Matematický časopis

Pavol Marušiak

Asymptotické vlastnosti riešení diferenciálnej rovnice $y'''(t) + 2A(t)y'(t) + B(t)y(t) - C(t)y(t - h(t)) = 0$

Matematický časopis, Vol. 21 (1971), No. 4, 277--284

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/127072`

Matematický časopis 21 (1971), No. 4

ASYMPTOTICKÉ VLASTNOSTI RIEŠENÍ DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE

$y'''(t) + 2A(t)y'(t) + B(t)y(t) - C(t)y(t - h(t)) = 0$

PAVOL MARUŠIAK, Žilina

V tejto práci sa budeme zaoberať asymptotickými vlastnosťami riešení lineárnej diferenciálnej rovnice 3. rádu s oneskoreným argumentom (ďalej budeme písať len „dif. rovnice")

$$y'''(t) + 2A(t)y'(t) + B(t)y(t) - C(t)y(t - h(t)) = 0 \tag{1}$$

Ďalej budeme predpokladať, že $A'(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $h(t)$ ($\geqslant 0$) sú spojité funkcie na intervale $I = \langle t_0, \infty)$ a platí $\lim\limits_{t\to\infty} [t - h(t)] = +\infty$.

Homogénna začiatočná úloha (ďalej len „hom. úloha") pre dif. rovnicu (1) je definovaná takto: Nech na začiatočnej množine $E_{t_0} = \{u;\, u = t - h(t) \leqslant \leqslant t_0, t \in I\}$ je definovaná spojitá a ohraničená funkcia $\varphi(t)$, pričom $\varphi(t_0) = 1$ a nech y_0, y_0', y_0'' sú ľubovoľné reálne čísla. Na intervale I hľadáme riešenie dif. rovnice (1), ktoré splňuje tieto začiatočné podmienky:

$$y(t_0^+) = y_0, \quad y^{(k)}(t_0^+) = y_0^{(k)}, \quad k = 1, 2 \tag{2}$$

$$y(t) = y_0\varphi(t) \quad \text{pre} \quad t \in E_{t_0}.$$

Existencia a jednoznačnosť riešenia hom. úlohy (1), (2) sa dokáže podobne, ako je dokázaná Norkinom pre $n = 2$ v [2].

V tejto práci, okrem lem dokážeme dve vety, ktorých technika dôkazu je podobná, aká je použitá u Zlámala [4] a Lazera [1] pre obyčajné dif. rovnice 3. rádu bez oneskorenia.

Najprv uvedieme dve lemy, ktoré sú uvedené v [3].

Lema 1. *Nech $f(t) \in C^1 \langle a, \infty)$. Ak $f'(t)$ je ohraničená funkcia a $\int_a^\infty f^2(t)\mathrm{d}t < \infty$, potom* $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Lema 2. *Nech* $f(t) \in C^2 \langle a, \infty)$. *Ak* $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$ *a* $f''(t)$ *je ohraničená funkcia, potom* $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t) = 0$.

Lema 3. *Ak si označíme*

$$F[y(t)] = y(t)y''(t) - \tfrac{1}{2}\, y'^2(t) + A(t)y^2(t),$$

pričom $y(t)$ *je riešenie hom. úlohy* (1), (2), *potom* $y(t)$ *spĺňa nasledovnú integrálnu identitu*

$$F[y(t)] - F[y(t_0)] = \int_{t_0}^{t} [A'(u) - B(u)]y^2(u)\mathrm{d}u + \int_{t_0}^{t} C(u)y(u)y(u - h(u))\mathrm{d}u. \tag{3}$$

Dôkaz je zrejmý.

Poznámka 1. Ak a je ľubovoľné číslo z intervalu I, potom pod E_a rozumieme: $E_a = \{u; u = t - h(t) \leqslant a, t \geqslant a\}$.

