigkeit $H_N(j)$ nach §1 (10)

$$\lim_{N\to\infty} H_N(j) = P_j\,. \tag{5}$$

Die Wahrscheinlichkeit P_j ist gleichzeitig auch die relative Häufigkeit. Der zugehörige Erwartungswert ist, wenn $a_1, \ldots, a_s$ reelle Zahlen sind,

$$a_1 P_1 + \cdots + a_s P_s \,. \tag{$*$}$$

Wir können die multinomiale Verteilungsfunktion

$$\sum \frac{s!}{k_1! \cdots k_s!} P_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot P_s^{k_s} \tag{6}$$

betrachten und die Entropie

$$\sum_{k=1}^{s} P_k \log P_k \,. \tag{7}$$

Wir wollen noch über die bedingte Wahrscheinlichkeit in unserem Modell sprechen.

Wir betrachten eine Teilfolge $J_1', \ldots, J_l'$ unserer Folge $J_1, \ldots, J_s$. Die Vereinigungsmenge bezeichnen wir mit J'. Da die Intervalle disjunkt sind, ist

$$p(J') = p(J_1') + \cdots + p(J_l') \,. \tag{8}$$

Sie ist nach Konstruktion auch eine Häufigkeit. Wir betrachten nun die Teilfolge ${J''}_1, \ldots, {J''}_m$ aus der Teilfolge $J_1', \ldots, J_l'$. Die Vereinigungsmenge bezeichnen wir mit J''. Sie ist Teilmenge von J' und es ist

$$p(J'') = p(J_1'') + \cdots + p(J_l'') \tag{9}$$

und auch wieder Häufigkeit. J'' ist natürlich eine Teilmenge von J'. Es ist also

$$\frac{A''}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \iota(J'', x_k) = p(J'') \,, \tag{10}$$

$$\frac{A'}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \iota(J', x_k) \ = p(J') \,. \tag{10$'$}$$

Es ist $A'' \leq A'$ und sie sind die Anzahl der Folge (x_k) in A'' bzw. in A'. Es ist weiter

$$\frac{A''}{A'} = \frac{p(J'')}{p(J')} \,. \tag{11}$$

Betrachten wir jetzt solche x_k, die in J' liegen. Wir numerieren sie durch: $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_l$, wo $l = A'$ ist. Dann ist

A'' die Anzahl der $\hat{x}_j$, welche in J'' liegen.

Es ist

$$\frac{A''}{A'} = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{l} \iota(J'', \hat{x}_l) \,, \tag{12}$$

also die Häufigkeit der $\hat{x}_l$, welche in J' liegen. Wir können nun vom Standpunkt der Folge $(\hat{x}_k)$, von J' aus gesehen, mit S die Anzahl der möglichen Fälle und mit A'' die Anzahl der günstigen Fälle, welche in J'' liegen, bezeichnen.

$$p(A''/A') = \frac{A''}{A'} = \frac{p(J'')}{p(J')}\,.$$

Ist $A' = E$, so ist $p(J') = 1$ und $p(J'')$ ist die Anzahl der günstigen Fälle, womit wir auf die Laplacesche Definition zurückkommen, dann ist alles möglich.

Jedes p_j hat als Nenner $u_j^2 + v_j^2$. Der gemeinsame Nenner Z ist das Produkt $(u_1^2 + v_1^2) \cdots (u_s^2 + v_s^2)$. Dies können wir als die Anzahl der möglichen Fälle zur Verteilung $p_1, \ldots, p_s$ ansehen. Die zugehörigen Zähler Z_j sind dann die günstigen Fälle zur Wahrscheinlichkeit p_j. Wir haben damit der Laplaceschen Definition eine Deutung gegeben.

Wir können nun den Erwartungswert $(*)$ so deuten:

Es liege eine Versuchsreihe zur Bestimmung einer Funktion $a = a_1, a_2, \ldots, a_s$ vor. Es trete Z_1-mal a_1 auf, Z_2-mal a_2, usf., dann ist die Anzahl der Versuche $Z_1 + \cdots + Z_s$. Da

$$p_j = \frac{Z_j}{Z}$$

ist der sogenannte mittlere Wert von a, üblicherweise bezeichnet mit $\bar{a}$, aufgrund der Versuchsreihe gerade der Erwartungswert

$$E(a) = \frac{a_1 Z_1}{Z} + \cdots + \frac{a_s Z_s}{Z}\,.$$

Die Streuung $\sigma(a)$ ist dann

$$\sigma(a) = \sqrt{\left(a - E(a)\right)^2}\,.$$

Bemerkung.

Nehmen wir eine Folge unendlich vieler Primzahlen π_j, so erhalten wir eine Folge $P_1, \ldots, P_s, \ldots$ mit

$$P_1 + P_2 + \cdots = 1\,.$$

Es seien nun $s = n + 1$ positive Zahlen $P_1, \ldots, P_s$ mit

$$P_1 + \cdots + P_s = 1 \tag{13}$$

gegeben, dann setzen wir für $j = 1, \ldots, s$

$$x_j = \pm\sqrt{P_j}\,.$$

Wir setzen für jedes $j = 1, \ldots, s$

$$s_j = x_1^2 + \cdots + x_{j-1}^2 = P_1 + \cdots + P_{j-1} = 1 - (P_j + P_{j+1} + \cdots)$$

(für $j=1$ sei $s_0=0$). Wir bilden uns für $j=1,\ldots,s$

$$A_j = \frac{|x_j|}{\sqrt{1-s_j}} \tag{14}$$

und

$$B_j = \sqrt{1-A_j^2} = \sqrt{\frac{1-s_{j+1}}{1-s_j}}\,. \tag{14'}$$

Es ist

$$B_1\cdots B_j = \sqrt{1-s_j}\,.$$

Es sind alle A_j, B_j positiv und kleiner als Eins.

Es sei N eine natürliche Zahl, dann gibt es eine natürliche Zahl v mit $1\le v\le N^s$ und eine ganze Zahl u_j, sodaß für $v_j=v$ mit $j=1,\ldots,s$

$$\left|\sqrt{\frac{1-A_j}{1+A_j}}-\frac{u_j}{v}\right|\le\frac{1}{Nv}\,.$$

Es ist dann

$$\left|A_j-\frac{u_j^2-v^2}{u_j^2+v^2}\right|\le\frac{2}{Nv}\,, \tag{15}$$

$$\left|B_j-\frac{2u_jv}{u_j^2+v^2}\right|\le\frac{2}{Nv}\,. \tag{15'}$$

Diesen Satz haben wir schon wiederholt verwendet.[2] Wir setzen

$$a_j=\frac{u_j^2-v^2}{u_j^2+v^2}\,,\qquad b_j=\frac{2u_jv}{u_j^2+v^2}\,.$$

Es ist

$$a_j^2+b_j^2=1 \tag{16}$$

für alle j. Wir setzen

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_1\,,\\ x'_2 &= b_1a_2\,,\\ x'_3 &= b_1b_2a_3\,,\\ &\vdots\\ x'_n &= b_1\ldots b_{n-1}a_n\,,\\ x'_{n+1} &= b_1\ldots b_na_{n+1}\,. \end{aligned} \tag{17}$$

[2] siehe [HLA02] und Seite 52 (of this paper).

Wir setzen $P'_j = (x'_j)^2$.

Es werden die so konstruierten $P'_1, \ldots, P'_s$ im allgemeinen nicht alle Eigenschaften haben wie jene, die mit Primzahlen konstruiert wurden.

Man kann das System $(P'_1, \ldots, P'_s)$ als Annäherung an das System $(P_1, \ldots, P_s)$ betrachten, weil die P_j von den P'_j um höchstens $\frac{s}{2Nv}$ abweichen. Es sind ja

$$P_1 + \cdots + P_s = 1 \tag{18}$$

und

$$P'_1 + \cdots + P'_s = 1\,. \tag{19}$$

Es gilt auch

$$|P_j - P'_j| \leq \frac{1}{2Nv}\,. \tag{20}$$

Kehren wir zu (1) zurück.

Man kann im Raum der $x_1, \ldots, x_s$ eine Koordinatentransformation durchführen (angeregt durch [SAV01])

$$y = Ox\,, \tag{21}$$

also eine Drehung vornehmen, in Koordinaten geschrieben

$$y = (y_1, \ldots, y_s)\,, \tag{22}$$

dann ist

$$y_j = o_1 x_1 + \cdots + o_s x_s\,, \tag{23}$$

wo die $o_1, \ldots, o_s$ ein orthogonales System von s Vektoren sind, also $\langle o_j, o_k \rangle = 0$ für $j \neq k$ sind. Es ist bequemer, zunächst noch nicht vorauszusetzen, daß für $j = k$ $\langle o_j, o_j \rangle = |o_j|^2 = 1$ ist. Wenn wir die x_j durch y_k ausdrücken, erhalten wir

$$x_j = \frac{\langle o_j, y \rangle}{o_j^2} \tag{24}$$

für $j = 1, \ldots, s$. Für die Wahrscheinlichkeiten p_j erhalten wir

$$p_j = x_j^2 = \left(\frac{\langle o_j, y \rangle}{o_j^2} \right)^2 . \tag{25}$$

Ein Mittelwert, also eine Linearform in den p_j

$$m = \langle l, p \rangle = l_1 p_1 + \cdots + l_s p_s \tag{26}$$

erhält dann die Gestalt

$$\langle l, p \rangle = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\langle o_j, y \rangle}{o_j^2} \right)^2 l_j \tag{27}$$

und das Quadrat der Streuung σ wird

$$\sum_{j=1}^{s}(l_j - m)^2 p_j = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\langle o_j, y\rangle}{o_j^2}\right)^2 l_j^2 - m^2 . \tag{28}$$

Beispiele von normierten Vektoren $o_1, \ldots, o_s$, also Drehungen, erhalten wir mit Hilfe der Formeln aus §7, wobei die Drehungen

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi_j & \sin\varphi_j \\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{bmatrix} \tag{29}$$

aneinandergereiht sind. Wir nehmen natürlich die pythagoräischen Tripel und bleiben damit im Bereich der rationalen Zahlen.

Interessant ist ein System von orthogonalen Vektoren, welche der Verfasser bei der Radontransformation aufgestellt hat. Es seien $a_1, \ldots, a_s$ Zahlen mit $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ gegeben, dann sei

$$\begin{aligned} o_1 &= (a_1, \ldots, a_s)\,, \\ o_2 &= (-a_2 a_1, 0, \ldots, 0) \\ o_3 &= \big(a_1 a_3, a_2 a_3, -(a_1^2 + a_2^2)a_3, 0, \ldots, 0\big)\,, \\ &\;\vdots \\ o_s &= \big(a_1 a_s, \ldots, a_{s-1}a_s, -(a_1^2 + \cdots + a_{s-1}^2)a_s\big)\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Es wird

$$\begin{aligned} o_1^2 &= a_1^2 + \cdots + a_s^2\,, \\ o_2^2 &= a_1^2 + a_2^2\,, \\ o_3^2 &= a_3^2(a_1^2 + a_2^2)(1 + a_1^2 + a_2^2) \\ &\;\vdots \end{aligned} \qquad (31$$

Ein ganz einfaches Beispiel ist: $a_j = p_j$ $(j = 1, \ldots, s)$.

Man kann die Sache jetzt umdrehen: Geben wir ein orthogonales System von Vektoren $o_1, \ldots, o_s$ vor (es kann auch ein abzählbar-unendliches System von orthogonalen Vektoren sein), einen Vektor y bzw. eine Funktion f, das skalare Produkt $\langle o_j, y\rangle$ durch

$$\int f g_j \,\mathrm{d}x$$

und $g_1, g_2, \ldots$ ein orthogonales Funktionensystem. Man kann damit die x_j. $\frac{\langle o_j, y\rangle}{o_j^2}$ und die Wahrscheinlichkeiten p_j bilden. Man kann dann ein approximatives System von Wahrscheinlichkeiten, welches nur rationale Zahlen enthält, aufstellen und erhält damit einen Hilbertraum von rationalen Zahlen.

Wir können die Überlegungen noch erweitern. Setzen wir

$$\alpha_j = \sqrt{P_j}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\varphi_j}$$

für $j = 1, \dots, s$, so nennen wir die α_j die Wahrscheinlichkeitswelle und es ist

$$|\alpha_j|^2 = P_j .$$

Wir haben also

$$|\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_s|^2 = 1 .$$

Nehmen wir den Fall $s = 2$ und setzen $\alpha_1 = \alpha$ und $\alpha_2 = \gamma$, so ist

$$|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1 .$$

Wir hatten in §4 die Darstellung

$$\begin{aligned} \alpha &= X_3(X_1 + \mathrm{i}\,Y_1)(X_2 + \mathrm{i}\,Y_2) , \\ \gamma &= Y_3(X_1 + \mathrm{i}\,Y_1)(X_2 - \mathrm{i}\,Y_2) . \end{aligned}$$

Setzen wir nach A. Penrose

$$q = \frac{\alpha}{\gamma} ,$$

so ist q eine komplexe Zahl. Wir betrachten ihr stereographisches Bild auf der Riemannschen Zahlenkugel

$$\left(2X_3Y_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, X_3^2 - Y_3^2\right) ,$$

wobei $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ist.

$\lambda(\alpha, \gamma)$ hat das gleiche Bild wie (α, γ). Wir können also (α, γ) als Punkt der komplexen projektiven Geraden auffassen. Wir können allgemein $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ als Punkt des $(s-1)$-dimensionalen projektiven Raumes auffassen.

Wir wollen jetzt einer binomialen bzw. multinomialen Verteilung eine weitere Deutung geben.

