Jana Farková

Über Darbouxsche Funktionen

Matematický časopis, Vol. 20 (1970), No. 3, 185--194

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127085

Matematický časopis 20 (1970), No. 3

ÜBER DARBOUXSCHE FUNKTIONEN

JANA FARKOVÁ, Bratislava

In dem Falle einer reellen Funktion einer reellen Veränderlichen definiert man die Eigenschaft von Darboux wie folgt: f hat die Eigenschaft von Darboux, wenn sie jedes Intervall auf ein Intervall, eventuell auf eine einpunktige Menge abbildet. Oder eine andere Formulierung: f hat die Eigenschaft von Darboux, wenn für jede reelle x, y und jedes c, für die die Ungleichung $f(x) < < c < f(y)$ erfüllt ist, ein $z \in (x, y)$ so existiert, dass $f(z) = c$.

Etwas allgemeiner ist die Eigenschaft von Darboux im Sinne von Radakovič ([5]): f hat die Eigenschaft von Darboux im Sinne von Radakovič, wenn die abgeschlossene Hülle des Bildes jedes Intervalls ein Intervall, eventuell eine einpunktige Menge ist. Oder aber: wenn für jede reelle x, y und jedes c, für welche $f(x) < c < f(y)$ und für jedes $\varepsilon > 0$, ein $z \in (x, y)$ so existiert, dass $f(z) \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ ist.

Wenn X ein topologischer Raum und $\mathscr{B}$ eine Basis offener Mengen in X ist und wenn f eine auf X definierte reelle Funktion ist, dann definiert man die Eigenschaft von Darboux, bzw. die Eigenschaft von Darboux im Sinne von Radakovič, der Funktion f in bezug auf die Basis $\mathscr{B}$.

Gehen wir von [3] aus, wo man die Eigenschaften gewisser Klassen reeller Funktionen untersucht, die auf einem topologischen Raum definiert sind. Ausser anderen Klassen führt man hier zwei Klassen von Funktionen $D(\mathscr{B})$ und $D_0(\mathscr{B})$ in folgender Art ein:

Es sei X ein topologischer Raum, $\mathscr{B}$ eine Basis offener Mengen in X. Wir betrachten reelle, auf X definierte Funktionen.

$D(\mathscr{B})$ ist die Klasse aller solcher Funktionen f, für welche folgendes gilt: Für jedes $B \in \mathscr{B}$, für jede $x, y \in \bar{B}$ (1) und für jedes c, für welche $f(x) < c < f(y)$, existiert ein $\xi \in B$ so, dass $f(\xi) = c$.

$D_0(\mathscr{B})$ ist die Klasse aller solcher Funktionen f, für welche folgendes gilt: Für jedes $B \in \mathscr{B}$, für jede $x, y \in \bar{B}$ und für jedes c, für welche $f(x) < c < f(y)$ ist und für jedes $\varepsilon > 0$, existiert ein $\xi \in B$ so, dass $f(\xi) \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ ist.

---

(1) $\bar{A}$, bzw. A^{-} bedeutet die abgeschlossene Hülle der Menge A und A' bedeutet die Ableitung der Menge A.

Betrachten wir nun zwei weitere Klassen von Funktionen $D'(\mathscr{B})$, bzw. $D'_0(\mathscr{B})$, die analogisch wie $D(\mathscr{B})$, bzw. $D_0(\mathscr{B})$ definiert sind, mit dem Unterschied, dass wir in beiden Fällen die Existenz $\xi \in \bar{B}$ verlangen.

In diesem Sinne begreift man die Eigenschaft von Darboux, bzw. die Eigen schaft von Darboux im Sinne von Radakovič z. B. in [1].

Es ist offenbar, dass falls $X = (-\infty, \infty)$ und $\mathscr{B}$ die Basis ist, die aus allen offenen Intervallen besteht, dann ist $D(\mathscr{B}) = D'(\mathscr{B})$, $D_0(\mathscr{B}) = D'_0(\mathscr{B})$ und $f \in D'(\mathscr{B})$, bzw. $f \in D'_0(\mathscr{B})$ ist der Tatsache äquivalent, dass f die Eigenschaft von Darboux, bzw. die Eigenschaft von Darboux im Sinne von Radakovič hat, so wie sie oben eingeführt wurde.

Bemerkung 1. Man kann beweissen, dass ähnlich wie im Falle der Funktionen einer reellen Veränderlichen, $f \in D'(\mathscr{B})$, bzw. $f \in D'_0(\mathscr{B})$ äquivalent mit der Behauptung ist, dass $f(\bar{B})$, bzw. $f(\bar{B})^-$ zusammenhängend für jedes $B \in \mathscr{B}$, ist.

Der Unterschied gegenüber den Funktionen einer reellen Veränderlichen ist jedoch darin, dass die Eigenschaft von Darboux, bzw. die Eigenschaft von Darboux im Sinne von Radakovič den Zusammenhang $f(B)$, bzw. $f(B)^-$, für jede $B \in \mathscr{B}$, nicht garantiert (siehe Beispiel 3).