Riešenie $y(t)$ hom. úlohy (1), (2) budeme nazývať oscilatorickým, ak na každom intervale $\langle a, \infty)$, (pre ľubovoľné $a \in I$) má $y(t)$ nekonečne veľa nulových bodov a $y(t) \equiv 0$ neplatí na žiadnom podintervale $\langle b, \infty) \subset \langle a, \infty)$.

Riešenie $y(t)$ hom. úlohy (1), (2) budeme nazývať neoscilatorickým, ak existuje také číslo $a \in I$, že pre každé $t > a$ je $y(t)$ stále kladné alebo záporné alebo existuje číslo $b > t_0$, že pre $t \geqslant b$ je $y(t) \equiv 0$.

Budeme hovoriť, že riešenie $y(t)$ hom. úlohy (1), (2), definované na intervale I má vlastnosť V, ak $y(t) \equiv 0$ neplatí na žiadnom podintervale intervalu I.

Nasledovná veta je modifikáciou vety 3, ktorú uviedol M. Zlámal v [4].

Veta 1. *Nech existuje také číslo* $a \in I$, *že na intervale* $\langle a, \infty)$ *platia nerovnosti*

$$A(t) \geqslant b, \quad B(t) \geqslant b, \quad \text{kde } b \text{ je kladná konštanta,}$$

$$2A'(t) - B(t) \leqslant 0, \quad C(t) \leqslant 0, \tag{4}$$

pričom rovnosť nule neplatí na žiadnom podintervale intervalu $\langle a, \infty)$.

Potom pre každé riešenie $y(t)$ *hom. úlohy* (1), (2) *na intervale* $\langle a, \infty)$, *ktoré má vlastnosť* V *platí:*

1) $y(t)$ *mení znamienko na intervale* $\langle c, \infty)$ *pre každé* $c > a$, *alebo*

2) $y(t)$ *je neoscilatorické a platí* $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\infty} y'(t) = 0$.

Dôkaz. Pre každé riešenie $y(t)$ hom. úlohy (1), (2), ktoré nemení znamienko na intervale $\langle a, \infty)$ a ktoré má vlastnosť V platí:

1) má nekonečne veľa núl na $\langle c, \infty)$, pre každé $c > a$, alebo

2) $y(t) \neq 0$ od určitého t počnúc.

1) Nech $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ sú nulové body riešenia $y(t)$ hom. úlohy (1), (2) na intervale $\langle a, \infty)$, kde $a_n \to \infty$ pre $n \to \infty$ a nech $y(t) \geqslant 0$ pre

$t \geqslant a_1$. Potom je zrejmé, že $y(a_n) = y'(a_n) = 0$, a preto je $F[y(a_n)] = 0$ pre $n = 2, 3, \ldots$ a $F[y(a_1)] \leqslant 0$. Vzhľadom na to, že $\lim (t - h(t)) = \infty$ pre $t \to \infty$ je $\gamma(a_1) = \sup \{t;\, t \geqslant a_1,\, t - h(t) < a_1\} < \infty$. Preto bude existovať prirodzené číslo N také, že $a_N \geqslant \gamma(a_1)$.

Keď $y(t) \geqslant 0$ pre $t \geqslant a_1$; potom je $y(t - h(t)) \geqslant 0$ pre $t \geqslant a_N \geqslant \gamma(a_1)$. Zo (4) dostaneme, že $A'(t) - B(t) \leqslant -b/2 < 0$ a vzhľadom na to, že $C(t) \leqslant 0$ vyplýva z (3), že pre $n \geqslant N$ platí

$$F[y(a_n)] - F[y(a_N)] = \int_{a_N}^{a_n} [A'(u) - B(u)]y^2(u)\mathrm{d}u +$$

$$+ \int_{a_N}^{a_n} C(u)y(u)y(u - h(u))\mathrm{d}u \leqslant -\frac{b}{2} \int_{a_N}^{a_n} y^2(u)\mathrm{d}u < 0.$$

To je však spor, lebo ľavá strana sa rovná nule a pravá strana je záporná. Tým sme dokázali, že riešenie $y(t)$ hom. úlohy (1), (2), ktoré má vlastnosť V a má nekonečne veľa núl na intervale $\langle a, \infty)$ mení na tomto intervale znamienko.