Es sei f eine Funktion von der Gestalt $f(x_1, \dots, x_s)$. Es genügt, wenn sie für rationale Zahlen definiert ist. Es seien $M_1, \dots, M_s$ s Mengen, welche zueinander disjunkt sind und das Einheitsintervall ausfüllen.

Wir betrachten nun das Integral

$$J = \int\limits_{M_1} \dots \int\limits_{M_s} f\left(\lambda_1(x_1), \dots, \lambda_s(x_s)\right)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_s , \tag{32}$$

wobei

$$\lambda_j(x_j) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{s} \iota_{M_j}(x_j) . \tag{33}$$

Wir betrachten nun die Menge aller x_j mit

$$\sum_{k=1}^{s} \iota_{M_j}(x_k) = r_j \tag{34}$$

und

$$\sum_{j=1}^{a} r_j = s\,, \tag{35}$$

wo a und $r_1, \dots, r_a$ natürliche Zahlen sind.

Es ist also

$$\lambda_j(x_k) = \frac{r_j}{s} \tag{36}$$

und

$$\begin{aligned} J &= \sum_{r_1+\cdots+r_a=s} f\left(\tfrac{r_1}{s}, \dots, \tfrac{r_a}{s}\right) \int_{M_1} \dots \int_{M_s} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_s \\ &= \sum f\left(\tfrac{r_1}{s}, \dots, \tfrac{r_a}{s}\right) \lambda_1^{r_1}(M_1) \cdots \lambda_a^{r_a}(M_a) \frac{s!}{r_1! \cdots r_a!}\,. \end{aligned} \tag{37}$$

Nehmen wir eine Verteilung $p_1, \dots, p_s$, so erhalten wir

$$J = \sum \frac{s!}{r_1! \cdots r_a!} f\left(\tfrac{r_1}{s}, \dots, \tfrac{r_a}{s}\right) p_1^{r_1} \cdots p_a^{r_a}\,. \tag{38}$$

Wir haben bisher l festgehalten. Der Deutlichkeit halber schreiben wir $w_{l_1}, \dots \dots, w_{l_s}$. Nun berücksichtigen wir, daß wir nach dem Satz von Scherrer-Hadwiger unser Modell mit Hilfe der Gaußschen Primzahlen konstruiert haben und die zugehörige Folge $l\chi_1, \dots, l\chi_s$ im Einheitswürfel E^s gleichverteilt ist (zur Erinnerung siehe [HLA07; §1, u. 2]). Wir können daher die Methoden der Gleichverteilung anwenden.

Statt einer Sphäre S_s nehmen wir nun eine abzählbare Menge $S_{s_1} \times \dots \cdots \times S_{s_r} \dots$ von Sphären mit den zugehörigen Primzahlen und bilden die direkten Produkte. Wir können so ein Modell einer elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie aufbauen.

§12. Reihen

Wir können mit Hilfe der pythagoräischen Tripel auch Reihen aufstellen. Wir gehen von Fourierreihen bzw. Potenzreihen mit Konvergenzradius 1 aus, also Reihen von der Form:

$$f(\varphi) = \sum_k a_k e(k\varphi)\,, \tag{1}$$

wo

$$e(\alpha) = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\alpha}$$

ist.

Weiters ist

$$P(z) = \sum_k a_k z^k\,,$$

wenn wir also $z = re(\varphi)$ schreiben, ist

$$P(r,\varphi) = \sum_k a_k r^k e(k\varphi)\,. \tag{2}$$

Wir setzen $\varphi = l\chi$, wobei

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\chi} = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}$$

ist. Wir haben also

$$f(l\chi) = \sum_k a_k e(kl\chi) = \sum a_k \left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right)^{kl}$$

bzw.

$$p(r,l\chi) = \sum_k a_k e(kl\chi)\,.$$

Ein Beispiel für (1) ist $a_k = \frac{1}{k^2}$. Es ist dann

$$\sum_k \frac{1}{k^2}\left(\left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right)^{2kl} + \left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right)^{2kl}\right) = \left(\left(\frac{1}{2} - (l\chi)\right)^2 - \frac{1}{12}\right)\pi^2\,,$$

aber

$$\sum \frac{1}{k}\left(\left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right)^{2kl} - \left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right)^{2kl}\right) = \pi\,\mathrm{i}\left(\frac{1}{2} - (l\chi)\right)\,.$$

Dabei bedeutet $(l\chi)$ den Bruchteil von $l\chi$, also $l\chi - [l\chi]$.

Allgemein sind (Bernoullische Polynome) (s gerade)

$$B_s(l\chi) = \frac{s!}{(2\pi)^s}(-1)^{\frac{s}{2}+1}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2l}}\left(\left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right)^{2l} - \left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right)^{2l}\right)\,.$$

Betrachten wir die erzeugende Funktion, so ist

$$\frac{t\,\mathrm{e}^{2\pi l\chi t}}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_s(l\chi)t^s}{s!}\,.$$

Es sei auch hingewiesen auf die Kurven von W. Wunderlich

$$z = a_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_s t} + \sum_{k=1}^{s-1} a_k\,\mathrm{e}^{m_k\omega_s t}$$

wo

$$z = x + \mathrm{i}y\,, \qquad a_k = b_k + \mathrm{i}c_k\,.$$

Ein einfaches, aber wichtiges Beispiel ist das Kirsteprofil (Kirste ist bekannt durch sein Werk im Bau von Tragflügeln. Es sei auf die Arbeit [WUN01] verwiesen)

$$x = a\cos t\,, \qquad y = c\sin t(1 + m\cos\alpha)\,. \tag{†}$$

Dabei ist $0 \le m < 1$. Wir haben dies gleich in reeller Form geschrieben. W. Wunderlich nennt solche Kurven höhere Radlinien. Diese Kurven haben eine schöne geometrische Deutung, große Wichtigkeit in den Anwendungen (z.B. Mandelbrotmengen, siehe [ZEIT01]) und eine lange Geschichte (Die Epizyklen von Ptolemäus)

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left((R + r) - h\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{R}{r}\varphi}\right).$$

Es sei nun $\rho = \frac{R}{r}$ irrational. Wir nehmen für φ die Zahlen $2\pi k = \varphi_k$ (k durchläuft alle ganzen Zahlen). Wir bezeichnen mit z_k jenes z, welches zum Winkel φ_k gehört und erhalten

$$z_k = R + r - he(\rho\varphi_k)\,,$$

da ja $e(\pi k) = 1$ ist. (Wir haben dabei für $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma}$ kurz $e(\sigma)$ geschrieben.)

Da ρ irrational ist, ist die Folge $(\rho\varphi_k)$ mod 1 gleichverteilt, also ist

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e(\rho\varphi_k) = 0\,,$$

dann ist

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} z_k = R + r\,.$$

Weitere Beispiele.

Geometrische Reihen ($\gamma = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\vartheta}$)

$$\sum_{k=0}^{\infty}(r\gamma)^k = \frac{1}{1 - r\gamma} \tag{1}$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{k!}\gamma^k = \mathrm{e}^{r\gamma}\,. \tag{2}$$

Es wird

$$\gamma^k = \frac{A_k^2 - B_k^2}{A_k^2 + B_k^2} + \mathrm{i}\,\frac{2A_kB_k}{A_k^2 + B_k^2} \tag{3}$$

und

$$\mathrm{e}^{r\gamma} = \exp\left(r\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}\right)\left(\cos\frac{2AB}{A^2+B^2}r + \mathrm{i}\sin\frac{2AB}{A^2+B^2}r\right). \tag{4}$$

Die Exponentialreihe ist bekanntlich für alle r konvergent, die geometrische Reihe nur für $0 \leq r < 1$. Es erscheint zweckmäßig in allen Potenzreihen, deren Konvergenzradius Eins ist, für r auch die pythagoräischen Tripel heranzuziehen. Man wählt eine geeignete Primzahl p, die zugehörige Gaußsche Primzahl $\pi = C + \mathrm{i}D$ und nimmt

$$r = \left(\frac{C^2-D^2}{C^2+D^2}\right)^2,$$

dann ist

$$1 - r = \left(\frac{2CD}{C^2+D^2}\right)^2 > 0,$$

also ist $0 < r < 1$. Nimmt man sogar π^l, wo l eine natürliche Zahl ist, so wird die Potenzreihe

$$\mathcal{P}(r) = \sum a_k r_l^k$$

mit

$$r_l = \left(\frac{C_l^2-D_l^2}{C_l^2+D_l^2}\right)^2$$

eine Funktion in l, welche es gestattet die $\mathcal{P}(r)$ für alle r mit $0 < r < 1$ zu approximieren.

Man kann (2) auch für die Besselfunktionen $I_n(z)$ mit ganzzahligen Indizes berechnen. Bekanntlich ist

$$I_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e\big(\mathrm{i}(n\varphi - z\sin\varphi)\big)\,\mathrm{d}\varphi$$

$\big(e(x) = \mathrm{e}^x\big)$. Nun ist

$$e\big(\mathrm{i}(n\varphi - z\sin\varphi)\big) = e(\mathrm{i}n\varphi)e(-z\sin\varphi).$$

Nun sei $\pi = A + \mathrm{i}B$ eine Gaußsche Primzahl, dann ist $(l\vartheta)$ gleichverteilt. Wir können die Formeln der Gleichverteilung anwenden und haben

$$I_n(z) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\gamma^{ln}e\big(\mathrm{i}z(\gamma^l - \bar{\gamma}^l)\big).$$

Nehmen wir ein festes N, so ist der Fehler höchstens

$$(n + |z|)D_N(l\vartheta).$$

Dabei ist

$$D_N(l\vartheta) \leq \frac{10 \lg(C^2 + D^2)}{\lg N}\,.$$

Wir ersetzen nun $n\varphi - z \sin\varphi$ durch

$$n\varphi - \sum_{j=1}^{s} \frac{z_j}{j}\left(\gamma^{lj} - \bar{\gamma}^{lj}\right),$$

wo $z_1, \ldots, z_s$ Variable sind. Wir erhalten so eine Funktion

$$I_n(z_1, \ldots, z_s)\,,$$

die eine (bekannte) Verallgemeinerung der Besselfunktionen ist.

Dies führt uns dazu, auch andere Funktionen zu betrachten. Für die Chebyshev-Polynome T_n und U_n haben wir

$$T_n(\gamma) + \mathrm{i}U_n(\gamma) = \gamma^n = \frac{A_n + \mathrm{i}B_n}{A_n - \mathrm{i}B_n}\,,$$
$$T_n(\gamma) - \mathrm{i}U_n(\gamma) = \bar{\gamma}^n = \frac{A_n - \mathrm{i}B_n}{A_n + \mathrm{i}B_n}\,.$$

Für die Laguerrschen Polynome $L_n(x)$ ist bekanntlich

$$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!}\, t^n$$

die erzeugende Funktion. Wir nehmen jetzt

$$t = \left(\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}\right)^2, \qquad 1 - t = \left(\frac{2AB}{A^2 + B^2}\right)^2,$$

dann ist

$$\frac{t}{1-t} = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A}\right)\right)^2$$

und es ist

$$t^n = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A}\right)\right)^{2n}$$

und die erzeugende Funktion wird

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)\right)^2 e\left(\frac{x}{2}\left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A}\right)\right).$$

Wir können auch mehrfache Reihen betrachten.

Es seien s Primzahlen $p_1, \dots, p_s$ mit den Gaußschen Primzahlen $\pi_1, \dots, \pi_s$ gegeben. Ist $\sum c_{k_1 \dots k_s} z_1^{k_1} \dots z_s^{k_s}$ konvergent in $|z_1| < 1$, …, $|z_s| < 1$, so sind es die Reihen

$$\sum c_{k_1 \dots k_s} r_1^{k_1} \dots r_s^{k_s} \left(\frac{\pi_1}{\bar{\pi}_1}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{\pi_s}{\bar{\pi}_s}\right)^{k_s} .$$

Wir können die pythagoräischen Tripel auch auf Differentialgleichungen anwenden. Wir nehmen die Lösungen der schwingenden Saite:

$$u_k(x,t) = \sin k\pi x \big(a_k \cos k\pi t + b_k \sin kt\big) ,$$

$$u_k(m\chi, l\chi_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left(\frac{\pi_1}{\bar{\pi}_1}\right)^{k\pi l} \left(\left(\frac{\pi_2}{\bar{\pi}_2}\right)^{k\pi l} - \left(\frac{\bar{\pi}_2}{\pi_2}\right)^{k\pi l}\right) ,$$

wo p_1, p_2 geeignete Primzahlen und π_1, π_2 die dazugehörigen Gaußschen Primzahlen sind.

Wir geben jetzt eine weitere Anwendung auf die Potentialtheorie an.

§ 13. Anwendung auf die Potentialgleichung

Es ist

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{s-1} r^k e\big(k(l\alpha - \varphi)\big) = \sum_{k=0}^{s} r^k e\big(k(l\alpha - \varphi)\big) - \frac{1}{2} , \tag{0}$$

also ist

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{s-1} r^k e\big(k(l\alpha - \varphi)\big) = \frac{1 + re\big(k(l\alpha - \varphi)\big) - 2r^s e\big(s(l\alpha - \varphi)\big)}{2\big(1 - re(l\alpha - \varphi)\big)} . \tag{1}$$

Dabei sei α eine irrationale Zahl und $e(\rho) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \rho}$.