Aus den Definitionen folgt trivial

$$D(\mathscr{B}) \subset D_0(\mathscr{B}) \cap D'(\mathscr{B}), \quad D_0(\mathscr{B}) \cup D'(\mathscr{B}) \subset D'_0(\mathscr{B}). \tag{1}$$

In [3] befindet sich:

Beispiel 1. Es sei f eine reelle Funktion einer reellen Veränderlichen: $f(x) = 0$, wenn x keine Zahl der Gestalt $p/2^q$ ist und es ist $f(x) = r_q$, wenn $x = p/2^q$ ist und die Zahlen p und 2^q teilerfremd sind. Dabei ist $\{r_q\}$ eine eineindeutige Folge aller rationalen Zahlen aus dem Intervall $(0, 1)$.

In [3] wird bewiesen, dass $f \in D_0(\mathscr{B})$, aber es ist evident, dass $f \notin D'(\mathscr{B})$. Infolgendessen gilt keine Inklusion $D_0(\mathscr{B}) \subset D'(\mathscr{B})$.

Wie das folgende Beispiel zeigt, gilt auch $D'(\mathscr{B}) \subset D_0(\mathscr{B})$ nicht.

Beispiel 2. Es sei $X = E_2$, $\mathscr{B}$ sei das System aller offenen Quadrate, deren Seiten zum Koordinatensystem parallel sind. Wir definieren: $f(x, y) = x$, für $y \neq 0$ und $f(x, y) = \varphi(x)$, für $y = 0$, wobei φ eine reelle Funktion einer reellen Veränderlichen ist, welche jedes Intervall auf $(-\infty, \infty)$ abbildet. Eine solche Funktion existiert ([4]). Man kann leicht zeigen, dass $f \in D'(\mathscr{B})$, $f \notin D_0(\mathscr{B})$.

Es ensteht die Frage, ob man in (1) die Mengeninklusionen nicht durch Gleichungen ersetzen kann. Wie aus Beispielen 3 und 4 folgt, ist die Antwort auf diese Frage negativ.

Beispiel 3. Es sei $X = (-\infty, \infty)$, $\mathscr{B} = \{B : B = X - F$, wobei F eine endliche Teilmenge X ist$\}$.

Betrachten wir die Funktion $f(x) = x$. In bezug darauf, dass bei dieser

Topologie für beliebiges $B \in \mathscr{B}$, $\bar{B} = X$, $f \in D_0(\mathscr{B}) \cap D'(\mathscr{B})$, es ist aber leicht einzusehen, dass $f \notin D(\mathscr{B})$.

Beispiel 4. Es sei $X = E_2$, $\mathscr{B}$ sei das System aller offenen Quadrate, deren Seiten zum Koordinatensystem parallel sind. Wir definieren: $f(x, y) = x$, für $y \neq 0$, $f(x, y) = \psi(x)$, für $y = 0$, wobei ψ eine reelle Funktion einer reellen Veränderlichen ist, welche jedes Intervall auf die Menge aller rationalen Zahlen abbildet. Eine solche Funktion kann man leicht konstruieren mit Hilfe der Funktion φ aus dem Beispiel 2.

Im Falle, wenn X ein beliebiger topologischer Raum ist, wie Beispiel 3 zeigt, daher gilt $D_0(\mathscr{B}) \cap D'(\mathscr{B}) = D(\mathscr{B})$ nicht.

Es gilt aber die

Behauptung 1. *Es sei $X = E_n$, $\mathscr{B}$ eine Basis von offenen zusammenhängenden Mengen in X. Sei f eine reelle Funktion, definiert auf X und sei $f \in D'(\mathscr{B}) \cap$ $\cap\, D_0(\mathscr{B})$. Dann $f \in D(\mathscr{B})$.*

Beweis. Es sei $B \in \mathscr{B}$, $x, y \in \bar{B}$, $f(x) < c < f(y)$. Weil $f \in D'(\mathscr{B})$, derart existiert $\xi_0 \in \bar{B}$, dass $f(\xi_0) = c$ ist.

Es seien $a_1, a_2, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ solche reelle Zahlen, dass

$$f(x) < a_1 - \varepsilon_1 < a_1 < a_1 + \varepsilon_1 < f(\xi_0),$$

$$f(\xi_0) < a_2 - \varepsilon_2 < a_2 < a_2 + \varepsilon_2 < f(y).$$

Weil $f \in D_0(\mathscr{B})$, existieren $\xi_1, \xi_2 \in B$ so, dass $f(\xi_1) \in (a_1 - \varepsilon_1, a_1 + \varepsilon_1)$, $f(\xi_2) \in (a_2 - \varepsilon_2, a_2 + \varepsilon_2)$. Es gilt evident $f(\xi_1) < f(\xi_0) < f(\xi_2)$. Da $f(B)$ zusammenhängend ist (siehe [1], Seite 104), muss $\xi \in B$ so existieren, dass $f(\xi) = f(\xi_0) = c$.

