Literatura

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 1, D87--D90

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/133457`

LITERATURA

A. Recense vědeckých publikací.

А. Я. Хинчин: Три жемчужины теории чисел. (*A. Chinčin:* **Tři perly theorie čísel.**) OGIZ, Moskva-Leningrad 1947, str. 72, cena 1 r. 50 k.

Vznik této knížky je osvětlen zajímavým „Dopisem na frontu" z března 1945, jenž je otištěn místo předmluvy, a v němž autor píše svému raněnému žáku asi toto:

Žádal jste mě o nějaké „matematické perličky" a způsobil jste mně tím trojí radost: Předně je to svědectví, že se uzdravujete. Za druhé je Váš zájem důkazem toho, že Vaše vojenská služba nezpůsobila krisi ve Vašem životě (jak tomu bývalo za první světové války), nýbrž že dnešní mládež — neboť takových případů je více — chápe obranu vlasti na jedné straně a svoji vědeckou, uměleckou či praktickou práci na druhé straně jako dva články téhož velikého díla. Třetí radost jsem pak prožil, když jsem vybíral a vypracovával pro Vás tyto tři skutečné perly naší nauky. Tyto tři problémy mají dva společné znaky: předně byly řešeny naprosto elementárními methodami (ovšem „elementární" neznamená „snadný"), a za druhé byly rozřešeny zcela mladými matematiky, zatím co mnoho důstojných zkušených učenců předtím na nich ztroskotalo.

Knížka je tedy napsána vlastně pro mladého muže, který absolvoval pouze dva semestry university. Je proto psána velmi přístupně, podrobně a při tom živě, s mnohými poznámkami o genesi problémů a o smyslu použitých method. Její tištěné vydání je také výslovně „určeno pro široké kruhy milovníků matematiky a je srozumitelno žákům vyšších tříd střední školy" — vyšlo nákladem 25 000 exemplářů!

A teď k jednotlivým problémům. První z nich vypadá takto:

Aritmetickou posloupností o n členech budeme rozuměti každou posloupnost tvaru $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 1)\,d$, kde $d \neq 0$ (takže tato čísla jsou různá). Zvolme nyní libovolné celé kladné n a rozdělme všechna přirozená čísla do dvou (disjunktních) množin M a N. Potom jest dokázati větu: *Aspoň jedna z množin M, N obsahuje aritmetickou posloupnost o n členech.* Důkaz, podaný van der Waerdenem r. 1928, postupuje indukcí podle n; aby však bylo možno indukci provésti, je nutno napřed větu zobecniti.

Druhý problém pochází od sovětského matematika Šnirlmana (1929). Jde o tuto věc: Budiž dána nějaká množina A celých nezáporných čísel, jež obsahuje nulu, takže její prvky lze srovnati v rostoucí posloupnost $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$. Budiž B druhá taková množina: $0 = b_0 < b_1 < b_2 < \ldots$; znakem $A + B$ značím množinu všech čísel, jež lze psáti ve tvaru $a_i + b_k$ $(i, k = 0, 1, \ldots)$; podobně definujeme obecně $A + B + C$ atd. Zaveďme nyní „hustotu" $d(A)$ takto: Označme znakem $\nu(x)$ počet všech *kladných* čísel z A, jež jsou $\leqq x$ $(x = 1, 2, 3, \ldots)$; definujme pak $d(A)$ jako infimum (dolní hranici) všech čísel $\nu(x) \,.\, x^{-1}$ $(x = 1, 2, \ldots)$. Je vždy $0 \leqq d(A) \leqq 1$; rovnost $d(A) = 1$ značí pak, že A obsahuje všechna přirozená čísla. Snadno se ukáže: Je-li $d(A) + d(B) \geqq 1$, je $d(A + B) = 1$. Ale jak je to v obecném případě? Šnirlman snadno dokázal, že

$$1 - d(A + B) \leqq (1 - d(A))(1 - d(B)), \tag{1}$$

neboli $d(A + B) \geqq d(A) + d(B) - d(A)\,d(B)$ (to byl velmi důležitý výsledek; proč, uvidíme za chvíli). Ale všechny numerické příklady splňovaly ostřejší nerovnost $d(A + B) \geqq d(A) + d(B)$, pokud ovšem bylo $d(A) + d(B) \leqq 1$. Vzniká nyní otázka, *zda tato nerovnost platí vždy*. Tato domněnka byla předmětem mnohých prací, zvláště Chinčin podal velmi důležité příspěvky, ale její důkaz provedl až v r. 1942 americký matematik Mann.

