Milan Gera

Bedingungen für die Existenz oszillatorischer Lösungen der Gleichung $x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$, $c(t) >= 0$

Matematický časopis, Vol. 25 (1975), No. 1, 23--40

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/127042`

Mat. Čas. 25, 1975, No. 1, 23—40

BEDINGUNGEN FÜR DIE EXISTENZ OSZILLATORISCHER LÖSUNGEN DER GLEICHUNG

$x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0, \quad c(t) \geqq 0$

MILAN GERA

In der Arbeit [1] wurden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz oszillatorischer Lösungen der Differentialgleichung

$$Lx \equiv x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$$

abgeleitet mit Rücksicht auf das Verhalten ihrer nichtoszillatorischen Lösungen, unter der Voraussetzung, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$lv \equiv v'' + a(t)v' + b(t)v = 0$$

im Intervall $I = (\alpha, \infty)$, $\alpha \geqq -\infty$ diskonjugiert ist und unter der Voraussetzung, dass $c(t) \geqq 0$ für $t \in I$ ist.

Im vorliegenden Artikel leiten wir, auf Grund der Ergebnisse von [1], konkrete hinreichende Bedingungen für die Existenz oszillatorischer Lösungen der Differentialgleichung $Lx = 0$ im Intervall I ab. Diese Bedingungen sind eine Verallgemeinerung und Ergänzung der konkreten Bedingungen für die Oszillation aus dem ersten und dritten Teil der Arbeit [2] und auch einiger Ergebnisse aus dem Artikel [3], wo die Differentialgleichungen dritter Ordnung der Form

$$y''' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{0}$$

untersucht werden. Diese Verallgemeinerung ist nicht nur in dem Sinne, dass $a(t) \not\equiv 0$ in I ist und dies aus folgenden Gründen:

1. Im allgemeinen kann die Differentialgleichung $Lx = 0$ nicht auf die Gleichung (0) überführt werden (z. B. wenn $a(t)$ in keiner Zahl $t \in I$ differenzierbar ist).

2. Im Falle, dass die Differentialgleichung $Lx = 0$ in die Differentialgleichung der Form (0) transformiert werden kann [4], müssen die Koeffizienten $p(t)$, $q(t)$ die geforderten Eigenschaften nicht besitzen (z. B. müssen sie nicht ein konstantes Zeichen haben). Wir werden dies weiter unten an Beispielen demonstrieren.

Über die Koeffizienten $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ setzen wir weiterhin voraus, dass diese stetige Funktionen im Intervall I sind.

Eine lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung nennen wir *diskonjugiert* im Intervall J, wenn jede ihre nichttriviale Lösung in J höchstens $n - 1$ Nullstellen, die Vielfachheit inbegriffen, hat.

Eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung nennen wir *oszillatorisch* in J, wenn in irgendeinem Intervall $J \cap (\beta, \infty)$, wo β aus dem Inneren des Intervall J ist, diese Lösung unendlich viele Nullstellen, welche einfach sind, hat. Im entgegengesetzten Falle sagen wir, die Lösung ist in J *nichtoszillatorisch*.

Eine Differentialgleichung nennen wir *oszillatorisch* im Intervall J, wenn sie wenigstens eine oszillatorische Lösung hat. Wenn die Differentialgleichung keine oszillatorische Lösung hat, sagen wir, dass sie in J *nichtoszillatorisch* ist.

Wir verwenden dieselbe Bezeichnungen wie in [1].

$\mathscr{S}^+(J)$ ($\mathscr{S}^-(J)$) bedeutet eine Menge nichtnegativer (nichtpositiver) und stetiger Funktionen im Intervall J;

$\mathscr{S}_0^+(J)$ ($\mathscr{S}_0^-(J)$) bedeutet die Menge der Funktionen aus $\mathscr{S}^+(J)$ ($\mathscr{S}^-(J)$), welche in keinem Teilintervall des Intervalls J identisch gleich Null sind.