In [3] werden gewisse Eigenschaften der Klassen $D(\mathscr{B})$ und $D_0(\mathscr{B})$ untersucht. Ob sie in Hinsicht auf die gleichmässigen Konvergenz abgeschlossen sind, unter welchen Bedingungen die Summe, dass Produkt, oder das Maximum der Funktionen aus $D(\mathscr{B})$, bzw. $D_0(\mathscr{B})$ wieder in diese Klasse gehören, u. ä.

Weiter werden wir uns mit einigen dieser Fragen für $D'(\mathscr{B})$ und $D_0'(\mathscr{B})$ befassen.

Es ist bekannt ([3], [6]), dass Folgen reeller Funktionen einer reellen Veränderlichen existieren welche die Eigenschaft von Darboux haben und gleichmässig zu der Funktion konvergieren, die die Eigenschaft von Darboux nicht hat. Also $D(\mathscr{B})$ und $D'(\mathscr{B})$ sind in Hinsicht auf die gleichmässige Konvergenz nicht abgeschlossen. In [3] ist weiter der Beweis der Abgeschlossenheit von $D_0(\mathscr{B})$ in Hinsicht auf die gleichmässige Konvergenz angeführt.

Ähnlicher Beweis gilt auch für $D_0'(\mathscr{B})$.

Bemerkung 2. Wenn wir aber das untersuchte Problem verallgemeinern und uns nicht nur auf reelle Funktionen beschränken, aber wenn wir $D_0'(\mathscr{B})$ als eine Menge aller Funktionen f auffassen, welche auf einem topologischen

Raum X mit einer Basis $\mathscr{B}$ definiert sind, mit Werten in irgendeinem Raum Y, allgemeinerem wie der Raum aller reellen Zahlen, solcher, dass für beliebige $B \in \mathscr{B}$, $f(\bar{B})^-$ eine zusammenhängende Menge ist, dann genügt es, als Y schon E_2 zu wählen und $D_0'(\mathscr{B})$ wird gegenüber der gleichmässigen Konvergenz nicht abgeschlossen sein.

Beispiel 5. Es sei $X = (-\infty, \infty)$, $\mathscr{B}$ sei die Basis, bestehend aus allen offenen Intervallen ausser denen, deren rechter Endpunkt 0 ist. Wir definieren nun die Folge von Funktionen, die X in E_2 auf folgende Art abbildet: $f_n(x) = (\varphi(x), 0)$, für $x \in (-\infty, 0)$, $f_n(x) = (\psi(x), 1/\psi(x) - 1/n)$, für $x \in \langle 0, \infty)$. Für $n = 1, 2, 3, \ldots$

Dabei ist $\varphi(x)$, bzw. $\psi(x)$ eine reelle Funktion einer reellen Veränderlichen, welche jedes Intervall auf $(-\infty, \infty)$, bzw. auf $(0, \infty)$ abbildet.

Da $f_n \in D_0'(\mathscr{B})$, für $n = 1, 2, 3, \ldots$, ist, und weil $\{f_n(x)\}$ gegen $f(x)$ gleichmässig konvergiert, wo $f(x) = (\varphi(x), 0)$, für $x \in (-\infty, 0)$ und $f(x) = (\psi(x), 1/\psi(x))$, für $x \in \langle 0, \infty)$ und wobei $f \notin D_0'(\mathscr{B})$ (die abgeschlossene Hülle des Bildes beliebigen Intervalls, welches 0 enthaltet, ist nicht zusammenhängend in E_2), $D_0'(\mathscr{B})$ ist nicht abgeschlossen.

Es gilt jedoch:

Satz 1. *Es sei X ein topologischer Raum, $\mathscr{B}$ eine Basis von offenen Mengen in X und Y ein metrischer Raum. Es sei $f_n : X \to Y, f_n \in D_0'(\mathscr{B})$ (siehe Bemerkung 2), für $n = 1, 2, 3, \ldots$, und $\{f_n\}$ gleichmässig konvergiert gegen f, wobei $f(X) \subset K$, wo K ein Kompakt ist. Dann $f \in D_0'(\mathscr{B})$.*

Beweis. Es gilt $f \notin D_0'(\mathscr{B})$; dann existiert $U \in \mathscr{B}$ so, dass $f(\bar{U})^- = A^+ \cup B^+$, wo A^+ und B^+ solche nicht-leere Mengen sind, dass $\bar{A}^+ \cap B^+ = \emptyset = A^+ \cap \bar{B}^+$. Daher sind A^+ und B^+ abgeschlossen. Da $f(\bar{U})^- \subset K$, sind A^+ und B^+ kompakt.

Es sei $\varrho(A^+, B^+) > \varepsilon > 0$. Dann ist $\bar{U} = A \cup B$, wo $A = \{x : x \in \bar{U}, f(x) \in A^+\}$, $B = \{x : x \in \bar{U}, f(x) \in B^+\}$ und $A \cap B = \emptyset$ und A und B sind nicht-leer. Wenn z. B. A leer wäre, dann wäre $\bar{U} = B$, $f(\bar{U}) \subset B^+$. Daraus $f(\bar{U})^- \subset B^+$, daher $A^+ \cup B^+ \subset B^+$, was ein Widerspruch damit ist, dass $A^+ \neq \emptyset$ und $A^+ \cap B^+ = \emptyset$.