Třetí problém této knížky je *Waringův problém*. Jde o důkaz této věty: Budiž k libovolné přirozené číslo; budiž P množina čísel $0^k, 1^k, 2^k, 3^k, \ldots$. Potom existuje přirozené číslo s takové, že každé přirozené číslo je součtem s (stejných nebo různých) čísel z P. Jinými slovy: Značíme-li znakem nP množinu $P + P + \ldots + P$ (n sčítanců), máme dokázati, že hustota $d(sP)$ je rovna 1. První důkaz této věty provedl Hilbert r. 1907. Dalšími pokroky v této otázce vynikli zvláště Hardy a Littlewood (v dvacátých letech) a Vinogradov (hlavně v posledních 15 letech). Ale všechny tyto důkazy užívaly vyšších prostředků a bylo si přáti, aby pro tuto elementární větu byl nalezen elementární důkaz. Takový důkaz podal teprve v r. 1942 sovětský matematik Linnik. Základ jeho postupu je tento: Z (1) plyne indukcí $1 - d(A_1 + \ldots + A_n) \leqq (1 - d(A_1)) \ldots (1 - d(A_n))$, a odtud pro $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ plyne $1 - d(nA) \leqq (1 - d(A))^n$. Tedy: Je-li $d(A) > 0$, lze voliti n tak, že $d(nA) > \frac{1}{2}$, načež $d(nA) + d(nA) > 1$, z čehož, jak víme, plyne $d(2nA) = 1$. Tedy: Jestliže pro jisté r dokáži, že $d(rP) > 0$, bude pro jisté n platiti $d(nrP) > \frac{1}{2}$, a tedy $d(sP) = 1$ pro $s = 2nr$. Tedy: místo abych dokázal, že každé přirozené číslo bez výjimky je součtem s čísel z P, stačí dokázat, že „značná část" přirozených čísel je součtem r čísel z P, totiž že $d(rP) > 0$. Vidíte, jak užitečná je Šnirlmanova idea. A Linnikova zásluha je v tom, že provedl velmi elementární (ne však jednoduchý) důkaz nerovnosti $d(rP) > 0$.*)

To jsou tři problémy, jejichž řešení je s plnou obšírností, jasně a srozumitelně (Chinčin je mistr slohu) podáno v této knížce. Studium knížky způsobí radost odborníkovi i milovníku matematiky, který má rád přesnou dedukci a esteticky uspokojující strukturu důkazů. *V. Jarník.*

И. М. Виноградов: Основы теории чисел. (*I. M. Vinogradov*: **Úvod do theorie čísel**), 4. přepracované a doplněné vydání, OGIZ, Moskva-Leningrad, 1944. str. 142, cena 4 r.

Malá knížka slavného matematika je schválenou universitní učebnicí. Vlastnímu výkladu je věnováno pouhých 53 stránek, které v sedmi kapitolách obsahují stručný, ale jasný a úplný výklad o elementech theorie čísel: Dělitelnost, největší společný dělitel a nejmenší společný násobek, Euklidův algoritmus a řetězové zlomky, prvočísla a rozklad v prvočinitele, číselně theoretické funkce, pojem a vlastnosti kongruence, úplné a redukované zbytkové systémy, věta Eulerova ($a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ pro $(a, m) = 1$), lineární kongruence, jejich řešení řetězovými zlomky, systémy lineárních kongruencí, obecné věty o kongruencích vyššího stupně, kvadratické zbytky a nezbytky, zákon reciprocity pro symbol Legendrův i Jacobiův, primitivní kořeny a theorie indexů. Látka tedy celkem běžná, ale přes to obsahující leckterou svéráznou podrobnost ve výběru i v podání. Tak na př. se mně zdá, že kapitola o číselně theoretických funkcích je přes svou stručnost (5 stránek) zpracována důkladněji, než bývá v stručných knížkách toho druhu zvykem; hlavně pojem multiplikativní funkce ($f(x) f(y) = f(xy)$ pro celá, kladná, nesoudělná x, y) je zde zaveden a objasněn jednak na součtech, vztahujících se k dělitelům daného čísla (na př. součet s-tých mocnin dělitelů), jednak na Eulerově funkci φ a Möbiově funkci μ. Zvláště význam Möbiovy funkce je zde šťastně a výrazně zdůrazněn.