2) Nech $y(t) \neq 0$ pre $t \geqslant a_0$, kde $a_0 \geqslant a$.
Uvažujme prípad, že $y(t) > 0$ pre $t \geqslant a_0$. Nech $a_1 = \gamma(a_0) < \infty$.

Najprv dokážeme, že nerovnosť $y'(t) \geqslant 0$ neplatí na intervale $\langle a_2, \infty) \subset \subset \langle a_1, \infty)$ (a_2 je ľubovoľné číslo $> a_1$). Tento dôkaz vykonáme nepriamo. Nech $y'(t) \geqslant 0$ pre $t \geqslant a_2$. Potom $y(t) \geqslant y(a_2) > 0$ pre $t \geqslant a_2$ a z dif. rovnice (1) a zo (4) dostaneme $y'''(t) \leqslant -by(a_2)$ pre $t \geqslant a_2$, teda $y'(t) \to -\infty$ pre $t \to \infty$ a to nie je možné.

Preto $(i)\, y'(t) \leqslant 0$ pre $t \geqslant a_1$,
alebo $(j)\, y'(t)$ mení znamienko na intervale $\langle a_1, \infty)$.

(i) Nech $y'(t) \leqslant 0$ a $y(t) > 0$ pre $t > a_1$. Potom z identity (3) vzhľadom na (4) dostaneme

$$F[y(t)] - F[y(a_1)] = \int_{a_1}^{t} [A'(u) - B(u)]y^2(u)\mathrm{d}u + \tag{5}$$

$$+ \int_{a_1}^{t} C(u)y(u)y(u - h(u))\mathrm{d}u \leqslant -\frac{b}{2} \int_{a_1}^{t} y^2(u)\mathrm{d}u.$$

Aby sme dokázali, že $\lim y(t) = 0$ pre $t \to \infty$ stačí, ak dokážeme

$$\int_{a_1}^{\infty} y^2(u)\mathrm{d}u < \infty$$

Posledné tvrdenie dokážeme nepriamo. Predpokladajme, že

$$(6) \qquad \lim_{t\to\infty} \int_{a_1}^{t} y^2(u)\mathrm{d}u = \infty\,.$$

Potom z nerovnosti (5) dostaneme, že $\lim F[y(t)] = -\infty$ pre $t \to \infty$. Preto pre dostatočne veľké t platí nerovnosť

$$0 > F[y(t)] = y^2(t)\left[A(t) + \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)' + \frac{1}{2}\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2\right].$$

M. Zlámal v práci [4], vo vete 3 ukázal na základe poslednej nerovnosti, že

$$\int_{a_1}^{\infty} y^2(u)\mathrm{d}u < \infty,$$

čo je však spor so (6).

Ak si označíme $G[y(t)] = y''(t) + 2A(t)\dot{y}(t)$, potom po integrovaní dif. rovnice (1), použití (4) a predpokladu, že $y(t) > 0$ pre $t > a_0$ dostaneme pre $y''(t)$ nerovnosť

$$y''(t) \leqslant G[y(t)] \leqslant G[y(a_1)] \quad \text{pre} \quad t \geqslant a_1.$$

Ak použijeme lemu 2, nakoľko je $y''(t) \leqslant G[y(a_1)]$, $\lim y(t) = 0$ pre $t \to \infty$, dostaneme $\lim y'(t) = 0$ pre $t \to \infty$.