Es sei jetzt $x \in A$, $y \in B$; wählen wir n so, dass $\varrho(f_n(u), f(u)) < \varepsilon/4$, für jedes $u \in X$.

Dann gilt: $\varrho(f(x), f(y)) \leq \varrho(f(x), f_n(x)) + \varrho(f_n(x), f_n(y)) + \varrho(f_n(y), f(y)) < < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varrho(f_n(x), f_n(y))$.

Daraus $\varrho(f_n(x), f_n(y)) > \varrho(f(x), f(y)) - \varepsilon/2 > \varepsilon/2$, also $\varrho(f_n(A), f_n(B)) \geq \geq \varepsilon/2 > 0$.

$f_n(\bar{U}) = f_n(A) \cup f_n(B)$, $f_n(\bar{U})^- = f_n(A)^- \cup f_n(B)^-$, wobei $f_n(A)^-$ und $f_n(B)^-$ disjunkte abgeschlossene nicht-leere Mengen sind; also existiert n so, dass $f_n \notin D_0'(\mathscr{B})$, was ein Widerspruch ist.

T. Radakovič hat in [5] bewiesen, dass zur beliebigen stetigen reellen

Funktion einer reellen Veränderlichen f, welche nicht konstant ist, eine solche Funktion mit der Eigenschaft von Darboux existiert, dass ihre Summe mit f die Eigenschaft von Darboux nicht besitzt. Und weiter, wenn f und g reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen mit der Eigenschaft von Darboux im Sinne von Radakovič sind und f stetig ist, dann hat auch $f + g$ die Eigenschaft von Darboux im Sinne von Radakovič.

Diese Behauptung verallgemeinert L. Mišík in [3].

Analogische Sätze, welche in [3] für $D_0(\mathscr{B})$ bewiesen sind, beweisen wir für $D'_0(\mathscr{B})$.

Definition. *Es sei X ein topologischer Raum und $\mathscr{B}$ eine Basis in demselben. Wir werden sagen, dass $\mathscr{B}$ hat die Eigenschaft* (1*), *wenn folgendes gilt: Zu jeder offenen Menge U, zu jedem Punkt $x \in X$ und zu jedem $B \in \mathscr{B}$, für welche $x \in U$ und $x \in \bar{B}$ gilt, existiert ein $C \in \mathscr{B}$ so, dass $C \subset U \cap B$ und $x \in \bar{C}$ ist.*

Bemerkung 3. In den Definitionen der Klassen $D(\mathscr{B})$, $D_0(\mathscr{B})$, $D'(\mathscr{B})$ und $D'_0(\mathscr{B})$ wird nicht ausdrücklich verlangt, dass $\mathscr{B}$ nur aus zusammenhängenden Mengen bestehen muss. Es ist aber evident, dass diese Definitionen gerade dann eine praktische Bedeutung haben, wenn $\mathscr{B}$ nur aus zusammenhängenden Mengen besteht. Im entgegengesetzen Falle muss z. B. weder eine stetige Funktion die Eigenschaft von Darboux haben, was im Widerspruch ist mit dem intuitiven Auffassen der Eigenschaft von Darboux, als einer gewissen Verallgemeinerung der Stetigkeit.

Im Weiteren werden wir uns daher auf lokal zusammenhängenden topologischen Raum beschränken.

Satz 2. *Es sei X ein regulärer topologischer Raum, $\mathscr{B}$ eine Basis von zusammenhängenden Mengen in X mit der Eigenschaft* (1*), *es sei $f, g \in D'_0(\mathscr{B})$. Es sei jeder Punkt aus X ein Stetigkeitspunkt entweder der Funktion f oder g. Dann ist $f + g \in D'_0(\mathscr{B})$.*

In dem Beweis dieses Satzes und des Satzes 3 benützen wir das nächste.

Lemma. *Es sei X ein topologischer Raum und $\mathscr{B}$ eine Basis von zusammenhängenden Mengen in X mit der Eigenschaft* (1*). *Es sei $O \in \mathscr{B}$, $\bar{O} = A \cup B$, wo A und B disjunkte nicht-leere Mengen sind. Dann existiert $x_0 \in \bar{A} \cap \bar{B}$ so, dass für jede Umgebung V des Punktes x_0, $U \in \mathscr{B}$ so existiert, dass $U \subset V$, $x_0 \in \bar{U}$, $\bar{U} = (\bar{U} \cap A) \cup (\bar{U} \cap B)$, wo $\bar{U} \cap A$ und $\bar{U} \cap B$ disjunkte nicht-leere Mengen sind.*

Beweis. Es sind zwei Möglichkeiten:

1) $O \cap A$ und auch $O \cap B$ sind nicht-leere Mengen. Da O eine zusammenhängende Menge ist, existiert dann $x_0 \in O$, $x_0 \in \bar{A} \cap \bar{B}$. Wenn V eine beliebige Umgebung des Punktes x_0 ist, nehmen wir eine solche Umgebung $U \in \mathscr{B}$ des Punktes x_0, dass $U \subset V \cap O$, also $\bar{U} \subset \bar{O} = A \cup B$. $\bar{U} = (\bar{U} \cap A) \cup$

$\cup (\overline{U} \cap B)$, wobei $\overline{U} \cap A$ und $\overline{U} \cap B$ nicht-leer sind, weil $x_0 \in U$, $x_0 \in \bar{A} \cap \bar{B}$.