Ke každé kapitole je připojena řada numerických cvičení (celkem asi 100), jejichž řešení jsou rovněž uvedena. Hlavním půvabem knížky jsou pro zkušenějšího čtenáře obecnější úlohy či problémy, připojené rovněž ke každé kapitole (napočetl

*) Důkazem Linnikovým nebyla dotčena ovšem důležitost starších neelementárních důkazů, které m. j. dávají pro číslo s daleko lepší odhad shora, než jaký plyne z Linnikovy methody (nejlepší výsledky v tomto směru má Vinogradov).

jsem jich přes 200). Skoro každý z těchto problémů by byl sám o sobě příliš těžký; jsou však srovnány v serie podle vzájemné souvislosti a logické závislosti, takže zkušenější čtenář mnohé z nich rozřeší sám — kde pak ztroskotá, může si nalézti obšírný návod k řešení na str. 89—132. (Podle poznámky na str. 2 nebyla tato podrobná řešení obsažena v dřívějších vydáních.) Tyto problémy, jejich výběr, jejich sestavení ve skupiny i methody řešení jsou neobyčejně zajímavé. O jejich bohatství a hloubce je možno si učiniti představu z několika příkladů:

I. Na str. 39—40 je řada problémů, vrcholící v důkazu věty: Počet mřížových bodů $[x, y]$ (t. j. bodů s celočíselnými souřadnicemi) v kruhu $x^2 + y^2 \leqq r^2$ je $\pi r^2 + O(r^{2/3} \log r)$ (pro $r \to +\infty$); obdobný výsledek je dokázán pro rovnoosou hyperbolu (t. j. pro počet mřížových bodů $[x, y]$ v oboru $x > 0$, $y > 0$, $xy \leqq r$). Tyto výsledky jsou pouze o činitele $\log r$ horší než známé věty Voroného (hyperbola) a Sierpińského (kruh) — a jejich odvození je zde předloženo jako úloha!

II. U autora, který tak vynikl svými pracemi o trigonometrických součtech, není divu, že jim věnuje v těchto problémech mnoho místa. Ukazuje předně, jak lze mnohé výrazy, mající číselně theoretický smysl, vyjádřiti trigonometrickými součty a tak je upraviti na analytický tvar, vhodný k vyšetřování; za druhé pak ukazuje, jak je možno odhadovati hodnotu takových trigonometrických součtů — přirozeně, že se při tom omezuje na problémy snazší. Příklad: Je-li $p > 12$ prvočíslo, a, b, c, q celá, $0 < q \leqq p$, $(a, p) = 1$, je

$$\left| \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{ax^2 + bx + c}{p}} \right| < \sqrt{2p \log p}.$$

Pokud se theorie čísel týče, nepřekračují tyto problémy nikde rámec toho, co bylo vyloženo v hlavním textu; nevystupují zde tedy žádné vyšší pojmy z theorie čísel, na př. algebraická čísla; z kvadratických forem zde vystupuje, nemýlím-li se, pouze ojediněle forma $x^2 + y^2$. Za to zde vystupují elementární methody analysy, hlavně integrálního počtu, a jejich použití na problémy číselné theorie. Jeví se tedy souhrn těchto problémů jakousi cvičebnicí, sloužící k uvedení do method analytické theorie čísel — pokud vím, první toho druhu ve světové literatuře, a to z pera nejpovolanějšího. (Vedle těchto „analytických" problémů je zde ovšem i mnoho problémů „elementárních".)

Úhrnem lze říci asi toto: Hlavní text a numerické příklady obsahují v jasné formě první základy theorie čísel, které by měl znáti každý matematik; problémy („вопросы") pak vedou čtenáře mnohem dále a hlouběji, uvádějíce jej především do method analytické theorie čísel. *V. Jarník.*

Lucien Godeaux: **Esquisse d'une Histoire des Sciences mathématiques en Belgique** (Collection nationale, 4-me sér., no. 39), Bruxelles, 1943, 60 str., cena ?.