(j) Nech $y'(t)$ mení znamienko na intervale $\langle a_1, \infty)$ a $y(t) > 0$ pre $t \geqslant a_1 = \gamma(a_0)$. Ak $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť minim riešenia $y(t)$ hom. úlohy (1), (2) na intervale $\langle a_1, \infty)$, potom pre t_n platí: $y(t_n) > 0$, $y'(t_n) = 0$, $y''(t_n) > 0$, a preto $F[y(t_n)] > 0$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Nakoľko $F[y(t)]$ je klesajúca funkcia na intervale $\langle a_1, \infty)$ vyplýva z (3) vzhľadom na (4) a $F[y(t_n)] > 0$, že $F[y(t)] \geqslant 0$ pre $t \geqslant a_1$. Potom z (3) dostaneme nerovnosť

$$-F[y(t_1)] \leqslant \int_{t_1}^{t} [A'(u) - B(u)]y^2(u)\mathrm{d}u + \int_{t_1}^{t} C(u)y(u)y(u-h(u))\mathrm{d}u\,.$$

Z poslednej nerovnosti vzhľadom na (4) dostaneme

$$0 < \frac{b}{2}\int_{t_1}^{t} y^2(u)\mathrm{d}u \leqslant F[y(t_1)],$$

odkiaľ vyplýva, že integrál $\int_{t_1}^{\infty} y^2(u)\mathrm{d}u$ je konvergentný. Ak ďalej budeme postupovať rovnako, ako M. Zlámal v [4] pri dôkaze vety 3, ľahko sa ukáže, že

a, $by(t) \leqslant G[y(t_1)]$

b, $y'^2(t) \leqslant 2G[y(t_1)]y(t)$

Potom z a, b, na základe lemy 1 dostaneme, že $\lim y(t) = 0$ pre $t \to \infty$ a potom z b, dostaneme, že $\lim y'(t) = 0$ pre $t \to \infty$.

Príklad. Dif. rovnica

$$y'''(t) + \left(1 - \frac{4 \sin t}{e^t - \sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)}\right) y'(t) + 2 \times$$

$$\times \left(1 + \frac{4e^t - 2 \sin t}{e^t - \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}\right) y(t) + \frac{8\, e^{t/2}}{e^t - \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}\, y\left(\frac{t}{2}\right) = 0$$

má riešenie na intervale $\langle 0, \infty)$. Začiatočná množina je bod $t = 0$. Koeficienty dif. rovnice spĺňajú podmienky (4) na intervale $\langle 2/3\pi, \infty)$, lebo $2A(t) \geqslant 0{,}3$, $B(t) \geqslant 0{,}3$, $A'(t) - B(t) \leqslant -2$, $C(t) \leqslant 0$, pre $t \geqslant 2/3\pi$. Daná dif. rovnica má na intervale $\langle 0, \infty)$ neoscilatorické riešenie $y_1(t) = e^{-t}$ a oscilatorické riešenia $y_2(t) = e^t \cos 2t$, $y_3(t) = e^t \sin 2t$.

Lema 4. *Nech pre $t \in I \equiv \langle t_0, \infty)$ platia nerovnosti*

$$A(t) \geqslant 0,\ B(t) \geqslant 0,\ A'(t) - B(t) \leqslant 0,\ C(t) \leqslant 0 \tag{7}$$

pričom rovnosť môže platiť len v izolovaných bodoch intervalu I. Ak $y(t)$ je riešenie hom. úlohy (1), (2) *s vlastnosťou V, ktoré nemení znamienko na I a $\varphi(u) \,.\, y(t) \geqslant 0$ pre $u \in E_{t_0}$, $t \in I$, potom $y(t)$ má na intervale (t_0, ∞) najviac jeden koreň.*

Dôkaz vykonáme nepriamo. Ak $y(t)$ má dva korene t_1, t_2 ($y(t) \neq 0$ pre $t \in (t_1, t_2)$) potom $y(t_i) = y'(t_i) = 0$, $i = 1, 2$, a preto $F[y(t_i)] = 0$. Potom pomocou (3) vzhľadom na (5) dostaneme spor. Tým je lema dokázaná.