2) $O \cap A$ oder $O \cap B$ ist leer. Es sei $O \cap B$ leer (für $O \cap A$ $\emptyset$ ist der Beweis analogisch). Dann $O \subset A$, $B \subset \bar{O} - O$, $B \subset \bar{A} - A$. Es sei x_0 ein beliebiges Element aus B. Wenn V eine beliebige Umgebung des Punktes x_0 ist, nach (1*) existiert dann $U \in \mathscr{B}$ so, dass $x_0 \in \overline{U}$, $U \subset V \cap O$. $\overline{U} = (\overline{U} \cap A) \cup \cup (\overline{U} \cap B)$, wobei $\overline{U} \cap A \neq \emptyset$, weil $\overline{U} \subset \bar{A}$, $\overline{U} \cap B \neq \emptyset$, weil $x_0 \in \overline{U} \cap B$.

Beweis des Satzes 2. Es sei $f + g \notin D_0'(\mathscr{B})$, also existiert $O \in \mathscr{B}$, $x, y \in \bar{O}$, $\varepsilon > 0$ und c so, dass $f(x) + g(x) < c - \varepsilon < c < c + \varepsilon < f(y) + g(y)$ und $f(u) + g(u) \notin (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, für $u \in \bar{O}$.

Dann $\bar{O} = A \cup B$, wobei $A = \{u : u \in \bar{O}, f(u) + g(u) \leq c\}$, $B = \{u : u \in \bar{O}, f(u) + g(u) \geq c\}$, $A \cap B = \emptyset$, A und B sind nicht-leere Mengen. Es sei $x_0 \in \bar{A} \cap \bar{B}$ ein Element, dessen Existenz das Lemma garantiert. Es sei f in x_0 stetig (bei der Voraussetzung der Stetigkeit g in x_0 ist der Beweis analogisch). Aus der Stetigkeit und aus der Regularität von X folgt die Existenz einer solchen Umgebung V des Punktes x_0, dass für $u \in \bar{V}$ gilt: $f(x_0) - \varepsilon/2 < f(u) < < f(x_0) + \varepsilon/2$. Nach dem Lemma existiert ein solches $U \in \mathscr{B}$, dass $U \subset V$, $x_0 \in \overline{U}$, $\overline{U} = (\overline{U} \cap A) \cup (\overline{U} \cap B)$, wo $\overline{U} \cap A$ und $\overline{U} \cap B$ nicht-leere disjunkte Mengen sind. Es gilt aber: $g(u) < c - f(x_0) - \varepsilon/2$, für $u \in \overline{U} \cap A$, $g(u) > c - - f(x_0) + \varepsilon/2$, für $u \in \overline{U} \cap B$. Also $g \notin D_0'(\mathscr{B})$, was ein Widerspruch ist.

Im allgemeineren Falle, wenn wir als Elemente $D_0'(\mathscr{B})$ anstatt reeller Funktionen wiederum gewisse Transformationen in einen linearen metrischen Raum auffassen werden, gilt die Behauptung, ähnlich wie der Satz 2, wieder nur bei gewissen speziellen Bedingungen:

Satz 3. *Es sei X ein regulärer topologischer Raum, $\mathscr{B}$ eine Basis von zusammenhängenden Mengen in demselben mit der Eigenschaft* (1*), *es sei Y ein linear metrischer Raum* (*siehe* [7], *Seite* 61). *Es sei $f, g : X \to Y$; $f, g \in D_0'(\mathscr{B})$* (*siehe Bemerkung* 2). *Es sei endlich jeder Punkt aus X ein Stetigkeitspunkt entweder f oder g und es sei $(f + g)(X) \subset K$, wo K ein Kompakt ist. Dann $f + g \in D_0'(\mathscr{B})$.*

Beweis. Es sei $f + g \notin D_0'(\mathscr{B})$, dann existiert $O \in \mathscr{B}$ so, dass $(f + g)(\bar{O})^- = = A^+ \cup B^+$, wo A^+ und B^+ solche nicht-leere Mengen sind, dass $\bar{A}^+ \cap B^+ = = A^+ \cap \bar{B}^+ = \emptyset$, also A^+ und B^+ sind abgeschlossen und da $(f + g)(\bar{O})^- \subset K$, sind A^+ und B^+ kompakt. Es sei $\varrho(A^+, B^+) > \varepsilon > 0$. $\bar{O} = A \cup B$, wo $A = = \{x : x \in \bar{O}, (f + g)(x) \in A^+\}$, $B = \{x : x \in \bar{O}, (f + g)(x) \in B^+\}$, $A \cap B = \emptyset$, A und B sind nicht-leer.