Útlá knížečka je nabita hutným obsahem. Autor, profesor university v Liège, podává v ní obraz vývoje belgické matematiky od X. do XX. století. Látku si prof. Godeaux uspořádal podle osob. Z četných belgických matematiků a fysiků (belgická „Biographie nationale" jich uvádí 183) vybral 79 nejvýznačnějších, nezabíraje přirozeně do historie matematiky žijící. Při tom vedl hranici příslušnosti široce, zahrnul mezi Belgy jak muže, v Belgii narozené a v cizině působící, tak cizince v Belgii se usadivší. Toto jsou ovšem vzácné výjimky, takže lze právem říci, že knížečka líčí obraz minulosti matematiky v Belgii se zrodivší a v Belgii rozkvetlé. Je věru obdivuhodné, že tak malý národ vykonal v matematických vědách tolik cenné práce. Jistě tu spolupůsobily úzké vztahy k Francii. Prof. Godeaux, oceňuje tvorbu jednotlivých matematiků, neulpívá jen na všeobecných posudcích, nýbrž vytyčuje zvláště u moderních matematiků původní myšlenky, pouštěje se někdy do podrobností, svědčících o autorově hluboké znalosti matematických, zvláště geometrických problémů. Nesmíme ovšem zapomenouti, že spisovateli byla práce ulehčena jeho skvělými předchůdci, o něž se mohl opříti. Pramenem mu byly obšírné práce

Queteletovy, Le Paigeovy, de Tillyova, Gilbertova, Lefebvreova, Simonartova, Romeova, Alliaumova, Errerova, Dupréelova, Depauova a životní dílo, uložené v pojednáních P. J. Bosmanse, jakož i stati ve jmenované „Biographie nationale". Spisek psaný na prvým místě pro belgické studenty, aby je seznámil s vynikajícími zjevy kulturními jejich vlasti, se pěkně čte. *Q. Vetter.*

E. T. Bell: **The Development of Mathematics,** 2. vyd., New York a Londýn, Mc Graw — Hill Book Co, 1940 a 1945, XI + 637 str., cena 25 shill.

Druhé vydání známých Bellových dějin matematiky bylo za války vytištěno dvakráte, r. 1940 a 1945, což svědčí o zájmu, s nímž se tato kniha setkala. Proti prvému je nové vydání rozšířeno a doplněno o nový materiál, celkem asi o 50 stránek. Bellovo dílo jest dějinami matematických theorií a proudů, nikoli dějinami matematiků. Proto v rejstříku zabírajícím 27 stránek drobného tisku je mnohem více hesel věcných než jmenných. Autor, profesor na kalifornském technickém ústavu, zahrnuje do svého díla dobu od 4000 let př. Kr. až do r. 1945, od počátků matematiky babylonské až po W. Sierpińského a jiné současníky. Bell dělí vývoj matematiky na 7 období: 1. Od nejstarších dob po Babyloňany a Egypťany včetně, t. j. období empirismu. 2. Řecká matematika, t. j. od VI. stol. př. Kr. do III. stol. po Kr., k čemuž se druží také doba evropského úpadku. 3. Národy východní a semitské, t. j. Indové, Číňané, Peršané, Moslimové, Židé atd. až asi po XVI. stol. 4. Evropa za renesance a reformace, XIII. až XVI. stol. 5. XVII. a XVIII. stol. 6. XIX. stol. 7. XX. stol. Prvým čtyřem obdobím věnoval autor něco přes šestinu knihy, rozdělenou na 5 kapitol, jimž předchází všeobecný přehled o tom, čím se matematika liší od jiných věd, o různých směrech matematického myšlení atd. Poslední tři období vývoje matematiky jsou zpracovány v 17 kapitolách, rozdělených podle látky, na př. zevšeobecněná aritmetika (kap. 10) od intuice k absolutní přesnosti (kap. 13) a pod. Bell všímá si velmi pěkně souvislosti matematického vývoje se všeobecným děním historickým a kulturním. O bohatství použité literatury svědčí 441 literárních poznámek. Spisovatelé, mající nějaký vztah k Čechám jsou uvedeni jen zřídka. Nalezl jsem jen stručné zmínky o Janu Widmannu z Chebu (kol r. 1480), při čemž Bell klade Cheb do Německa, o Tychonovi Brahem, Janu Keplerovi a Joštu Bürgim, o Bern. Bolzanovi, o Gregoru Mendelovi, uvedeném jako Rakušanu, a o Em. Čubrovi aneb Czuberovi, jak se po svém odchodu do Vídně psal, jehož známou „Entwickelungsgeschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie" jmenuje v literárních poznámkách. Druhé vydání Bellovy knihy je velmi dobrou pomůckou při studiu vývoje matematiky a jako novinka sahající do doby nejposlednější zasluhuje, aby byla doporučena. *Q. Vetter.*