Weiter bezeichnen wir:

$$h_+(t) = \frac{h(t) + |h(t)|}{2}, \quad h_-(t) = \frac{h(t) - |h(t)|}{2} \quad \text{für} \quad h(t) \in C(J);$$

$$E(t, \tau) = \exp \int_\tau^t a(\eta)\, \mathrm{d}\eta, \quad E^+(t, \tau) = \exp \int_\tau^t a_+(\eta)\, \mathrm{d}\eta,$$

$$E^-(t, \tau) = \exp \int_\tau^t a_-(\eta)\, \mathrm{d}\eta$$

für $(t, \tau) \in I \times I$.

Es sei

$$I_0 = \{t \in I;\quad 3b(t) \leqq a^2(t) < 4b(t)\},$$

$$I_1 = \{t \in I;\ a^2(t) \geqq 4b(t)\};$$

$$\varphi(t;\ a, b, c) = c(t) \quad \text{für} \quad t \in I_0$$

und

$$\varphi(t;\ a, b, c) = c(t) + \frac{2}{27} a^3(t) - \frac{1}{3} a(t)b(t) - \frac{2}{27} [a^2(t) - 3b(t)]^{3/2} \quad \text{für} \quad t \in I_1.$$

(Wenn $b(t) \in \mathscr{S}^-(I)$ ist, dann ist $I_1 = I$ und $I_0 = \emptyset$.)

Satz 1. *Es sei* $a(t) \in \mathscr{S}^-(I)$, $(a^2(t) - 3b(t)) \in \mathscr{S}^+(I)$ *und die Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$l^+v = v'' + a(t)v' + b_+(t)v = 0$$

sei im Intervall I diskonjugiert. Ferner sei $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$ *und*

$$\int_{t_0}^{\infty} \varphi(t; a, b, c)\, E(t, t_0)\, dt = \infty \quad (t_0 \in I). \tag{1}$$

Dann ist die Differentialgleichung $Lx = 0$ *im Intervall I oszillatorisch.*

Beweis. $u(t)$ sei eine Lösung der Differentialgleichung $Lx = 0$ ohne Nullstellen im Intervall I. Gemäss Hilfssatz 5 bzw. 6 [1] existiert dann eine solche Zahl $\tau \in I$, dass

$$R(t) = \frac{u'(t)}{u(t)} > 0 \quad \text{für} \quad t \geqq \tau \tag{i}$$

oder

$$R(t) = \frac{u'(t)}{u(t)} < 0 \quad \text{für} \quad t \geqq \tau \tag{ii}$$

ist. Wir zeigen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen (i) nicht gilt. Indirekt. Es sei $R(t) > 0$ für $t \geqq \tau$. Die Funktion $R(t)$ ist die Lösung der Riccatischen Differentialgleichung

$$R'' + a(t)R' + 3RR' = -(R^3 + a(t)R^2 + b(t)R + c(t)), \quad t \geqq \tau. \tag{R}$$

Da

$$\min_{Y \geqq 0} \{Y^3 + a(t)Y^2 + b(t)Y + c(t)\} = \varphi(t; a, b, c)$$

ist, ist

$$R''(t) + a(t)R'(t) + 3R(t)R'(t) \leqq -\varphi(t; a, b, c) \quad \text{für} \quad t \geqq \tau.$$

Aus dieser Ungleichung folgt

$$(R'(t)\, E(t, \tau))' + \frac{3}{2}(R^2(t))' E(t, \tau) \leqq -\varphi(t; a, b, c)\, E(t, \tau),$$

daraus erhalten wir durch Integration von τ bis t

$$R'(t)\, E(t, \tau) \leqq R'(\tau) + \frac{3}{2} R^2(\tau) - \frac{3}{2} R^2(t)\, E(t, \tau) +$$

$$+\frac{3}{2}\int_{\tau}^{t} a(s)R^2(s)\, E(s, \tau)\, \mathrm{d}s - \int_{\tau}^{t} \varphi(s; a, b, c)\, E(s, \tau)\, \mathrm{d}s, \quad t \geqq \tau .$$

Weil $a(t) \in \mathscr{S}^-(I)$ ist und (1) gilt, ist

$$\lim_{t\to\infty} R'(t)\, E(t, \tau) = -\infty .$$

Aus dieser Tatsache und daraus, dass $a(t) \in \mathscr{S}^-(I)$ ist, folgt, dass die Funktion $R(t)$ für ein genügend grosses t negativ ist. Dies ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass $R(t) > 0$ für $t \geqq \tau$ ist. Das bedeutet, dass nur (ii) gilt. Gemäss Hilfssatz 5 bzw. 6 [1] ist dann $u(t)u'(t) < 0$ für alle $t \in I$. Da $u(t)$ als beliebige Lösung von $Lx = 0$ ohne Nullstellen im Intervall I genommen worden war, ist aufgrund des Satzes 4 [1] die Differentialgleichung $Lx = 0$ im Intervall I oszillatorisch.