Wenn z. B. A leer wäre, dann wäre $\bar{O} = B$ und also $(f + g)(\bar{O}) \subset B^+$. Daraus $(f + g)(\bar{O})^- \subset B^+$, also $A^+ \cup B^+ \subset B^+$, was ein Widerspruch damit ist, dass $A^+ \neq \emptyset$ und $A^+ \cap B^+ = \emptyset$.

Es sei $x_0 \in \bar{A} \cap \bar{B}$ ein Element, deren Existenz das Lemma garantiert. Es sei f in x_0 stetig (bei der Voraussetzung der Stetigkeit g in x_0 ist der Beweis analogisch). Aus der Stetigkeit und aus der Regularität von X folgt die Existenz einer solchen Umgebung V des Punktes x_0, dass für $u \in \overline{V}$ gilt: $\varrho(f(x_0), f(u)) < \varepsilon/4$.

Nach dem Lemma existiert ein solches $U \in \mathscr{B}$, dass $U \subset V$, $x_0 \in \overline{U}$, $\overline{U} = (\overline{U} \cap A) \cup (\overline{U} \cap B)$, wo $\overline{U} \cap A$ und $\overline{U} \cap B$ disjunkte nicht-leere Mengen sind. Dabei, falls $x \in \overline{U} \cap A$, $y \in \overline{U} \cap B$, dann
$\varrho((f+g)(x), (f+g)(y)) > \varepsilon$. Da $\varrho((f+g)(x), (f+g)(y)) \leq \varrho(f(x), f(y)) + \varrho(g(x), g(y)) \leq \varrho(f(x), f(x_0)) + \varrho(f(x_0), f(y)) + \varrho(g(x), g(y)) < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varrho(g(x), g(y))$,
ist $\varrho(g(x), g(y)) > \varrho((f+g)(x), (f+g)(y)) - \varepsilon/2 > \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2 > 0$. Also $g(\overline{U}) = g(\overline{U} \cap A) \cup g(\overline{U} \cap B)$, wobei $\varrho(g(\overline{U} \cap A), g(\overline{U} \cap B)) \geq \varepsilon/2 > 0$. Daraus $g(\overline{U})^- = g(\overline{U} \cap A)^- \cup g(\overline{U} \cap B)^-$, wobei $g(\overline{U} \cap A)^-$ und $g(\overline{U} \cap B)^-$ nicht-leere abgeschlossene disjunkte Mengen sind, also $g \notin D_0'(\mathscr{B})$, was ein Widerspruch ist.

Das nächste Beispiel zeigt, dass wenn wir aus den Bedingungen des Satzes 3 die Bedingung $(f+g)(X) \subset K$ auslassen, $f + g \in D_0'(\mathscr{B})$ nicht mehr gelten muss.

Beispiel 6: Es sei $X = (-\infty, \infty)$, $\mathscr{B}$ sei die Basis, bestehend aus allen offenen Intervallen und $Y = E_2$. Wir definieren nun die Funktionen $f, g : X \to Y$ so, dass f stetig sein wird, $g \in D_0'(\mathscr{B})$, und $f + g \notin D_0'(\mathscr{B})$.

$$f(x) = (x, \mathrm{e}^x),\ x \in (-\infty, \infty),$$

$\varphi(x)$ sei eine reelle Funktion einer reellen Veränderlichen, welche jedes Intervall auf $(-\infty, \infty)$ abbildet.

$$A = \{x : x \in (-\infty, \infty),\ \varphi(x) \text{ ist rational}\},$$

$$B = \{x : x \in (-\infty, \infty),\ \varphi(x) \text{ ist irrational}\}.$$

Wir definieren: $g_1(x) = (\varphi(x) - x, -\mathrm{e}^x)$, $x \in (-\infty, \infty)$,

$$g_2(x) = (\varphi(x) - x, -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\varphi(x)}),\ x \in (-\infty, \infty).$$

Und endlich definieren wir $g(x) = g_1(x)$, für $x \in A$ und $g(x) = g_2(x)$, für $x \in B$.

$f + g$ ist also eine solche Funktion, dass falls I ein beliebiges Intervall ist, dann ist
$(f+g)(\bar{I})^- = \{(x, \mathrm{e}^x) : x \in (-\infty, \infty)\} \cup \{(x, 0) : x \in (-\infty, \infty)\}$, also $f + g \notin D_0'(\mathscr{B})$.