Es sei nun $f(\rho)$ eine periodische Funktion mit der Periode 1 und integrierbar. Wir nehmen also ein solches Beispiel einer Funktion

$$H(x,y) = H(\cos 2\pi\varphi, \sin 2\pi\varphi)$$

definiert auf dem Einheitskreis. Wir multiplizieren die Gleichung (1) mit $f(l\alpha)$ für $l = 1, \dots, N$ und dividieren durch N. Wir erhalten dann links

$$\frac{1}{2} M_{N,s}(\alpha, f, 0) + \sum_{k=1}^{s-1} r^k M_N(\alpha, f, k) e(-k\varphi) , \tag{2}$$

dabei ist

$$M_N(\alpha, f, k) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} e(\alpha k l) f(l\alpha) \tag{3}$$

und rechts

$$\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\frac{1+re(l\alpha-\varphi)-2r^{s}e\big(s(l\alpha-\varphi)\big)}{2\big(1-re(l\alpha-\varphi)\big)}f(l\alpha)\,. \tag{4}$$

(2) und (4) sind nach (1) einander gleich und wir wollen diese Funktion mit

$$\Phi_{s,N}(r,\varphi,\alpha) \tag{5}$$

bezeichnen.

Es sei

$$w=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\,,$$

wobei $|a|<1$ ist. Wir setzen $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $a=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $0\le r<1$, dann ist

$$\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{\alpha}z|^2}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\vartheta+r^2}\,,$$

wobei $\vartheta=|\alpha-\varphi|$ ist.

Kombinieren wir unsere Formeln mit der bekannten "Alternierenden Methode" von H. A. Schwarz, so können wir die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie in der Ebene mit beliebiger Genauigkeit behandeln und vielleicht bis zur Uniformisierungstheorie vorstoßen.

Es seien nun zwei geeignete Primzahlen p_1, p_2 gegeben und π_1, π_2 die zugehörigen Gaußschen Primzahlen.

Es sei $M=\sup H$ auf E, dann gilt nach der Theorie der Gleichverteilung für (3)

$$M_N(\alpha,f,k)=\int_0^1 e(k\xi)f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi+\mathrm{R}\,, \tag{6}$$

wobei

$$\mathrm{R}=\vartheta\left(\sigma\Big(f,D_N^{\frac{1}{s+1}}\Big)+M(f)D_N^{\frac{1}{s}}\right) \tag{7}$$

mit $|\vartheta<1|$.

Wir setzen

$$\int_0^1 e(l\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi=M_k\,. \tag{8}$$

Setzen wir

$$\Phi_s=\frac{1}{2}M_0+\sum_{l=1}^{s-1}r^l e(-l\varphi)M_l\,, \tag{9}$$

so erhalten wir

$$|\Phi_{s,N}-\Phi_s|\le s\sigma\Big(f,D_N^{\frac{1}{s+1}}\Big)+M(f)D_N^{\frac{1}{s}}s^2M\,\mathrm{R}\,. \tag{10}$$

Wir bilden nun

$$\Phi = \frac{1}{2} M_0 + \sum_{l=1}^{\infty} r^l e(-l\varphi) M_l \tag{11}$$

und es ist

$$|\Phi_s - \Phi| \le \frac{Mr^s}{1-r} \le \frac{3M}{s(1-r)^2} . \tag{12}$$

Es ist ja

$$r^s = \mathrm{e}^{-s \lg r} \le \frac{1}{s(1-r)} \tag{13}$$

und es ist

$$|\Phi_{s,N} - \Phi| \le \frac{Mr^2}{1-r} + s\sigma\Big(f, D_N^{\frac{1}{s}}\Big) + s^2 M D_N^{\frac{1}{s}} . \tag{14}$$

Es ist nun

$$\Psi = \int_0^1 f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta \Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e\big(k(\zeta - \varphi)\big) \Big) . \tag{15}$$

Es ist nun, wenn wir $\vartheta = \zeta - \varphi$ setzen,

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e(k\vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(re(\vartheta)\big)^k - \frac{1}{2} = \frac{1}{1-re(\vartheta)} - \frac{1}{2} = \frac{1+re(\vartheta)}{1-re(\vartheta)} . \tag{16}$$

Wir erhalten also

$$\Psi = \int_0^1 \frac{1+re(\vartheta)}{1-re(\vartheta)} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta . \tag{17}$$

Es ist nun

$$\frac{1+re(\vartheta)}{1-re(\vartheta)} = \frac{\big(1+re(\vartheta)\big)\big(1-re(-\vartheta)\big)}{|1-re(\vartheta)|^2} = \frac{1-r^2+2\,\mathrm{i}r\sin\vartheta}{1-2r\cos\vartheta+r^2} . \tag{18}$$

Wir erhalten

$$\Psi = U + \mathrm{i}V , \tag{19}$$

wobei

$$U = \int_0^1 f(\zeta) \frac{1-r^2}{1-2r\cos\vartheta+r^2}\, \mathrm{d}\zeta \tag{20}$$

und

$$V = \int_0^1 f(\zeta) \frac{2r\sin\vartheta}{1-2r\cos\vartheta+r^2}\, \mathrm{d}\zeta . \tag{21}$$

Es ist nun, wenn wir auf (7) zurückgehen

$$\left| U - \left(\frac{1}{2} M_{N,0} + \sum_{k=1}^{s} r^k \cos k\varphi \, \hat{\mathrm{R}}\mathrm{e} \, |M_N(f)| \right) \right| \le F \tag{22}$$

und

$$\left| V - \left(\frac{1}{2} M_{N,0} + \sum_{k=1}^{s} r^k \cos k\varphi \, \hat{\mathrm{I}}\mathrm{m} \, |M_N(f)| \right) \right| \le F \,, \tag{22'}$$

wo

$$F = \frac{Mr^2}{1-r} + s\sigma\left(f, D_N^{\frac{1}{s}}\right) + s^2 M D_N^{\frac{1}{s}} \,. \tag{23}$$

Wir wollen nun U weiter behandeln.

Setzen wir ($\vartheta = \zeta - \varphi$)

$$P(r, \zeta - \varphi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\vartheta + r^2} \,, \tag{24}$$

so ist bekanntlich

$$\int_0^1 P(r, \zeta - \varphi) \, \mathrm{d}\zeta = 1 \,. \tag{25}$$

Wir bilden jetzt

$$U(\varphi) - f(\varphi) = \int_0^1 \big(f(\zeta) - f(\varphi)\big) P(r, \zeta - \varphi) \, \mathrm{d}\zeta \,. \tag{26}$$

Wir zerlegen das Integral in zwei Teile

$$J_1 = \int_{|\zeta - \varphi| \le \varepsilon} \big(f(\zeta) - f(\varphi)\big) P(r, \zeta - \eta) \, \mathrm{d}\zeta \tag{27}$$

und

$$J_2 = \int_{|\zeta - \varphi| > \varepsilon} \big(f(\zeta) - f(\varphi)\big) P(r, \zeta - \eta) \, \mathrm{d}\zeta \,. \tag{28}$$

Wir betrachten zuerst J_2.

Es ist ($\vartheta = \zeta - \eta$)

$$1 - \cos\vartheta = \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \ge \frac{\varepsilon^2}{2} \,,$$

also

$$\cos\vartheta \le 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \,,$$

also

$$1 - 2r\cos\vartheta + r^2 \geq 1 - 2r\Big(1 - \frac{\varepsilon}{2}\Big) + r^2 \geq (1-r)^2 + 2r\varepsilon^2 \,.$$

Es wird also (da $1 + r \leq 2$)

$$P(r,\vartheta) \leq \frac{4(1-r)}{(1-r)^2 + 2r\varepsilon^2} \leq \frac{2(1-r)}{r\varepsilon^2} \,. \tag{29}$$

Da $|f| \leq M$, so ist

$$|J_2| \leq \frac{4M(1-r)}{r\varepsilon^2} \,. \tag{30}$$

Jetzt betrachten wir J_1.

Es ist

$$|J_1| \leq \sigma(f,\varepsilon) \int_0^1 P \,\mathrm{d}\zeta = \sigma(f,\varepsilon) \,. \tag{31}$$

Wir haben also

$$|U - f(\varphi)| \leq \frac{4(1-r)}{r\varepsilon^2} + \sigma(f,\varepsilon) \,. \tag{32}$$

Es ist nach (22), (23), (31), (32)

$$\big|\mathrm{Re}\big(\Phi_{s,N}(r,\varphi,\alpha)\big) - f(\varphi)\big| \leq F + \frac{4(1-r)}{r\varepsilon^2} + \sigma(f,\varepsilon) \,.$$

Wir nehmen

$$s = \Big[D_N^{-\frac{3}{4}}\Big] + 1 \,, \qquad 1 - r = D_N^{\frac{3}{8}} \,, \qquad \varepsilon = D_N^{\frac{1}{8}} \,.$$

Wir erhalten

$$|\,\mathrm{Re}\big(\Phi_{s,N}(\varphi)\big) - f(\varphi)\big| = 10\,\Big(\sigma\Big(f, D_N^{\frac{1}{8}}\Big) + D_N^{\frac{1}{8}}\Big) \,. \tag{33}$$

Wir setzen

$$\zeta = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = u + \mathrm{i}v \,, \qquad z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} = x + \mathrm{i}y \,,$$

dann ist bekanntlich die Greensche Funktion

$$g(x,y;\xi,\eta) = g(z,\zeta) = -\log\left|\frac{z\zeta}{z-\zeta_1}\right|\frac{1}{|\bar\zeta_1|} = -\log\frac{|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,|}{\big|1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi-\varphi)}\big|} \,,$$

wo $\zeta_1 = \frac{1}{|\zeta|}$ ist. Die Greensche Funktion verschwindet am Rand.

Weiter ist

$$\frac{\partial g}{\partial n} = -\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{1-r^2}{|1+r^2-2r\cos(\xi-\varphi)|} = P(r,\xi-\varphi)$$

(n innere Normale), also ist

$$U = \int H(\varphi)\frac{\partial g}{\partial n}\,\mathrm{d}\varphi$$

in der geometrischen Form. Dann ist für den Kreis vom Radius 1 nach (22)

$$\int H(\varphi)\frac{\partial g}{\partial n}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}M_{N,0} + \sum_{k=1}^{s}\cos k\varphi\,\hat{\mathrm{R}}\mathrm{e}\,|M_N(H)| + \text{Fehler}\,,$$

wo der Fehler in (23) angegeben ist.

Bemerkungen

Bemerkung 1.

Es sei

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right), \qquad \varphi(u) = \frac{u+\mathrm{i}}{u-\mathrm{i}},$$

dann ist

$$\varphi(\psi(x)) = \varphi^2(u).$$

Ist $\psi^{(l)}(x)$ die l-te Iterierte von ψ, so ist

$$\varphi(\psi^{(l)}(x)) = \varphi(x)^{2^l}.$$

Setzt man $x = \frac{A}{B}$, so erhält man

$$\varphi\left(\psi^{(l)}\left(\tfrac{A}{B}\right)\right) = \left(\frac{A+B\mathrm{i}}{A-B\mathrm{i}}\right)^{2^l},$$

$$\frac{\psi^{(l)}\left(\frac{A}{B}\right)+\mathrm{i}}{\psi^{(l)}\left(\frac{A}{B}\right)-\mathrm{i}} = \left(\frac{A+B\mathrm{i}}{A-B\mathrm{i}}\right)^{2^l} = \alpha^{2^l},$$

wo $\alpha = \frac{A+B\mathrm{i}}{A-B\mathrm{i}}$ und

$$\psi^{(l)}\left(\tfrac{A}{B}\right) = \frac{\alpha^{2^l}+\bar{\alpha}^{2^l}}{\alpha^{2^l}-\bar{\alpha}^{2^l}}.$$

Bemerkung 2 über Solitone.

Stellen wir einige bekannte Formeln zusammen:

Betrachten wir die Differentialgleichung der Solitone

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \sin \psi = 0 . \tag{1}$$

Macht man die Substitution

$$\xi = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} , \tag{$*$}$$

so kommt man auf die sin-Gordon Gleichung[3]

$$\psi''(\xi) = \sin \psi(\xi) .$$

Nun hat diese Gleichung die Lösung

$$\psi = 4 \operatorname{arctg}(\mathrm{e}^{\xi}) .$$

Dies beruht auf der Formel (Moivre)

$$\begin{aligned} \sin 4\alpha &= 4(\sin \alpha \cos^3 \alpha - \cos \alpha \sin^3 \alpha) \\ &= 4 \cos^4 \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha) = 4 \frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2} . \end{aligned} \tag{$\dagger$}$$

Setzt man $\alpha = \operatorname{arctg}(\mathrm{e}^{\xi})$, so erhält man

$$\sin 4\alpha = \frac{4\, \mathrm{e}^{\xi} (1 - \mathrm{e}^{2\xi})}{(1 + \mathrm{e}^{2\xi})^2} .$$

Man sieht sofort, daß

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{1 + \mathrm{e}^{2\xi}}$$

und damit ist

$$\sin 4\alpha = \frac{\mathrm{d}^2 \alpha}{\mathrm{d}\xi^2} .$$

Nun denkt man bei ($*$) sofort an die Lorentztransformation und setzt

$$v = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} ,$$

dann ist

$$\sqrt{1 - v^2} = \frac{2AB}{A^2 + B^2}$$

[3] Ennerpersche Gleichung nach A. Ennerper (1830-1885), bei dem sie sich nach A. Seeger schon findet.

und wir erhalten

$$\xi = x - \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} t$$

und als Lösung von (1)

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A} \right) x - \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) t \right) .$$

Als Literatur seien [NEW01] und [HEY01] empfohlen.

Weitere Lösungen erhält man bekanntlich durch die Bäcklundtransformation. Es hat sich eine riesige Literatur angesammelt, vorallem weil die Sinus-Gordon-Gleichung so viele Anwendungen in der Physik gefunden hat, obwohl sie zuerst in der Differentialgeometrie aufgetaucht ist. Sie hängt eng mit den Flächen konstanter negativer Krümmung zusammen, wo sie aber weiter nicht beachtet wurde.