Lema 5. *Nech na intervale I platí* (7) *a nech $y(t)$ je neoscilatorické riešenie hom. úlohy* (1), (2) *s vlastnosťou V. Ak existuje bod $t_1 \in I$ taký, že $F[y(t_1)] \leqslant 0$ a $y(t)$ nemení znamienko na $E_{t_1} \cup \langle t_1, \infty)$, potom existuje taký bod $a \in I$ ($a \geqslant t_1$), že platí:*

1. $y(t) \neq 0$, $y'(t) \neq 0$, $y''(t) \neq 0$ *pre* $t > a$.
2. $\operatorname{sgn} y(t) = \operatorname{sgn} y'(t) = \operatorname{sgn} y''(t)$ *pre* $t > a$.
3. *V bodoch intervalu (a, ∞), v ktorých $y'''(t) \neq 0$ je* $\operatorname{sgn} y'''(t) \neq \operatorname{sgn} y(t)$.

Dôkaz. Ak riešenie $y(t)$ hom. úlohy (1), (2) s vlastnosťou V nemení znamienko na $E_{t_1} \cup \langle t_1, \infty)$, potom vzhľadom na (7) dostaneme na základe (3), že $F[y(t)] < F[y(t_1)] \leqslant 0$ pre $t > t_1$.

Nech $y(t) \geqslant 0$ pre $t \in E_{t_1} \cup \langle t_1, \infty)$. Potom vzhľadom na lemu 4 existuje taký bod $a_1 \geqslant t_1$, že $y(t) > 0$ pre $t > a_1$.

Ak dokážeme, že existuje taký bod $a_2 \geqslant a_1$, že $y'(t) > 0$ pre $t > a_2$, potom z dif. rovnice (1) vzhľadom na (7) dostaneme $y'''(t) \leqslant 0$ pre $t \geqslant a_2$, pričom rovnosť môže platiť len v izolovaných bodoch intervalu $\langle a_2, \infty)$. Keď $y'''(t) \leqslant 0$, potom $y''(t)$ je klesajúca funkcia a vzhľadom na $y'(t) > 0$ musí byť $y''(t) > 0$. Tým by bola veta dokázaná, pričom by sme položili $a = a_2$.

Dôkaz, že $y(t) > 0$,$y'(t) > 0$ pre $t \geqslant a_2$ sa vykoná nepriamo. Nebudeme ho uvádzať, nakoľko postup dôkazu je rovnaký ako dôkaz lemy 3,1 v [1]. Lema 5 je totiž modifikáciou lemy 3,1 uvedenej Lazerom v [1].

A. C. Lazer v práci [1], na strane 455 dokázal nasledovnú lemu.

Lema 6. *Ak* $y(t) \in C^3(a, \infty)$, $y(t) > 0$, $y'(t) > 0$, $y'''(t) \leqslant 0$ *pre* $t \geqslant a$, *potom*

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{y(t)}{ty'(t)} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Veta 2. *Nech na intervale* I *platí* (7) *a nech existuje číslo* $\alpha < 1/2$, *také že pre* $t \geqslant a \in I$ *platí nerovnosť*

$$\alpha t[B(t) - C(t)] + 2A(t) + h(t)C(t) > \frac{1 + \varepsilon}{4t^2}, \tag{8}$$

pričom $a > 0$ *a* ε *je malé kladné číslo. Nech na intervale* (a, ∞) *existuje postupnosť* $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, *pričom* $\lim t_n = +\infty$ *pre* $n \to \infty$. *Ak* $y(t)$ *je riešenie hom. úlohy* (1), (2) *s vlastnosťou* V, *ktoré je nie záporné v určitom okolí bodu* t_n *a ani na* E_{t_n} *a* $F[y(t_n)] \leqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *potom* $y(t)$ *je oscilatorické riešenie.*

Dôkaz vykonáme nepriamo. Nech $y(t)$ je neoscilatorické riešenie hom. úlohy (1), (2) a nech $F[y(t_n)] \leqslant 0$ pre $n = 1, 2, \ldots$ Potom existuje číslo $d \geqslant a$ také, že $y(t) \geqslant 0$ pre $t > d$ a k nemu bude existovať číslo N také, že $\gamma(d) \leqslant t_N$. Preto vzhľadom na lemu 5, pre riešenie $y(t)$, platí: $y(t) > 0$, $y'(t) > 0$, $y''(t) > 0$, $y'''(t) \leqslant 0$, od určitého čísla $a_1 > t_N$.