Die Funktion $g \in D_0'(\mathscr{B})$. Wenn $I = (a, b)$ ein beliebiges Intervall ist, dann $g(\bar{I})^- = X_1 \cup X_2$, wo

$$X_1 = \{(x, y) : x \in (-\infty, \infty),\ y \in \langle -\mathrm{e}^b, -\mathrm{e}^a \rangle\},$$

$$X_2 = \{(x, y) : x \in (-\infty, 0\rangle,\ y \in \langle \mathrm{e}^b(\mathrm{e}^x - 1), \mathrm{e}^a(\mathrm{e}^x - 1)\rangle\} \cup$$

$\cup \{(x, y): x \in \langle 0, \infty), y \in \langle e^a(e^x - 1), e^b(e^x - 1)\rangle\}.$

$g(\bar{I})^-$ ist also eine zusammenhängende Menge in E_2.

Es ist offenbar, dass wenn $(x_1, x_2) \in X_1$, dann beliebig nahe zum Punkte $\ln |x_2| \in (a, b)$ liegen Punkte y_n so, dass $\varphi(y_n) - y_n$ beliebig wenig von x_1 abweicht; wenn $(x_1, x_2) \in X_2$, dann wieder beliebig nahe zum Punkte $\ln |x_2/(e^{x_1} - 1)| \in (a, b)$ liegen Punkte y_n so, dass $\varphi(y_n) - y_n$ beliebig wenig von x_1 abweicht.

Satz 4. *Es sei X ein regulärer topologischer Raum, $\mathscr{B}$ eine Basis von zusammenhängenden Mengen in X. Es sei $f, g \in D_0'(\mathscr{B})$. Es sei jeder Punkt aus X ein Stetigkeitspunkt entweder f oder g. Dann $\varphi = \max (f, g) \in D_0'(\mathscr{B})$, $\psi = \min (f, g) \in \in D_0'(\mathscr{B})$.*

Beweis. Es gilt $\varphi \notin D_0'(\mathscr{B})$. Dann existiert $O \in \mathscr{B}$, $x, y \in \bar{O}$, $\varepsilon > 0$ und c so, dass $\varphi(x) < c - \varepsilon < c < c + \varepsilon < \varphi(y)$ und $\varphi(u) \notin (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, für $u \in \bar{O}$. Dann $\bar{O} = A \cup B$, wobei $A = \{u: u \in \bar{O}, \varphi(u) \leq c\}$, $B = \{u: u \in \bar{O}, \varphi(u) \geq c\}$, $A \cap B = \emptyset$, A und B sind nicht-leere Mengen. Es sei $x_0 \in \bar{A} \cap \bar{B}$. Offensichtlich ist $x_0 \in A \cup B$. Es sei x_0 aus B und f in x_0 stetig (in anderen Fällen wäre der Beweis analogisch). Aus der Stetigkeit und aus der Regularität von X folgt die Existenz einer solchen Umgebung $V \in \mathscr{B}$ des Punktes x_0, dass für $u \in \bar{V}$ gilt: $f(x_0) - \varepsilon/2 < f(u) < f(x_0) + \varepsilon/2$; es sei $x_1 \in V \cap A$. Dann gilt: $f(x_1) \leq \leq c - \varepsilon$, $g(x_1) \leq c - \varepsilon$. Aus den Ungleichungen $f(x_1) \leq c - \varepsilon$ und $f(x_0) - - \varepsilon/2 < f(u) < f(x_0) + \varepsilon/2$ für $u \in \bar{V}$ folgt, dass $f(x_0) < c - \varepsilon/2$ und daraus $\varphi(x_0) = g(x_0)$. Weil $g(x_1) \leq c - \varepsilon$, $g(x_0) \geq c + \varepsilon$, $g \in D_0'(\mathscr{B})$, existiert $\xi \in \bar{V}$ so, dass $g(\xi) \in (c + \varepsilon/2, c + \varepsilon)$.

Es gilt aber $f(\xi) < f(x_0) + \varepsilon/2 < c$ es muss also gelten $\varphi(\xi) = g(\xi) \in \in (c + \varepsilon/2, c + \varepsilon)$, was ein Widerspruch ist.

Die Behauptung für ψ geht aus der Gleichung

$$\min (f, g) = -\max (-f, -g) \text{ hervor.}$$

Führen wir nun einige Eigenschaften der Basis an, welche wir im Weiteren benützen werden.

In [1] definiert man die Eigenschaft (**):

Wir werden sagen, dass die topologische Basis $\mathscr{B}$ des Raums X die Eigenschaft (**) erfüllt, wenn für jede solche $x \in X$ und $U \in \mathscr{B}$, dass $x \in \bar{U}$, existiert $V \in \mathscr{B}$ so, dass $x \in \bar{V}$, $\bar{V} - \{x\} \subset U$.

In [3] definiert man die Eigenschaften (1) und (2):

Wir werden sagen, dass die topologische Basis $\mathscr{B}$ des Raums X die Eigenschaft (1) hat, wenn es gilt, dass zu jedem Punkt $x \in X$ und zu jeder offenen Menge O, die den Punkt x enthält, ein $B \in \mathscr{B}$ derart existiert, dass $B \subset O$ und $x \in \bar{B} - B$.