Wir wollen dies noch genauer ausführen: Setzen wir

$$t - x = u , \qquad t + x = v ,$$

so geht (1) über in die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = \sin \psi . \tag{2}$$

In geometrischer Form finden wir dies im Buch von L. Bianchi [BIA01]. Dort wird folgendes Gleichungssystem für Funktionen angegeben

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\Phi_2 - \Phi_1)}{\partial x} - \frac{\partial(\Phi_2 - \Phi_1)}{\partial y} \right) = \frac{1 + \sin \sigma}{\cos \sigma} \sin \frac{1}{2} (\Phi_2 + \Phi_1) , \tag{3}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\Phi_2 + \Phi_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\Phi_2 + \Phi_1)}{\partial y} \right) = \frac{1 - \sin \sigma}{\cos \sigma} \sin \frac{1}{2} (\Phi_2 - \Phi_1) \tag{3'}$$

und

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\Phi_3 - \Phi_0}{2} \right) = \frac{\cos \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}}{\sin \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}} \operatorname{tg} \frac{\Phi_2 - \Phi_2'}{2} . \tag{4}$$

Dabei sind σ, σ_1, σ_2 beliebige Konstante und Φ_2, Φ_2' Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sin \Phi . \tag{5}$$

Eine triviale Lösung von (5) ist $\Phi = 0$.

Ist Φ_1 eine Lösung der Gleichung (4), so kann man durch Integration des Systems (3), (3′) eine weitere Lösung Φ_2 finden. Man sagt, Φ_2 geht aus Φ_1 durch eine Bäcklund-Transformation $\Phi_2 = B_\sigma \Phi_1$ hervor (Diese Methode ist nach ihrem Erfinder A. Bäcklund benannt). Die Gleichung (4) wurde von L. Bianchi gefunden. Sie gestattet es, aus zwei Lösungen Φ_2, Φ_2', welche

Bäcklund-Transformationen von Φ_1 sind, eine weitere Lösung Φ_3 zu finden, wobei Φ_0 z.B. die Anfangslösung $\Phi_0 = 0$ ist. Dabei können noch σ_1, σ_2 beliebig gewählt werden. Wir haben hier ein Überlagerungsprinzip bei nichtlinearen Gleichungen. Auf dieses Prinzip haben vor allem Physiker, so besonders Metallphysiker, z.B. A. Seeger hingewiesen (vgl. [SEE01], [SEE02], [SEE03]) (Zitate siehe [TOE01]). Ich danke Herrn Professor Seeger in diesem Zusammenhang für seine freundliche Unterstützung.

Gehen wir z.B. von der trivialen Lösung $\Phi_0 = 0$ aus und setzen in (3) $\Phi_1 = \Phi_0$ und $\Phi_2 = \Phi$, so haben wir (wir wollen jetzt statt

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial(x-y)} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial(x+y)}$$

schreiben), so ist also das System

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial(x+y)} &= \frac{1+\sin\sigma}{\cos\sigma}\sin\frac{\Phi}{2}\,, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial(x-y)} &= \frac{1-\sin\sigma}{\cos\sigma}\sin\frac{\Phi}{2} \end{aligned} \tag{3''}$$

zu integrieren.

Wir führen eine Variable

$$\xi = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} \tag{6}$$

ein, wo $|v| < 1$, also Teil einer Lorentztransformation ist und machen den Ansatz

$$\Phi(x,y) = \Psi(\xi)\,,$$

dann wird

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\Psi'(\xi)\,, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\Psi'(\xi)\,.$$

Dann wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial(x+y)} &= \frac{1}{2}\frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}}\Psi'(\xi)\,, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial(x-y)} &= \frac{1}{2}\frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}}\Psi'(\xi)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Vergleichen wir mit (3), so erhalten wir

$$v = \sin\sigma\,, \qquad \sqrt{1-v^2} = \cos\sigma$$

und für $\Psi(\xi)$ die Differentialgleichung

$$\Psi'(\xi) = 2\sin\frac{\Psi(\xi)}{2}\,. \tag{8}$$

Ihre Integration liefert sofort (c Integrationskonstante)

$$\log \operatorname{tg} \frac{\Psi}{4} = \xi + c\,.$$

Entlogarithmieren ergibt

$$\Psi = 4 \operatorname{arctg}\left(\gamma\, \mathrm{e}^{\xi}\right), \tag{9}$$

wo wir $\gamma = \mathrm{e}^{\xi}$ gesetzt haben.

Eine andere Lösung hätten wir erhalten, wenn wir $|v| > 1$ angenommen hätten, also

$$\xi = \frac{vy - x}{\sqrt{v^2 - 1}}$$

gesetzt hätten. Dann wäre v eine “Überlichtgeschwindigkeit” gewesen.

Es ist noch zu zeigen, daß $\Psi(\xi)$ eine Lösung von (5) ist. Dies sehen wir aus (8). Die Diffentiation liefert

$$\Psi'' = \Psi' \cos \frac{\Psi}{2} \tag{10}$$

und Multiplikation von (8) und (10) liefert

$$\Psi'\Psi'' = \left(2 \sin \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\Psi}{2}\right) \Psi' = (\sin \Psi)\Psi'\,.$$

Durch Division durch Ψ' erhält man

$$\Psi''(\xi) = \sin \Psi(\xi)\,. \tag{11}$$

Den direkten Nachweis, daß (9) eine Lösung der Gleichung (5) ist, wenn man für ξ in (7) einsetzt und (9) benützt, haben wir bereits am Anfang unter Verwendung von (†) erbracht.

Es sei noch gestattet, auf (†) als gutes numerisches Hilfsmittel hinzuweisen. Es ist oft notwendig, Sinus und Cosinus zu berechnen. Man kann das Intervall $[-\pi, \pi]$ auf das Intervall $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ reduzieren (Bulirsch nimmt die analoge Identität für $\sin 3\alpha$).

Man kann den Weg auch umkehren. Aus (11) folgt

$$\Psi'\Psi'' = \Psi' \sin \Psi\,,$$

also

$$\frac{1}{2}\left(\Psi'(\zeta)\right)^2 = -\cos \Psi + C\,.$$

Mit $C = 1$ erhalten wir

$$\frac{1}{2}\left(\Psi'(\zeta)\right)^2 = 1 - \cos \Psi = 2 \sin^2 \frac{\Psi}{2}$$

und

$$\Psi'(\zeta) = 2 \sin \frac{\Psi}{2}\,,$$

also (8).

Nehmen wir die berühmte Gleichung (Dichteste Lagerung von Kugeln), wo (Λ Konstante)

$$\Psi''(\zeta) = \sin\Psi + 2\Lambda \sin 2\Psi\,,$$

dann erhalten wir nach der obigen Methode

$$\frac{1}{2}\big(\Psi'(\zeta)\big)^2 = -(\cos\Psi + 2\Lambda\cos 2\Psi) + C\,,$$

wobei wir als Integrationskonstante $C = 1 + \Lambda$ nehmen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\big(\Psi'(\zeta)\big)^2 &= 1 - \cos\Psi + \Lambda(1 + \cos 2\Psi)\\ &= 4\left(\sin^2\frac{\Psi}{2} + \Lambda\cos^2\Psi\right)\,,\end{aligned}$$

also

$$\Psi' = \pm 2\left(\sin^2\frac{\Psi}{2} + \Lambda\cos^2\Psi\right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Wir nehmen jetzt das Pluszeichen. Setzen wir $\alpha = \sqrt{1+4\Lambda}$, so haben wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Psi' &= \sin\frac{\Psi}{2}\left(1 + \alpha^2\cos^2\frac{\Psi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \sin^2\frac{\Psi}{2}\left(1 + \alpha^2\operatorname{ctg}^2\frac{\Psi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\,,\end{aligned}$$

also

$$\frac{\mathrm{d}\big(\alpha\Psi(\frac{\zeta}{2})\big)}{\sqrt{1+\alpha^2\operatorname{ctg}^2\zeta}} = \alpha\,\mathrm{d}\zeta$$

und

$$\log\left(\alpha\operatorname{ctg}\frac{\Psi}{2} + \sqrt{1 + \left(\alpha\operatorname{ctg}\frac{\Psi}{2}\right)^2}\right) = \alpha\int \mathrm{d}\zeta = \alpha(\zeta - \zeta_0)$$

(ζ Integrationskonstante), also ist

$$\alpha\operatorname{ctg}\frac{\Psi}{2} + \sqrt{1 + \left(\alpha\operatorname{ctg}\frac{\Psi}{2}\right)^2} = \mathrm{e}^{\alpha(\zeta-\zeta_0)}\,.$$

Daraus folgt

$$-\alpha\operatorname{ctg}\frac{\Psi}{2} + \sqrt{1 + \left(\alpha\operatorname{ctg}\frac{\Psi}{2}\right)^2} = \mathrm{e}^{-\alpha(\zeta-\zeta_0)}\,.$$

Weiters folgt

$$\alpha \operatorname{ctg} \frac{\Psi}{2} = \operatorname{Sin} \alpha(\zeta - \zeta_0)\,,$$

also

$$\operatorname{tg} \frac{\Psi}{2} = \frac{\alpha}{\operatorname{Sin} \alpha(\zeta - \zeta_0)}$$

und

$$\Psi = 2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\operatorname{Sin} \alpha(\zeta - \zeta_0)}\,.$$

Wir haben die Rechnungen nach Professor A. Seeger deshalb ausgeführt, damit man deutlich die Abhängigkeit der Lösungen von der Wahl der Integrationskonstanten typisch für nichtlineare Differentialgleichungen sieht.

Es liegt nun nahe, pythagoräische Tripel heranzuziehen: Wir nehmen zunächst eine ganze Gaußsche Zahl $\delta = C + \mathrm{i}D$ bzw. $\delta_l = C_l + \mathrm{i}D_l$ und setzen

$$\cos\sigma = 2CD\,, \quad \sin\sigma = C^2 - D^2 \qquad \text{bzw.} \quad 2C_lD_l\,, \quad C_l^2 - D_l^2\,,$$

dann $\alpha = A + \mathrm{i}B$ bzw. $\alpha^m = A_m + \mathrm{i}B_m$ für

$$v = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} \qquad \text{bzw.} \quad v_m = \frac{A_m^2 - B_m^2}{A_m^2 + B_m^2}$$

(l und m ganze rationale Zahlen).

Will man nun zwei Lösungen Φ_2, Φ_2' mit den Werten δ_1, δ_2 bzw. v_1, v_2, wobei $\delta_1 \neq \delta_2$, $v_1 \neq v_2$ sein soll, so nimmt man Gaußsche Zahlen α_1, α_2 mit

$$\alpha_j = A(j) + \mathrm{i}B(j) \quad \text{für } j = 1,2 \qquad \text{bzw. } \alpha_j^m\,.$$

Es ist

$$v_j = \frac{A(j)^2 - B(j)^2}{A(j)^2 + B(j)^2}\,, \qquad \sqrt{1 - v_j^2} = \frac{2A(j)B(j)}{A(j)^2 + B(j)^2}\,.$$

Weiters wird man für $\sin\frac{\sigma_j}{2}$, $\cos\frac{\sigma_j}{2}$ die Gaußschen Zahlen

$$\beta_j = U_j + \mathrm{i}V_j$$

annehmen, also

$$\cos\frac{\sigma_j}{2} = \frac{U_j^2 - V_j^2}{U_j^2 + V_j^2}\,, \qquad \sin\frac{\sigma_j}{2} = \frac{2U_jV_j}{U_j^2 + V_j^2}\,.$$

Am schönsten wird es wohl sein, wenn wir für die α_j, β_j, δ_j, v_j Gaußsche Primzahlen nehmen.

A. Seeger und seine Mitarbeiter nehmen Anfangslösungen, welche bei Integration von (3) auf elliptische Integrale führen (für die wichtigen Resultate sei auf die Arbeiten selbst verwiesen).[4]

[4]Hier könnte man §9 anwenden.

Ist $|v| > 1$, so wird

$$v = \frac{1}{2}\left(\frac{|A|}{|B|} + \frac{|B|}{|A|}\right), \qquad \sqrt{v^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{|A|}{|B|} - \frac{|B|}{|A|}\right).$$

Bemerkung 3.