Vzhľadom na lemu 6 k ľubovoľnému číslu $\alpha < 1/2$ existuje číslo $a_2 > a_1$ také, že platí

$$\frac{y(t)}{y'(t)} \geqslant \alpha t \quad \text{pre} \quad t \geqslant a_2 \tag{9}$$

Preveďme dif. rovnicu (1) na systém

$$y'(t) - u(t) = 0$$

$$u''(t) + 2A(t)u(t) + B(t)y(t) - C(t)y(t - h(t)) = 0$$

a druhú rovnicu zo systému upravme na tvar

$$(10) \qquad u''(t) + \left[2A(t) + B(t)\,\frac{y(t)}{y'(t)} - C(t)\,\frac{y(t-h(t))}{y'(t)} \right] u(t) = 0$$

Ak použijeme Lagrangeovu vetu o strednej hodnote pre funkciu $y(t)$ na intrevale $\langle t - h(t), t\rangle$, dostaneme

$$y(t - h(t)) = y(t) - h(t)y'[\zeta(t)], \quad \text{kde} \quad \zeta(t) \in (t - h(t), t)$$

Potom na základe (9) a nerovnosti $y'(t) \geqslant y'[\zeta(t)](y''(t) > 0)$ platí

$$(11) \qquad \frac{y[t - h(t)]}{y'(t)} \geqslant \alpha t - h(t)$$

Takto na základe (11) dostaneme

$$(12) \qquad \begin{aligned} &2A(t) + B(t)\frac{y(t)}{y'(t)} - C(t)\,\frac{y(t - h(t))}{y'(t)} \geqslant \\ &\geqslant 2A(t) + \alpha t[B(t) - C(t)] + h(t)C(t) \end{aligned}$$

pre $t \geqslant a_2$.

Dif. rovnica

$$z''(t) + \{2A(t) + \alpha t[B(t) - C(t)] + h(t)C(t)\}z(t) = 0$$

je oscilatorická na $< a_2, \infty)$, lebo platí (8). Podľa porovnávacej vety, vzhľadom na (12) je oscilatorick á aj dif. rovnica (10), čo je však spor, lebo $u(t) = y'(t) > 0$ pre $t > a_2$. Tým je veta dokázaná.

LITERATÚRA

[1] Lazer A. C., *The behavior of solutions of the differential equations* $y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$, Pacif. J. Math., Vol. *17*, No. 3 (1966), 435—466.

[2] Норкин С. В.: *Дифференциальныйе уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом*, Москва 1965.

[3] Singh V. P.: *The asymptotic behavior of solutions of linear third order differential equations.* Amer. Math. Soc. Translat., Vol. *20*, No. 2, February 1969.

[4] Zlámal M., *Asymptotic properties of the solutions of the third order linear differential equations*, Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk *6* (1951), 159—166.

Došlo 16. 12. 1969

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Fakulty strojno-elektrotechnickej
Vysokej školy dopravnej,
Žilina

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION $y'''(t) + 2A(t)y'(t) + B(t)y(t) - C(t)y(t - h(t)) = 0$

Pavol Marušiak

Summary

In this paper some asymptotic properties of the solutions of the differential equation

$$y'''(t) + 2A(t)y'(t) + B(t)y(t) - C(t)y(t - h(t)) = 0 \tag{1}$$

on the interval $\langle t_0, \infty)$ are investigated.

It is proved that the solutions of (1) under certain conditions for the coefficients $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ have the same asymptotic properties as the solutions of the linear homogenous differential equation of the 3rd order without retarded argument.