Bemerkung 1. Aus dem Satz 1 folgt im Falle, dass $a(t) \equiv 0$ in I ist, der Satz 1.3 aus dem Artikel [2].

Beispiel 1. Erwägen wir die Differentialgleichung

$$x''' + (-1 + \sin e^t)x'' - \sin^2 t\, x' + e^t x = 0, \quad t \in I \tag{2}$$

d. h. es ist:

$$a(t) = -1 + \sin e^t, \quad b(t) = -\sin^2 t, \quad c(t) = e^t \quad \text{für} \quad t \in I .$$

Dann ist

$$\varphi(t; a, b, c) = e^t + \frac{2}{27}(-1 + \sin e^t)^3 + \frac{1}{3}\sin^2 t\,(-1 + \sin e^t) -$$
$$-\frac{2}{27}[3\sin^2 t + (1 - \sin e^t)^2]^{3/2}$$

und

$$\int_{t_0}^{\infty} \varphi(t; a, b, c)\, E(t, t_0)\, \mathrm{d}t = \infty \quad (t_0 \in I) .$$

Aufgrund des Satzes 1 ist deshalb die Differentialgleichung (2) im Intervall I oszillatorisch.

Die Differentialgleichung (2) geht durch Transformation

$$x = y \exp\left(\frac{1}{3}\int_{t}^{t_0} a(s)\, \mathrm{d}s\right), \quad t \in I$$

in die oszillatorische Differentialgleichung

$$y''' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (t \in I) \tag{2'}$$

über, wo

$$p(t) = -\sin^2 t - \frac{1}{3}(-1 + \sin e^t)^2 - e^t \cos e^t$$

und

$$q(t) = e^t + \frac{1}{3}(-1+\sin e^t)\sin^2 t + \frac{2}{27}(-1+\sin e^t)^3 - \frac{1}{3} e^t \cos e^t + \frac{1}{3} e^{2t} \sin e^t$$

ist. Wir sehen, dass die Koeffizienten $p(t)$, $q(t)$ und auch die Funktionen $q(t) - p'(t)$, $2q(t) - p'(t)$ in keiner Umgebung des Punktes $+\infty$ ein konstantes Zeichen haben. Aus diesen Tatsachen folgt, dass es nicht möglich ist mit Hilfe der Ergebnisse von A. C. Lazer [2], M. Hanan [3] und auch der Ergebnisse von M. Greguš [5, 6], M. Ráb [7], M. Zlámal [8] festzustellen, ob die Differentialgleichung (2′) in I oszillatorisch ist.

Mit Rücksicht darauf, dass die Differentialgleichung (2) in I oszillatorisch ist und auch eine Lösung ohne Nullstellen in I hat (Satz 1′ [1]), ist laut Satz 1 [9] auch die zu (2) adjungierte Differentialgleichung

$$x''' + (1 - \sin e^t)x'' - (\sin^2 t + 2e^t \cos e^t)x' +$$
$$+ (e^{2t} \sin e^t - e^t \cos e^t - \sin 2t - e^t)x = 0,$$

in welcher die Koeffizienten bei x und x' in keiner Umgebung von $+\infty$ ein konstantes Zeichen haben, in I oszillatorisch.

Aufgrund des Satzes 1 kann gezeigt werden, dass auch die Differentialgleichungen

$$x''' - \frac{\sin^2 t}{2t} x'' + \frac{\sin^4 t - \frac{3}{4}}{4t^2} x' + \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} x = 0,$$

$$x''' - \frac{\sqrt{3\,|\sin t|}}{2t} x'' + \frac{\sin t}{4t^2} x' + \frac{1}{t^{1-\sqrt{3}/2} \ln t} x = 0$$

in $(1, \infty)$ oszillatorisch sind.