Wir können jedem Pythagoräischen Tripel eine Welle zuordnen

$$\Phi(t,x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(Et - px)},$$

wobei

$$E = \frac{A^2 + B^2}{A^2 - B^2}, \qquad p = \frac{2AB}{A^2 - B^2}.$$

Es ist die Phasengeschwindigkeit

$$\frac{\nu}{\mu} = \frac{E}{p} = \frac{A^2 + B^2}{2AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B} + \frac{A}{B}\right) > 1$$

und

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}$$

die Gruppengeschwindigkeit. Es ist

$$E^2 - p^2 = \left(\frac{A^2 + B^2}{A^2 - B^2}\right)^2 - \left(\frac{2AB}{A^2 - B^2}\right)^2 = 1.$$

Bilden wir uns die Funktion

$$E(t) = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}, \qquad p(t) = \frac{2t}{1 - t^2},$$

so ist

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)}{\mathrm{d}\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)} = \left|\frac{2t}{1 + t^2}\right| < 1.$$

Es wird für $t = \frac{A}{B}$, also die Gruppengeschwindigkeit

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} < 1.$$

Es wird weiter

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \Phi.$$

Nehmen wir statt A und B die A_l, B_l für $l = 1, 2, 3, \ldots$ und weitere Zahlen $C_1, C_2, \ldots$ mit $\sum\limits_{l=0}^{\infty} C_l < \infty$, so erhalten wir das Wellenfeld

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_l t - P_l x)},$$

wo

$$E_l = \frac{A_l^2 + B_l^2}{A_l^2 - B_l^2} \qquad \text{und} \qquad P_l = \frac{2A_l B_l}{A_l^2 - B_l^2}$$

und es gilt

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \Phi\,.$$

Wir können dies gleich verallgemeinern. Wir nehmen zu den Primzahlen $\pi = A + \mathrm{i}B$, $\pi' = C + \mathrm{i}D$ eine weitere Primzahl $\pi_1 = U + \mathrm{i}V$. Nun bilden wir einen Vektor $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ mit der Masse m_0 zur Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Dabei sind

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - v^2}}\,, \qquad p_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - v^2}}\,, \qquad p_z = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - v^2}}\,,$$

mit

$$\begin{aligned} v_x &= v \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} \frac{2CD}{C^2 + D^2}\,, \\ v_y &= v \frac{2AB}{A^2 + B^2} \frac{2CD}{C^2 + D^2}\,, \\ v_z &= v \frac{C^2 - D^2}{C^2 + D^2} \end{aligned}$$

und

$$v = \frac{U^2 - V^2}{U^2 + V^2}\,.$$

Es ist $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, also $|v|$ der Betrag der Geschwindigkeit des Vektors $\vec{v}$. Nehmen wir noch die Energie $E = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{m_0}{2}$, so ist

$$E^2 - |p|^2 = m_0^2\,,$$

da $|p| = m_0 |v|$.

Bemerkung 4.

Es sei S die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius 1 in der komplexen z-Ebene. Es sei weiter f analytisch auf S, d.h., sie ist analytisch auf einer größeren Kreisscheibe $|z| \leq R$ $(R > 1)$. Auf dem Einheitskreis $|z| = 1$ sei nun eine unendliche Folge $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ von Punkten gegeben. Nun betrachte man die ersten N Glieder dieser Folge, und es sei $L_N = L_N(f, z)$ das Polynom in z vom Grad $N - 1$, welches durch Interpolation in den Werten von f in den Punkten $\zeta_1, \ldots, \zeta_N$ gefunden wird. Sind $\zeta_1, \ldots, \zeta_N$ alle voneinander verschieden, so ist bekanntlich

$$L_N(f, z) = \sum_{h=1}^{N} f(\zeta_h) \frac{(z - \zeta_1) \cdots (z - \zeta_{h-1})(z - \zeta_{h+1}) \cdots (z - \zeta_N)}{(\zeta_h - \zeta_1) \cdots (\zeta_h - \zeta_{h-1})(\zeta_h - \zeta_{h+1}) \cdots (\zeta_h - \zeta_N)} \tag{12}$$

(mit der üblichen Konvention, daß für $h = 1$ das Glied ζ_{h-1} und für $h = N$ jenes mit ζ_{h+1} wegzulassen ist). Setzen wir

$$\rho_n\big(f, (\zeta_j)\big) = \sup_{|z|=1} |f(z) - L_N(f)|\,,$$

so erhebt sich die Frage, wann $\lim_{N\to\infty} \rho_N = 0$ gilt.

Setzen wir $\zeta_j = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\varphi_j}$, so liegen die φ_j im Einheitsintervall $I\colon\ 0 \leq \varphi < 1$.

Ist die Funktion $f(z)$ auf dem Einheitskreis reell, so steht links die bekannte trigonometrische Interpolationsformel. In den praktischen Rechnungen wählt man $\varphi_j = \frac{j}{N}$ $(j = 1, \ldots, N)$, und dieser Fall ist auch theoretisch ausführlich untersucht worden. Es haben aber schon Euler und insbesondere U. J. Leverrier 1843 vorgeschlagen, auch hier an den Stellen $\varphi_j = (j-1)\alpha$ (α irrational) zu approximieren.

Dieses Verfahren ist dann in numerischer Hinsicht von G. J. Hoüel 1865 und J. F. Encke 1860 weiter ausgestaltet worden (Vgl. [BUR01; S. 237 ff.]).

Wir verwenden jetzt die Pythagoräischen Tripel und nehmen zur Interpolation $\alpha = \vartheta$, wo A, B ganze rationale Zahlen sind

$$\frac{A + \mathrm{i}B}{A - \mathrm{i}B} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\vartheta}\,.$$

Es wird

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2n\,\mathrm{i}\pi\vartheta} = \left(\frac{A + \mathrm{i}B}{A - \mathrm{i}B}\right)^{2n} &= \frac{A_{2n} + \mathrm{i}B_{2n}}{A_{2n} - \mathrm{i}B_{2n}} \\
&= \frac{A_{2n}^2 - B_{2n}^2}{A_{2n}^2 + B_{2n}^2} + \mathrm{i}\,\frac{2A_{2n}B_{2n}}{A_{2n}^2 + B_{2n}^2}
\end{aligned}$$

für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Wir haben also nur rationale Zahlen zu berechnen. Brechen wir beim n-ten Glied ab, so können wir mit Hilfe der Diskrepanz den Fehler ρ_N abschätzen (vergleiche Formeln (7) bzw. [HLA01; (22)]), wo jetzt die Restabschätzung

$$D_N \leq \frac{20C}{\log N}$$

gilt. Dabei ist $C = \sqrt{A^2 + B^2}$. Zu dieser Abschätzung vgl. [HLA08; (10)].

Bemerkung 5.

Wir haben den pythagoräischen Tripeln eine partielle Differentialgleichung zugeordnet. Wir benützen nun die Differentialgleichung des Tunneleffekts: Es sei E eine positive und U eine nichtnegative Zahl. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi^-}{\mathrm{d}x^2} - E\psi^- = 0 \qquad \text{im Intervall} \quad x \leq 0$$

und

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi^+}{\mathrm{d}x^2} - (E-U)\psi^+ = 0 \qquad \text{im Intervall} \quad x \geq 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\psi^-(0) = \psi^+(0)\,, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\big(\psi^-(x)\big)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}\big(\psi^+(x)\big)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}.$$

Wir setzen an

$$\begin{aligned} \psi^-(x) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{E}x} + A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{E}x}\,, \\ \psi^+(x) &= B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{E-U}x} \end{aligned}$$

mit unbestimmten Koeffizienten A und B. Soll $\psi^-(0) = \psi^+(0)$ sein, so muß

$$1 + A = B$$

sein. Aus der zweiten Bedingung folgt

$$\left.\frac{\mathrm{d}\big(\psi^-(x)\big)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \mathrm{i}\sqrt{E}(1-A)$$

und

$$\left.\frac{\mathrm{d}\big(\psi^+(x)\big)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \mathrm{i}B\sqrt{E-U} = \mathrm{i}\sqrt{E-U}(1+A)\,,$$

also folgt

$$\frac{1-A}{1+A} = \sqrt{1-\frac{U}{E}}\,.$$

Man nennt $\sqrt{1-\frac{U}{E}}$ bekanntlich den Brechungskoeffizienten $n(E,U)$.

Wir haben

$$n = \frac{1-A}{1+A}\,, \qquad A = \frac{1-n}{1+n}\,, \qquad B = A + 1 = \frac{2}{n+1}\,.$$

Wir nehmen nun zwei Fälle:

Fall 1:

$$E = (A^2+B^2)^2\,, \qquad U = (2AB)^2\,.$$

Es wird $E > 0$ und

$$n = \sqrt{1-\left(\frac{2AB}{(A^2+B^2)}\right)^2} = \frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}\,.$$

Es wird

$$\begin{aligned}\psi^-(x) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(A^2+B^2)x} + A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(A^2+B^2)x}\,,\\ |\psi^-(x)|^2 &= 2\big(1 + A^2\cos 2(A^2+B^2)x\big)\end{aligned}$$

und

$$|\psi^+(x)|^2 = (1+A)^2 > 0\,.$$

Fall 2:

$$E = (2AB)^2\,, \qquad U = \big(A^2+B^2\big)^2\,.$$

Es wird also $U > E$ und

$$n = \sqrt{1 - \frac{U}{E}} = \mathrm{i}n'\,,$$

wobei

$$n' = \frac{1}{2}\left|\frac{A^-B^2}{AB}\right|\,.$$

Es wird

$$\psi^-(x) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,|AB|x} + A\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,|AB|x}$$

und

$$A = \frac{1-\mathrm{i}n'}{1+\mathrm{i}n'} = \frac{2|AB| - \mathrm{i}\,|A^2-B^2|}{2|AB| + \mathrm{i}\,|A^2-B^2|}\,.$$

Wir erhalten

$$|A| = 1\,.$$

Wir setzen nun

$$A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\vartheta}\,.$$

Es wird

$$\begin{aligned}|\psi^-(x)|^2 &= \big|1 + A\,\mathrm{e}^{-4|AB|x}\big|^2\\ &= 2\big(1 + \cos(\pi\vartheta - 4|AB|x)\big)\end{aligned}$$

und

$$\psi^+(x) = \big(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\vartheta}\big)\,\mathrm{e}^{-(|A^2-B^2|x)}$$

sowie

$$|\psi^+(x)|^2 = 2(1+\cos\pi\vartheta)\,\mathrm{e}^{-(|A^2-B^2|x)}\,,$$

normiert

$$\frac{|\psi^-(x) + \psi^+(x)|^2}{\int\limits_{-\frac{2\pi}{\sqrt{E}}}^{\infty} |\psi^-(x)+\psi^+(x)|^2}\,.$$

Bemerkung 6. Dopplereffekt und Aberration.

Eine Lichtwelle sei gegeben durch

$$S = A\cos\nu\big(t - (x\cos\varphi + y\sin\varphi)\big)\,,$$

transformiert durch die Lorentztransformation

$$= A\cos\nu'\big(t' - (x'\cos\varphi' + y\sin\varphi')\big)\,,$$

dann folgt bekanntlich daraus

$$\nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1-v^2}}(1 - \nu\cos\varphi)\,.$$

Es ist

$$\begin{aligned}\nu'\cos\varphi' &= \frac{\nu}{\sqrt{1-v^2}}(\cos\varphi - v)\,,\\ \nu'\sin\varphi' &= \nu\sin\varphi\,,\end{aligned}$$

also

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - v}\,. \qquad (*)$$

Nun ist

$$\operatorname{tg}(\varphi' - \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\varphi' - \varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi'\operatorname{tg}\varphi}\,.$$

Nehmen wir zwei Primzahlen π, π'

$$\pi = A + \mathrm{i}B\,, \qquad \pi' = C + \mathrm{i}D\,,$$

so ist

$$\begin{aligned} v &= \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}\,, & \sqrt{1-v^2} &= \frac{2|AB|}{A^2 + B^2}\,,\\ \cos\pi\varphi &= \frac{C^2 - D^2}{C^2 + D^2}\,, & \sin\pi\varphi &= \frac{2CD}{C^2 + D^2}\,.\end{aligned}$$

Es wird

$$\nu' = \nu\frac{A^2 - B^2}{2|AB|}\left(1 - \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}\frac{C^2 - D^2}{C^2 + D^2}\right)$$

und

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{1}{2}\left(\frac{A^2 + B^2}{2|AB|}\frac{CD(C^2 + D^2)(A^2 + B^2)}{(A^2D^2 - B^2C^2)}\right)\,.$$

Es ist ja im Nenner in $(*)$

$$\begin{aligned}(A^2+B^2)(C^2-D^2) &= (A^2-B^2)(C^2+D^2)\\ &= (-2)(A^2D^2-B^2C^2)\,.\end{aligned}$$

Also wird

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\pi\varphi'-\pi\varphi) &= \frac{\operatorname{tg}\pi\varphi'-\operatorname{tg}\pi\varphi}{1+\operatorname{tg}\pi\varphi\operatorname{tg}\pi\varphi'}\\ &= \frac{\sin\pi\varphi\big(\cos\pi\varphi(1-\sqrt{1-v^2}\,)+v\sqrt{1-v^2}\,\big)}{\sqrt{1-v^2}\cos\pi\varphi(\cos\pi\varphi-v)+\sin^2\pi\varphi}\\ &= \frac{(A-B)\big(2CD(A-B)+2AB(A+B)\big)}{2AB(C^2-D^2)(A^2D^2-B^2C^2)}\,.\end{aligned}$$

Bemerkung 7 zu §8. Eigenzeit.

Wir können $\lg\left|\frac{A}{B}\right|$ als Eigenzeit deuten. Betrachten wir (Kurvenintegral)

$$\tau = \int \sqrt{(\mathrm{d}t)^2-(\mathrm{d}x)^2}\,.$$

Wir setzen

$$t = \operatorname{Sin}\Phi\,, \qquad x = \operatorname{Cos}\Phi\,.$$

Es ist

$$\mathrm{d}\tau^2 = (\mathrm{d}t)^2-(\mathrm{d}x)^2 = \mathrm{d}\Phi^2\,,$$

also

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\Phi$$

und

$$\tau = \Phi + \text{Konstante}\,.$$

Es ist weiter

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\operatorname{Sin}\Phi}{\operatorname{Cos}\Phi} = \frac{\mathrm{e}^{\Phi}-\mathrm{e}^{-\Phi}}{\mathrm{e}^{\Phi}+\mathrm{e}^{-\Phi}}\,.$$

Nehmen wir jetzt die Pythagoräischen Tripel, so wird

$$\begin{aligned}\operatorname{Sin}\Phi &= \frac{1}{2}\left(\left|\frac{A}{B}\right|-\left|\frac{B}{A}\right|\right),\\ \operatorname{Cos}\Phi &= \frac{1}{2}\left(\left|\frac{A}{B}\right|+\left|\frac{B}{A}\right|\right),\end{aligned}$$

also

$$\mathrm{e}^{\Phi} = \mathrm{e}^{\left|\frac{A}{B}\right|}\,.$$

Dann wird

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} = v\,,$$

also

$$\Phi = \lg\left|\frac{A}{B}\right| \qquad \text{und} \qquad \tau = \lg\left|\frac{A}{B}\right|\,.$$

Die Konstante wurde dabei Null gesetzt.