Wir werden sagen, dass die topologische Basis $\mathscr{B}$ des Raums X die Eigenschaft (2) hat, wenn folgendes gilt:

Für jedes $B \in \mathscr{B}$ und jede solche Zerlegung der Menge B in zwei nicht-leere disjunkte Mengen A_1 und A_2, $B = A_1 \cup A_2$, für welche $\bar{U} \cap B \subset A_1$, bzw. $\bar{U} \cap B \subset A_2$ ist, wenn $U \subset A_1$, bzw. $U \subset A_2$ und $U \in \mathscr{B}$ ist, sind die Mengen $A_1' \cap A_2$ und $A_1 \cap A_2^1$ nicht-leer.

Endlich werden wir sagen, dass die topologische Basis $\mathscr{B}$ des Raums X die Eigenschaft (1**) erfüllt, wenn für jede offene Menge U und für jede solche $x \in X$, $B \in \mathscr{B}$, dass $x \in U$, $x \in \bar{B}$, $C \in \mathscr{B}$ so existiert, dass $x \in \bar{C} - C$, $C \subset U$, $\bar{C} - \{x\} \subset B$.

Es ist offenbar, dass aus der Eigenschaft (1) nicht die Eigenschaft (**) erfolgen muss. Z. B. hat die Basis E_2, bestehend aus allen offenen Quadraten, deren Seiten zum Koordinatensystem parallel sind, die Eigenschaft (1), aber nicht die Eigenschaft (**).

Ebenfalls muss aus (**) nicht (1) erfolgen. Z. B. die Basis E_2, bestehend aus allen offenen Kreisen, welche die x-Koordinate nicht berühren, hat die Eigenschaft (**), aber nicht die Eigenschaft (1).

Die Eigenschaft (1**) impliziert offensichtlich die Eigenschaften (1) und (**).

Satz 5. *Es sei X ein topologischer Raum und $\mathscr{B}$ eine Basis in X mit der Eigenschaft (**), bestehend aus zusammenhängenden Mengen. Es sei $f \in D_0'(\mathscr{B})$. Dann $f \in D_0(\mathscr{B})$.*

Beweis. Es existiere $B \in \mathscr{B}$, $x, y \in \bar{B}$, $\varepsilon > 0$ und c so, dass $f(x) < c - - \varepsilon < c < c + \varepsilon < f(y)$.

Weil $f \in D_0'(\mathscr{B})$, existiert $\xi' \in \bar{B}$ so, dass $f(\xi') \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Aus dem Beweis des Satzes 2 in [1] geht hervor, dass $f(\bar{B}) \subset f(B)^-$, also muss $\xi \in B$ so existieren, dass $f(\xi) \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$.

Folgerung. *Wenn X ein topologischer Raum mit einer topologischen Basis $\mathscr{B}$, bestehend aus zusammenhängenden Mengen, erfüllend (**) ist, dann $D_0'(\mathscr{B}) = = D_0(\mathscr{B}) \supset D'(\mathscr{B})$.*

Falls $\mathscr{B}$ nicht (**) erfüllt, dann wie aus Beispiel 2 ersichtlich ist, müssen diese Beziehungen nicht gelten.

Für Funktionen der ersten Baireschen Klasse, bekommen wir aus dem Satz 5 un dem Satz 8 in [3] folgende Behauptung:

Satz 6. *Wenn X ein vollständiger metrischer Raum und $\mathscr{B}$ seine topologische Basis, bestehend aus zusammenhängenden Mengen, erfüllend die Eigenschaften (1**) und (2), ist und wenn f aus der ersten Baireschen Klasse ist, dann sind die folgenden Behauptungen äquivalent: $f \in D(\mathscr{B})$; $f \in D_0(\mathscr{B})$; $f \in D'(\mathscr{B})$; $f \in D_0'(\mathscr{B})$.*

Zum Schluss möchte ich mich gerne bei Herrn L. Mišík für seine wertvollen Ratschläge und Anmerkungen bedanken.

LITERATUR

[1] Bruckner A. M., Bruckner J. B., *Darboux transformations*, Trans. *Amer.* Math. Soc. *128* (1967), 103—111.

[2] Mišík L., *Über die Funktionen der ersten Baireschen Klasse mit der Eigenchaft von Darboux*, Mat.-fyz. časop. *14* (1964), 44—48.

[3] Mišík L., *Über die Eigenschaft von Darboux und einigen Klassen von Funktionen*, Rev. roumaine math. pures et appl. 11 (1966), 411—430.

4] Mišík L., *Zu zwei Sätzen von W. Sierpinski*, Rev. roumaine math. et pures appl. *12* (1967), 849—861.

[5] Radakovič T., *Über Darbouxsche und stetige Funktionen*, Monatsh. Math. Phys. *38* (1931), 117—122.

[6] Sierpinski W., *Sur une propriété des fonctions quelconques définies dans les espaces métriques*, Matematiche *8* (1953), 73—78.

[7] Wilansky A., *Functional Analysis*, New York, 1964.

Eingegangen am 14. 6. 1968

Matematický ústav
Slovenskej akadémie vied
Bratislava