Nehmen wir statt A, B die A_l, B_l, so erhalten wir

$$\tau_l = \lg\left|\frac{A_l}{B_l}\right|$$

und in dem System mit der Geschwindigkeit

$$v_l = \frac{A_l^2 - B_l^2}{A_l^2 + B_l^2}\,.$$

Wir haben einen Kalender für das bewegte System mit $l = 0$, also $\tau_0 = \tau$, für die Gegenwart, für die Zukunft $l = 1, 2, 3, \ldots$ und für die Vergangenheit $l = -1, -2, -3, \ldots$.

Bemerkung 8.

Wir können die pythagoräischen Tripel in der Radontransformation anwenden. Ziehen wir die Arbeit des Verfassers [HLA03] heran, insbesondere S. 333 die Formeln in Z. 13–17 von oben.

Es sei nun $A + \mathrm{i}B$ eine ganze Gaußsche Zahl (aber kein Ausnahmefall). Wir bilden in gewohnter Weise

$$\frac{A + \mathrm{i}B}{A - \mathrm{i}B} = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\vartheta}\,.$$

Wir nehmen jetzt in der Folge $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ ([HLA03; S. 333, Z. 2 von oben]) die Folge

$$\vartheta, 2\vartheta, \ldots, N\vartheta$$

mit 2π multipliziert. Sie ist gleichverteilt ist mit der Diskrepanz

$$D_N \leq \frac{20\lg(A^2 + B^2)}{\lg N}$$

(siehe [HLA08], (10)). Es wird

$$\cos 2\pi\varphi_k = \frac{A_k^2 - B_k^2}{A_k^2 + B_k^2}\, \sin 2\pi\varphi_k = \frac{2A_kB_k}{A_k^2 + B_k^2}\,.$$

ε_N ist beliebig, nur

$$0 < \varepsilon_N < \mathrm{Min}(1, D_N)\,.$$

Nachdem wir nur mit rationalen Zahlen zu arbeiten haben, erscheint dies für die Praxis zweckmäßig zu sein.

Bemerkung zu §2.

Betrachten wir ein pythagoräisches Quaternion

$$Q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 ,$$

und

$$P = p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3 ,$$

welches ebenfalls pythagoräisch ist und polar zu Q, d.h., es ist

$$PQ = p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 = 0 .$$

Wir betrachten mit P und Q auch die konjugierten Quaternionen $\bar{P}$ und $\bar{Q}$. Es ist z.B.

$$\bar{P} = p_0 - (ip_1 + jp_2 + kp_3) .$$

Dann sind

$$P\bar{Q} = -r \qquad \text{und} \qquad \bar{Q}P = -r'$$

vektorielle Quaternionen, also Vektoren mit $r^2 = r'^2 = 1$ (vgl. [BLS01]).

Bilden wir

$$Q_\varphi = Q\cos 2\pi\varphi - P\, 2\pi \sin\varphi , \qquad P_\varphi = Q\sin 2\pi\varphi + P\cos 2\pi\varphi ,$$

so sind sie wieder polar und es ist

$$P_\varphi \bar{Q}_\varphi = -r , \qquad \bar{Q}_\varphi P_\varphi = -r' .$$

Nehmen wir ein pythagoräisches Tripel $\alpha = A + \mathrm{i}B$, dann ist

$$\cos 2\pi\varphi = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} , \qquad \sin 2\pi\varphi = \frac{2AB}{A^2 + B^2} .$$

Dann sind P_φ, Q_φ wieder pythagoräische Tripel.

Wir haben jetzt wieder die beiden Richtungssphären $r^2 = 1$ und $r'^2 = 1$ vor uns links und rechts von P aus gesehen.

Bemerkung 9.

Machen wir einen kleinen Ausblick auf die allgemeine Relativitätstheorie und benützen das Äquivalenzprinzip, wie es Einstein am Anfang verwendet hat.

Denken wir uns eine eben rotierende Scheibe mit Mittelpunkt in O mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Betrachten wir einen Punkt P auf der Scheibe, der von O den Abstand R hat, wenn die Scheibe ruht. Wie ändert sich der Abstand R', wenn die Scheibe mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert?

Setzen wir $\omega R = v$, so gilt

$$R' = \frac{R}{\sqrt{1 - v^2}} .$$

Setzen wir, wie wir es bei der Lorentztransformation schon oft getan haben,

$$v = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} = \omega R,$$

allgemeiner

$$v_l = \frac{A_l^2 - B_l^2}{A_l^2 + B_l^2} = \omega_l R,$$

so erhalten wir

$$R' = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{A}{B}\right| + \left|\frac{B}{A}\right|\right) R,$$

bzw.

$$R_l' = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{A_l}{B_l}\right| + \left|\frac{B_l}{A_l}\right|\right) R.$$

Der Faktor bei R ist größer als A.

Messen wir die Zeit: Die Messung "Abstand des Punktes P von O ist R bei Ruhen der Scheibe" findet zur Zeit t statt. Dann gilt für die Zeit t' bei der Messung "Abstand des Punktes P von O ist R'"

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{A}{B}\right| + \left|\frac{A}{B}\right|\right) t.$$

Es ist bemerkenswert, daß wir die gleiche Situation bei der Akustik in der Atmosphäre wiederfinden.

Schrödinger hat in seiner Arbeit [SCR01] eine Differentialgleichung von der Gestalt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0.$$

(Die Bezeichnungen wurden hier geändert.)

Eine Lösung ist

$$u = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \cos \nu \left(t + \frac{x}{c(\nu)}\right).$$

Wir setzen

$$\nu = \frac{1}{2\omega}, \qquad c(\nu) = R'(v),$$

so gilt wieder

$$c(\nu) = R'(v) = \frac{R}{\sqrt{1 - c(\nu)^2}}.$$

Bemerkung 10. Ein anderes Beispiel.

Es sei $\psi(y) = \sin^2\sqrt{y}$ und $f(x) = 4x(1-x)$. W. Metzler hat in [MET01] folgendes gezeigt: Es ist

$$f\big(\psi(y)\big) = \psi(4y)\,, \tag{13}$$

dann folgt

$$f^{(n)}\big(\psi(y)\big) = \psi(4^n)\,. \tag{14}$$

Es wird nun in üblicher Weise die Reihe

$$\Phi(y,t) = F\big(\psi(y),t\big) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k f^{(k)}\big(\psi(y)\big) \tag{15}$$

gebildet, die nach (2) gleich ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} t^k \big(\sin 2^k y\big)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} t^k \big(1-\cos 2^{k+1}y\big)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} - S(y,t)\right)\end{aligned} \tag{16}$$

ist, wo

$$S(y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k \cos 2^{k+1} y \tag{17}$$

ist.

Metzler stellt nun nach Hardy fest, daß für $t > \frac{1}{2}$ diese Funktion S für alle y nicht differenzierbar ist. Daraus folgt, daß auch $\Phi(y,t)$ nicht differenzierbar ist.

Wir setzen nun $y = \pi\varphi$, dann schreibt sich

$$S(\pi\varphi,t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k \Big(\big(\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\varphi}\big)^{2^k} + \big(\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\varphi}\big)^{2^k}\Big)\,.$$

Wir nehmen nun eine Gaußsche ganze Zahl $a = A + \mathrm{i}B$ und setzen

$$\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\vartheta}\,,$$

dann wird

$$P\big(\Psi(\pi\vartheta),t\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=1}^{\infty} t^k\left(\left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right)^{2^k} + \left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right)^{2^k}\right)\right),$$

eine bemerkenswerte Formel.

Eine weitere Bemerkung zu den Reihen.

Wir nehmen zwei Gaußsche Primzahlen

$$\pi_1 = A + \mathrm{i}B \qquad \text{und} \qquad \pi_2 = C + \mathrm{i}D\,.$$

Wir setzen

$$\frac{\pi_1}{\bar{\pi}_1} = \frac{A+\mathrm{i}B}{A-iB} = \frac{A^2-B^2}{A^2+B^2} + \mathrm{i}\,\frac{2AB}{A^2+B^2} = \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}\chi_1}\,,$$
$$\frac{\pi_2}{\bar{\pi}_2} = \frac{C+\mathrm{i}D}{C-\mathrm{i}D} = \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}\chi_2}\;.$$

Es sei nun eine Potenzreihe

$$\sum a_n z^n = \sum a_n r^n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$$

konvergent für $0 \le r < 1$ gegeben. Wir setzen

$$r = \left(\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}\right)^2, \qquad \varphi = \pi\chi_2\,,$$

dann wird

$$z = \left(\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}\right)^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\chi_2}\;.$$

Wir transformieren nun nach Euler den Kreis $|z| < 1$ auf die Halbebene $\xi < -(1+\zeta)\frac{1}{2}$, wo $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$ ist, durch die Transformation

$$\zeta = -\frac{z}{1+z}\,,$$

also wird

$$\zeta = -\frac{\left(\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}\right)^2 \frac{\pi_2}{\bar{\pi}_2}}{1+\left(\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}\right)^2 \frac{\pi_2}{\bar{\pi}_2}}\,,$$
$$\zeta = -\frac{(A^2-B^2)^2\pi_2}{\bar{\pi}_2(A^2+B^2)^2 + \pi_2(A^2-B^2)^2}$$

und die Reihe geht über in

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_n \zeta^k\,,$$

wobei

$$d_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

konvergent ist in $\xi > -\frac{1}{2}$.

Bemerkung 11. Anharmonische pythagoräische Tripel.

Wir haben schon in der Einleitung (von "Über einige geometrische Anwendungen der Pythagoräischen Tripel, Teil III") den quadratischen Zahlkörper $Q(\sqrt{-3}\,)$ erwähnt und wollen noch kurz die analogen Formeln ableiten.

In $Q(\sqrt{-3}\,)$ sind die ganzen Zahlen von der Gestalt

$$a + b\zeta\,,$$

wobei ζ die Zahl

$$\zeta = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

und a und b ganze rationale Zahlen sind. ζ genügt der Gleichung

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0\,.$$

Es ist also

$$\zeta^2 + \zeta + 1 = 0\,.$$

Eine zusätzliche Nullstelle zu den trivialen Nullstellen ist

$$\zeta^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}\,.$$

Was nun die Faktorzerlegung betrifft, so haben wir sechs Einheiten

$$\pm 1,\ \pm\zeta,\ \pm\zeta^2\,.$$

Die Zahl 3 ist zerlegbar in

$$3 = (1-\zeta)(1-\zeta^2)\,.$$

Wir betrachten nun in Z alle Primzahlen von der Gestalt $3k+1$, für die Darstellung

$$p = A^2 + 3B^2$$

in ganzrationalen Zahlen A und B gilt.

Γ sei die Menge der ganzen Zahlen. Setzen wir nun

$$b = 2B\,, \qquad a = A + B\,,$$

so sind

$$\Pi = a + b\zeta\,, \qquad \bar{\Pi} = a + b\bar{\zeta} = a + b\zeta^2$$

in Γ nicht assoziierte Primteiler von Γ und es gilt

$$p = \Pi\bar{\Pi}\,.$$

Die assoziierten Teiler von Π sind außer Π noch

$$\zeta\Pi = -b + (a-b)\zeta$$

und

$$\zeta^2\Pi = (b-a) - a\zeta\,.$$

Ist nun $\Pi = a + b\zeta$ eine Primzahl in Γ, so ist die Norm $N(\Pi) = \Pi\bar{\Pi}$ eine rationale Primzahl p von der Gestalt $3k+1$. Wenn b gerade ist, dann ist $B = \frac{1}{2}b$, $A = a - \frac{1}{2}b$ und $p = A^2 + 3B^2$. Wenn b ungerade und auch a ungerade ist, dann wählen wir statt Π die Zahl $\zeta\Pi$. Ist jedoch a gerade, so nehmen wir $\zeta^2\Pi$. Wir können also immer annehmen, daß b gerade ist. Diese Normierung findet sich in [HAS01].

Weiters gilt bei dieser Normierung

$$2A = 2a - b = \sum_{x \bmod p} \left(\frac{X^3 - 1}{p}\right),$$

vgl. auch [AIG01].

Ist α eine Zahl aus Γ, so bilden wir

$$q(\alpha) = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\,. \tag{$*$}$$

Es ist

$$q(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha\bar{\alpha}}\,. \tag{18}$$

Beachten wir, daß

$$\zeta + \bar{\zeta} = -1\,, \qquad \zeta\bar{\zeta} = 1\,, \qquad \zeta^2 = -1 - \zeta$$

ist, so erhalten wir

$$\alpha\bar{\alpha} = (a + b\zeta)\big(a + b\bar{\zeta}\big) = a^2 + b^2 - ab \tag{19}$$

und

$$\alpha^2 = (a + b\zeta)^2 = a^2 + 2ab\zeta + b^2\zeta^2\,. \tag{20}$$

Dies ist weiter gleich

$$a^2 - b^2 + (2ab - b^2)\zeta\,.$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} X &= a^2 - b^2\,,\\ Y &= 2ab - b^2\,,\\ Z &= a^2 + b^2 - ab\,, \end{aligned} \tag{21}$$

so ist also

$$q(\alpha) = Z^{-1}(X + Y\zeta)\,. \tag{22}$$

Daraus folgt

$$|q|^2 = Z^{-2}(X^2 + Y^2 - XY)\,. \tag{23}$$

Nun ist aber $|q|^2 = 1$, wie sofort aus der Definition von q folgt, also ist (X, Y, Z) Lösung der Gleichung

$$X^2 + Y^2 - XY = Z^2\,.$$

Wir nennen nun das Tupel in (4) ein anharmonisches Tupel (kurz AH-Tupel) im Gegensatz zum pythagoräischen Tupel $(A^2-B^2,\ 2AB,\ A^2+B^2)$, das wir als harmonisches Tupel (kurz H-Tupel) bezeichnen. Weiters ordnen wir dem H-Tupel ein H-Paar

$$\left(\frac{X - \frac{1}{2}Y}{Z}\,,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{Y}{Z}\right) \tag{24}$$

zu. Nun müssen wir zur Zahl $X + \mathrm{i}Y$ die assoziierten Zahlen

$$X_1 + \mathrm{i}Y_1\zeta = (X + \mathrm{i}Y)\zeta$$

und

$$X_2 + \mathrm{i}Y_2\zeta = (X + \mathrm{i}Y)\zeta^2$$

betrachten und die H-Tupel (X_1, Y_1, Z) und (X_2, Y_2, Z) berechnen.

Nach $(8')$, $(8'')$ sind jetzt statt a, b die Buchstaben X und Y zu nehmen und (4) zu benützen

$$X_1 + \mathrm{i}Y_1 = -Y + (X - Y)\zeta$$

und

$$X_2 + \mathrm{i}Y_2 = (Y - X) - X\zeta$$

zu nehmen. Wir erhalten die H-Tupel

$$\begin{aligned} X_1 &= 2ab - a^2\,, \\ Y_1 &= b^2 - a^2\,, \\ Z_1 &= Z \end{aligned} \tag{4'}$$

bzw.

$$\begin{aligned} X_2 &= b^2 - 2ab\,, \\ Y_2 &= a^2 - 2ab\,, \\ Z_2 &= Z\,. \end{aligned} \tag{4''}$$

Sie sind ebenfalls Lösungen von (7). Wir nehmen wieder das H-Tupel, für das $\frac{Y}{2}$ ganzzahlig ist. Wenn dies bei (8) nicht der Fall sein sollte, so nehmen wir

$$\left(\frac{X_1 - \frac{1}{2}Y_1}{Z}, \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{Y_1}{Z}\right) \qquad \text{oder} \qquad \left(\frac{X_2 - \frac{1}{2}Y_2}{Z}, \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{Y_2}{Z}\right)$$

(Hasse-Normung).

Wir können also ohne Einschränkung annehmen, daß das gerade bei (8) der Fall ist.

Da q vom Betrag Eins ist, können wir setzen

$$q(\alpha) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\vartheta} \tag{25}$$

(π Kreiszahl).

Wir können die Frage stellen, ob $\vartheta(\alpha)$ ausführlich geschrieben irrational ist oder nicht. Wenn α eine Primzahl Π aus Γ ist, dann ist dies sicher der Fall, denn wäre ϑ rational

$$\vartheta = \frac{m}{n},$$

so wäre

$$\frac{\Pi}{\bar{\Pi}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi m}{n}},$$

also

$$\left(\frac{\Pi}{\bar{\Pi}}\right)^{2n} = 1$$

und

$$\Pi^{2n} = \bar{\Pi}^{2n}.$$

Dies widerspricht der Eindeutigkeit der Zerlegung der Zahlen in Γ, da ja Π und $\bar{\Pi}$ nicht assoziiert sind.

Da ϑ irrational ist, so ist die Folge $\big(l\vartheta - [l\vartheta]\big)$, wo l alle natürlichen Zahlen durchläuft, eine gleichverteilte Folge. Wir können analog wie bei der pythagoräischen Folge die Diskrepanz D_N abschätzen:

$$D_N \leq 10\frac{A^2 + 3B^2}{\log N}. \tag{26}$$

Wir wollen in der allgemeinen Theorie weitergehen.

Wenn α und β zwei Zahlen aus Γ sind, so ist

$$q(\alpha\beta) = q(\alpha)q(\beta). \tag{27}$$

Setzen wir

$$\gamma = \alpha\beta = v + u\zeta. \tag{28}$$

Ist

$$\alpha = a + b\zeta\,, \qquad \beta = c + d\zeta\,,$$

so erhalten wir

$$v = ac - bd\,, \qquad u = bc + ad - bd\,. \tag{29}$$

Für $\alpha = \beta$ erhalten wir

$$v = a^2 - b^2\,, \qquad u = 2ab - b^2\,.$$

Wir können wieder voraussetzen, daß u gerade ist, sonst betrachten wir eine assoziierte Zahl von γ.

Ordnen wir jeder Zahl α eine Matrix

$$M(\alpha) = \begin{bmatrix} a - \frac{b}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3}b \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}b & a - \frac{b}{2} \end{bmatrix} \tag{30}$$

zu, so erhält man (13) einfach durch Matrizenmultiplikation

$$M(\alpha)M(\beta) = M(\gamma)\,. \tag{31}$$

Das ist besonders praktisch, wenn wir Potenzen von α erhalten wollen

$$\alpha^l = a_l + b_l\zeta\,,$$

da

$$M(\alpha^l) = \big(M(\alpha)\big)^l \tag{15'}$$

ist.

Nehmen wir nun s verschiedene nicht assoziierte Primzahlen

$$\Pi_1, \ldots, \Pi_s \tag{32}$$

aus Γ mit den zugeordneten Primzahlen $p_1, \ldots, p_s$ und den zugeordneten $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_s$, so sind sie modulo Eins linear unabhängig. Man kann wie bei den H-Zahlen zeigen (vgl. [HLA11]), daß die Folge

$$\big(l\vartheta_1 - [l\vartheta_1],\ \ldots,\ l\vartheta_s - [l\vartheta_s]\big)$$

im s-dimensionalen Einheitswürfel E^s gleichverteilt ist mit einer Diskrepanz D_N, wobei

$$D_N \leq C \leq P_s \frac{(\log\log N)^s}{\log N}\,, \tag{33}$$

wo $P_s = p_1, \ldots, p_s$ ist.

Wir wollen noch einen Approximationssatz beweisen. Wir betrachten zwei Funktionen im Intervall $|t| < 1$ und setzen

$$f(t) = \frac{1 - t^2}{1 - t + t^2}\,, \qquad g(t) = \frac{2t - t^2}{1 - t + t^2}\,. \tag{34}$$

Weiters setzen wir

$$u(t) = f(t) - \frac{1}{2}g(t), \qquad v(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}g(t). \tag{35}$$

Es ist

$$f^2 + g^2 - fg = 1$$

und

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Es ist nun für $|t| < 1$

$$|f'(t)| \le \frac{4}{(1-t+t^2)^2} \tag{36}$$

und

$$|g'(t)| \le \frac{6}{(1-t+t^2)^2}. \tag{20'}$$

Weiters ist

$$1 - t + t^2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4},$$

also wird

$$|f'(t)| \le \frac{60}{9} \tag{37}$$

und

$$|g'(t)| \le \frac{32}{9}. \tag{21'}$$

Es sei nun γ eine Zahl mit $|\gamma| < 1$. Zu jeder Zahl $N > 1$ gibt es ein q mit $1 \le q \le N$, so daß

$$\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{qN}. \tag{*}$$

Es wird also

$$\left|f(\gamma) - f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \le \operatorname{Max}|f'|\left|\gamma - \frac{p}{q}\right|$$

und

$$\left|g(\gamma) - g\left(\frac{p}{q}\right)\right| \le \operatorname{Max}|g'|\left|\gamma - \frac{p}{q}\right|,$$

also

$$\left|f(\gamma) - f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \le \frac{100}{qN} \tag{38}$$

und

$$\left|g(\gamma) - g\left(\frac{p}{q}\right)\right| \le \frac{100}{qN}. \tag{22'}$$

Es wird

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{q^2 - p^2}{q^2 - pq + p^2}, \qquad g\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{2pq - p^2}{q^2 - pq + p^2}.$$

Nehmen wir nun an, q wäre gerade, so erhalten wir

$$\left|\frac{1 - \gamma^2}{1 - \gamma + \gamma^2} - \frac{q^2 - p^2}{q^2 - pq + p^2}\right| \leq \frac{100}{qN} \tag{39}$$

und

$$\left|\frac{2\gamma - \gamma^2}{1 - \gamma + \gamma^2} - \frac{2pq - p^2}{q^2 - pq + p^2}\right| \leq \frac{100}{qN}. \tag{23'}$$

Nehmen wir statt f und g die Funktionen

$$f_1(t) = \frac{2t - 1}{t^2 - t + 1}, \qquad g_1(t) = \frac{1 - t^2}{t^2 - t + 1} \tag{22''}$$

und

$$f_2(t) = \frac{t^2 - 2t}{t^2 - t + 1}, \qquad g_2(t) = \frac{1 - 2t}{t^2 - t + 1}, \tag{22'''}$$

so wird

$$f_1\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{2pq - q^2}{p^2 - pq + q^2}, \qquad g_1\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{q^2 - p^2}{p^2 - pq + q^2}$$

bzw.

$$f_2\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^2 - 2pq}{p^2 - pq + q^2}, \qquad g_2\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{q^2 - 2pq}{p^2 - pq + q^2}$$

und

$$f_1(\gamma) = \frac{2\gamma - 1}{1 - \gamma + \gamma^2}, \qquad g_1(\gamma) = \frac{1 - \gamma^2}{1 - \gamma + \gamma^2}$$

bzw.

$$f_2(\gamma) = \frac{\gamma^2 - 2\gamma}{1 - \gamma + \gamma^2}, \qquad g_2(\gamma) = \frac{1 - \gamma}{1 - \gamma + \gamma^2}.$$

Schluß bemerkung.

Es sei α eine geeignete ganze Gaußsche Zahl $A + \mathrm{i}B$, so haben wir ϑ stets definiert durch die Gleichung

$$\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\vartheta} = \cos\pi\vartheta + \mathrm{i}\sin\pi\vartheta,$$

wir schreiben deutlicher $\vartheta(\alpha)$.

Es ist

$$\sin\pi\vartheta = \frac{2AB}{A^2 + B^2}.$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$ setzen, dann ist

$$\pi\vartheta = \arcsin \frac{2AB}{A^2 + B^2} .$$

Es ist

$$\left(\frac{2AB}{A^2 + B^2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}\right)^2 .$$

Nun ist

$$\|A^2 - B^2\| = \big(|A| - |B|\big)\big(|A| + |B|\big) ,$$

da $|A| - |B|$ als ganze Zahl ≥ 1 ist. Es ist also

$$\left(\frac{2AB}{A^2 + B^2}\right)^2 \leq 1 - \left(\frac{|A| + |B|}{A^2 + B^2}\right)^2 . \qquad (*)$$

Die Potenzreihe von $\arcsin x$ ist für $|x| < 1$ konvergent, wir können sie daher anwenden. Es gibt aber eine besser konvergierende Reihe für $(\arcsin x)^2$. Es gilt nämlich (vgl. [KNO01; S. 275])

$$(\arcsin x)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)^2}{(2k)!}(2x)^{2k} . \qquad (**)$$

Es wird also

$$(\pi\vartheta)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)^2}{(2k)!}\left(2\frac{2AB}{A^2 + B^2}\right)^{2k} .$$

Man könnte auch die Fourierreihe für die Funktion

$$\left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$$

aufstellen. Man hätte dann

$$\pi^2\left(\frac{1 - \vartheta}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{k^2} , \qquad (***)$$

wo wir A_k bereits benützt haben. Es wird

$$A_k + \mathrm{i}B_k = (A + \mathrm{i}B)^k = \alpha^k .$$

Es genügt an sich, ϑ nur für die Gaußschen Primzahlen zu bestimmen. Zerlegt man α in Primzahlen in der Form

$$\alpha = \pi_1^{L_1} \cdots \pi_s^{L_s} ,$$

so ist

$$\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} = \left(\frac{\pi_1}{\bar{\pi}_1}\right)^{L_1} \cdots \left(\frac{\pi_s}{\bar{\pi}_s}\right)^{L_s} ,$$

also wird

$$\vartheta = L_1\vartheta_1 + \cdots + L_s\vartheta_s \pmod 2\,, \tag{†}$$

an sich eine wichtige Gleichung.

Als Kontrolle können wir die Chebyshev-Polynome berechnen

$$T_L(\pi\vartheta) = \cos L\pi\vartheta = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{A+\mathrm{i}B}{A-\mathrm{i}B}\right)^L + \left(\frac{A-\mathrm{i}B}{A+\mathrm{i}B}\right)^L\right]$$

bzw.

$$U_L(\pi\vartheta) = \sin L\pi\vartheta = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\left[\left(\frac{A+\mathrm{i}B}{A-\mathrm{i}B}\right)^L - \left(\frac{A-\mathrm{i}B}{A+\mathrm{i}B}\right)^L\right].$$

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen den Gaußschen Zahlen $\alpha = a+\mathrm{i}b$ und der zugehörigen Norm $N(\alpha) = a^2+b^2$, wenn p eine Primzahl von der Gestalt $4k+1$ ist, die vielleicht schon von Gauß, aber vor allem von G. Eisenstein[5] hervorgehoben wurde. Sie beruht auf der komplexen Multiplikation der Lemniskatenfunktion $\operatorname{sinam} u$, kurz $s(u)$ genannt, der Umkehrfunktion des Integrals

$$\int_0^u \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}\,.$$

Diese Funktion besitzt die reelle Periode 2ω und die komplexe Periode $(1+\mathrm{i})\omega$, wobei

$$\omega = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}$$

ist. Es gilt weiters

$$s\big((a+\mathrm{i}b)u\big) = s(u)\frac{U\big(s^4(u)\big)}{V\big(s^4(u)\big)}\,,$$

wobei $U(w)$ und $V(w)$ Polynome vom Grad $\frac{1}{4}(p-1)$ sind und ihre Koeffizienten ganze komplexe Zahlen sind (die noch besondere Eigenschaften haben, vgl. dazu G. Eisenstein[3]).

Man kann an Verallgemeinerungen der pythagoräischen Tripel denken.

Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_s$ ganze Zahlen und es seien $(s+1)$ Tupel gegeben durch

$$\frac{a_0^2 - (a_1^2 + \cdots + a_s^2)}{a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_s^2}\,, \qquad \frac{2a_0a_j}{a_0^2 + \cdots + a_s^2} \quad \text{für } j = 1, \ldots, s\,.$$

Den Fall, daß die a_j reell bzw. komplex sind, habe ich in meiner Arbeit [HLA10] behandelt.

[5] J. Reine Angew. Math. **30** (1846).

Benützt man Cliffordsche Zahlen $p_1, \dots, p_s$ mit $p_j^2 = 1$ für alle j und $p_j p_k = -p_k p_j$, so kann man die $(s+1)$ Tupel von der Gestalt $(\mathrm{i} = \sqrt{-1})$

$$\frac{\left(a_0 - \mathrm{i}(a_1 + \cdots + a_s)\right)^2}{a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_s^2}$$

zusammenfassen, symbolisch

$$\frac{a_0 - \mathrm{i}(a_1 p_1 + \cdots + a_s p_s)}{a_0 + \mathrm{i}(a_1 p_1 + \cdots + a_s p_s)}.$$

Anwendungen der pythagoräischen Tripel hat der Verfasser schon früher angegeben. Ich verweise auf [HLA06; Kap. 10] (Das Coulombgas) und vor allem auf [HLA06; Kap. 12] (Über ein Modell der Turbulenz), sowie [HLA09] und [HLA10].

REFERENCES

[AIG01] AIGNER, A.: *Zahlentheorie*, Verlag Walter de Gruyter, Berlin, 1975.

[BEH01] BEHNKE, H. SOMMER, F.: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.* Grundlehren Math. Wiss. 77, Springer, Berlin, 1955.

[BIA01] BIANCHI, L.: *Vorlesungen über Differentialgeometrie* (M. Lukat, Übers.), Teubner, Leipzig, 1899.

[BIE01] BIEBERBACH, L.: *Eine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung im Hilbertschen Raum*, Comment. Math. Helv. **4** (1932), 248 255.

[BLA01] BLANUSZA, D.: *Eine isometrische und singularitätenfreie Einbettung des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes im Hilbertschen Raum*, Monatsh. Math. **57** (1955), 102–108.

[BLA02] BLANUSZA, D.: *Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume*, Monatsh. Math. **59** (1957), 217 229.

[BLS01] BLASCHKE, W.: *Analytische Geometrie.* Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiet der exakten Wissenschaften, mathematische Reihe, Bd. 16 (2. Aufl.), Birkhäuser, Basel, 1954.

[BUR01] BURKHARDT, H.: *Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 6. (Schluß-) Lieferung*, Deutsch. Math. -Verein. **10** (1908), 1393-1804.

[CHA01] CHANDRASEKHARAN, K.: *Elliptic Functions*, Springer, Berlin, 1985.

[CON01] COHN-VOSSEN, S.: *Rezension von* [BIE01], Zbl **5** (1933), 82.

[DES01] DESOYER, K.—KOPACEK, P. TROCH, I.: *Industrieroboter und Handhabungsgeräte*, Verlag Oldenbourg, München-Wien, 1985.

[GAU01] GAUSS, C. F.: *Gesammelte Werke, Projektion des Würfels, Bd. 8* (2. Abdruck), Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1990.

[GÖD01] GOEDEL, K.: *An example of a new type of cosmological solution of Einstein's field equations of gravity*, Rev. Modern Phys. **21** (1949), 447 450.

[GÖD02] GÖDEL, K.: *Collected works. Volume II: Publications 1938-1974* (S. Feferman et al., Hrsg.), Oxford Univ. Press, New York, NY, 1990.

[GÖD03] GÖDEL, K.: *Collected Works. Vol. III: Unpublished essays and lectures* (S. Feferman, Hrsg.), Oxford Univ. Press, New York, NY, 1995.

[GRA01] GRAUERT, H.: *Discrete Geometry*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II **2** (1996), 343–362.

[GRÖ01] GRÖBNER, W.: *Matrizenrechnung*, Bibl. Inst. Mannheim, Mannheim, 1966.

[HAD01] HADWIGER, H.: *Über die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie*, Elem. Math. **1** (1946), 98 100.

[HAS01] HASSE, H.: *Vorlesungen über Zahlentheorie.* In: Grundlehren Math. Wiss. 59 (2. Aufl.), Springer-Verlag, Berlin, 1964, pp. 171 175.

[HAW01] HAWKING, ST. ELLIS, G. F.: *The Large Scale Structure of Space Time*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.

[HAW02] HAWKING, ST.—PENROSE, R.: *Raum und Zeit* (dt. von C. Kiefer), Rowohlt 1998.

[HEY01] HEYERHOFF, M.: *Zur frühen Geschichte der Solitonentheorie.* In: Mathematik im Wandel, Anregungen zum fächer-übergreifenden Mathematikunterricht; Mathematikgeschichte und Unterricht, Bd. 1 (M. Toepell, Hrsg.), Verlag Franzbecker, Hildesheim-Berlin, 1998, pp. 294 305.

[HIL01] HILBERT, D. COHN-VOSSEN, ST.: *Anschauliche Geometrie.* Grundlehren Math. Wiss. 37, Springer-Verlag, Berlin, 1932.

[HLA00] HLAWKA, E.: *Interpolation analytischer Funktionen auf dem Einheitskreis.* In: Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis (E. Landau Gedenkband), VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968, pp. 99–118.

[HLA01] HLAWKA, E.: *Über eine Klasse von gleichverteilten Folgen*, Acta Arith. **53** (1990), 389 402.

[HLA02] HLAWKA, E.: *Approximation von Irrationalzahlen und pythagoräische Tripel* (Vortrag anläßlich des 70. Geburtstags von Professor E. Peschl). In: Bonner Math. Schriften 121, Univ Bonn, Bonn, 1980, pp. 1–32;
und
In: Edmund Hlawka – Selecta (P. M. Gruber, W. M. Schmidt, Hrsg.), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1990, S. 431 ff..

[HLA03] HLAWKA, E.: *Zur Radontransformation*, Sitzungsber. Abt. II, Österreich. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl. **198** (1989), 331 379.

[HLA04] HLAWKA, E.: *Über eine Klasse von gleichverteilten Folgen*, Acta Arith. **53** (1990), 389 402.

[HLA05] BINDER, CHR. HLAWKA, E.—SCHOISSENGEIER, J.: *Über einige Beispiele zur Theorie der Gleichverteilung*, Math. Slovaca **43** (1993), 427 446.

[HLA06] HLAWKA, E.: *Statistik und Gleichverteilung.* Grazer Math. Ber. 335, Karl-Franzens-Univ. Graz, Graz, 1998.

[HLA07] HLAWKA, E.: *Pythagorean Tripels.* In: Number Theory (R. P. Bambah, V. C. Dumir, R. J. Hans-Gill, eds.), Hindustan Book Agency, 1999.

[HLA08] HLAWKA, E.: *Über einige geometrische Anwendungen im Zusammenhang mit Pythagoräischen Tripeln und Gleichverteilung*, Aequationes Math. **58** (1999), 1 13.

[HLA09] HLAWKA, E.: *Beiträge zur Theorie der Gleichverteilung und ihren Anwendungen I V* (Dem Andenken an W. Nöbauer gewidmet), Sitzungsber., Abt. II, Österreich. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl. **197** (1988), 1–287.

[HLA10] HLAWKA, E.: *Über Dirichletsche Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, die mit Schwingungsgleichungen verwandt sind*, Sitzungsber., Abt. II, Österreich. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl. **206** (1997), 217 239.

[HLA11] HLAWKA, E.: *Über eine Klasse von gleichverteilten Folgen*, Acta Arith. **53** (1990), 389–402.

[HLG01] HILGERT, J.: *Group Theoretical Aspects of Goedels Cosmological Model*, Jbuch. Kurt-Gödel-Ges. **1991** (1990), 3 11.

[HUR01] HURWITZ, A.: *Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II (1897).

[HUR02] *Mathematische Werke von A. Hurwitz* (ETH Zürich, Abt. Mathematik und Physik, Hrsg.), Birkhäuser, Basel, 1933.

[KLE01] KLEIN, F.: *Vorlesungen über die hypergeometrischen Funktionen.* Grundlehren Math. Wiss. 39, Julius Springer, Berlin, 1933.

[KNO01] KNOPP, K.: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.* Grundlehren Math. Wiss. 2 (3. Aufl.), Julius Springer, Berlin, 1931.

[KUN01] KUNDT, W.: *Trägheitsbahnen in einem von Gödel angegebenen kosmologischen Modell*, Z. Phys. **145** (1956), 611–620.

[MET01] METZLER, W.: *Note on a chaotic map that generates nowhere-differentiability*, Math. Semesterber. **40** (1993), 87 90.

[NEW01] NEWELL, A. C.: *The History of the Soliton*, J. Appl. Math. **50** (1983), 1127 1138.

[PER01] PERRON, O.: *Kreisverwandtschaften in der hyperbolischen Geometrie*, Math. Z. **93** (1966), 69 79.

[RIB01] RIBENBOIM, P.: *Fermat's Last Theorem for Amateurs*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[SAV01] SAVILLE, D. J.—WOOD, G. R.: *Statistical Methods A Geometric Primer*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[SCH01] SCHERRER, W.: *Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter*, Elem. Math. I **6** (1946), 97–98.

[SCR01] SCHRÖDINGER, E.: *Zur Akustik in der Atmosphäre*, Phys. Z. **18** (1917), 445-453; *E. Schrödinger, Gesammelte Abhandlungen, Bd. 4* (Österreich. Akademie d. Wissenschaften, Hrsg.), Vieweg & Sohn, Braunschweig-Wiesbaden, 1984, S. 3 12.

[SEE01] SEEGER, A.—DONTH, H.—KOCHENDÖRFER, A.: *Theorie der Versetzungen in 1-dimensionalen Atomreihen III*, Z. Phys. **134** (1953), 173 193.

[SEE02] SEEGER, A.: *Solitons in Crystals.* In: Continuum Models of Discrete Systems (CMDS3) (E. Kröner, K.-H. Anthony, eds.), Proc. 3rd Internat. Symposium on Continuum Models of Discrete Systems, Freudenstadt, Germany, June 24 30, 1979, Part 2 – Thermodynamics, Plasticity, Defects;
SM Study 15, University of Waterloo Press 1980, pp. 253 327.

[SEE03] SEEGER, A.: *Kristallphysik: Drei Beispiele.* In: Forschung in der Bundesrepublik Deutschland, Beispiele, Kritik, Vorschläge (Chr. Schneider, ed.), Verlag Chemie, 1983, pp. 587 609.

[SOB01] SOBOL, I. M.: *Die Monte-Carlo Methode.* Mathematische Schülerbücherei 50, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971.

[STI01] STIEFEL, E.—FÄSSLER, A.: *Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendung.* Teubner Studienbüch. Math. 46, Verlag B. G. Teubner, Stuttgart, 1979.

[TAS01] TASCHNER, R. J.: *Holzwege zur Mathematik I. Eine Einführung in die höhere Mathematik*, Bibliographisches Institut, Mannheim-Wien-Zürich, 1983.

[TAU01] TAUSSKY-TODD, O.: *Sums of squares*, Amer. Math. Monthly **77** (1970), 805 830.

[TAU02] TAUSSKY-TODD, O.: *Sets of complex matrices which can be transformed to triangular form.* In: Numerical methods (Third Colloq., Keszthely, 1977), Northholland, Amsterdam-New York, 1980, pp. 579–590.

[TOE01] *Mathematik im Wandel, Anregungen zum fächer-übergreifenden Mathematikunterricht* (M. Toepell, Hrsg.), Mathematikgeschichte und Unterricht, Bd. 1, Verlag Franzbecker, Hildesheim-Berlin, 1998.

[WAE01] van der WAERDEN, B. L.: *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*, Springer-Verlag, Berlin, 1932.

[WEY01] WEYL, H.: *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (2. Aufl.), Verlag Hirzel, Leipzig, 1947.

[WUN01] WUNDERLICH, W.: *Zur Geometrie der Vogeleier*, Sitzungsber., Abt. II, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl. **187** (1978), 1–19.

[WUN02] WUNDERLICH, W.: *Höhere Radkurven*, Österreich. Ingenieurarchiv **1** (1947), 277 296.

[WUN03] WUNDERLICH, W.: *Höhere Radlinien als Näherungskurven*, Österreich. Ingenieurarchiv **4** (1956), 4–11.

[ZEIT01] ZEITLER, H.: *Was haben Rollkurven und Mandelbrotmengen miteinander zu tun*, DdM **4** (1995), 276–289.

Received March 30, 2004

Institut für Technische Mathematik
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstr. 8-11/1141
A-1040 Wien
AUSTRIA

E-mail: ehlawka@osiris.tuwien.ac.at