Bemerkung 2. Wenn im Satz 1 die Voraussetzung (1) nicht erfüllt ist, dann kann die Differentialgleichung $Lx = 0$ in I diskonjugiert oder oszillatorisch sein. Zum Beispiel die Gleichung

$$x''' - 3x'' + 4x = 0$$

ist diskonjugiert in I und die Gleichung

$$x''' - 3x'' + (4 + \varepsilon)x = 0, \quad \varepsilon \in (0, \infty)$$

ist oszillatorisch in I.

Satz 1'. *Es sei* $a(t) \in C^1(I) \cap \mathscr{S}^+(I)$, $(b(t) - a'(t)) \in \mathscr{S}^+(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$ *und*

(c) $$\int_{\tau_0}^{\infty} c(t)\, dt = \infty \quad (\tau_0 \in I).$$

Weiter sei die Differentialgleichung $l^+v = 0$ *diskonjugiert im Intervall* I *und*

(E) $$\int_{\tau_0}^{\infty} E(\tau_0, t)\, dt = \infty,$$

wenn $b(t) \,\overline{\in}\, \mathscr{S}^-(I)$ *gilt. Dann ist die Differentialgleichung* $Lx = 0$ *im Intervall* I *oszillatorisch.*

Beweis. Dieser wird indirekt durchgeführt. Die Differentialgleichung $Lx = 0$ sei nichtoszillatorisch im Intervall I. Dann existiert laut Satz 2 [1] eine solche Lösung $y(t)$ von $Lx = 0$ und eine solche Zahl $\tau_1 \in I$, dass $y(t)y'(t) > 0$ für $t > \tau_1$ ist. Es sei

$$R(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} \qquad \text{für} \quad t \geqq \tau > \tau_1.$$

Die Funktion $R(t)$ entspricht der Gleichung (R). Weil $R(t) > 0$ in $[\tau, \infty)$ ist, folgt für die Funktion $R(t)$ aus (R)

$$R''(t) + a(t)R'(t) + 3R(t)R'(t) \leqq -b(t)R(t) - c(t)$$
$$(t \geqq \tau),$$

woraus wir durch Integration von τ bis t

$$R'(t) + a(t)R(t) + \int_{\tau}^{t} [b(s) - a'(s)]R(s)\, ds + \frac{3}{2} R^2(t) \leqq$$
$$\leqq K - \int_{\tau}^{t} c(s)\, ds \quad \left(K = R'(\tau) + a(\tau)R(\tau) + \frac{3}{2} R^2(\tau)\right)$$

für $t \geqq \tau$ erhalten.

Da $(b(t) - a'(t)) \in \mathscr{S}^+(I)$, $a(t) \in \mathscr{S}^+(I)$ gilt, erhalten wir aus der letzten Ungleichheit

$$R'(t) \leqq K - \int_\tau^t c(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{für} \quad t \geqq \tau .$$

Mit Rücksicht auf (c), folgt daraus, dass

$$\lim_{t\to\infty} R'(t) = -\infty$$

ist. Aus dieser Tatsache geht hervor, dass $R(t) < 0$ in einer bestimmten Umgebung von ∞ ist. Das widerspricht $R(t) > 0$ in $[\tau, \infty)$. Damit wurde gezeigt, dass die Differentialgleichung $Lx = 0$ in I oszillatorisch ist.

Hilfssatz 1. *Es seien τ_0, τ Zahlen aus dem Intervall I. Die Funktion $g(t) \in \in C^2([\tau, \infty))$ sei derart, dass $g(t) > 0$, $g'(t) > 0$ für $t \geqq \tau$ gilt und $g''(t)\,E(t, \tau_0)$ habe eine stetige und nichtpositive Ableitung in $[\tau, \infty)$. Dann gilt*

$$\frac{g(t)}{g'(t)} > \frac{\int_\tau^t (t - s)\,E(\tau_0, s)\,\mathrm{d}s}{\int_\tau^t E(\tau_0, s)\,\mathrm{d}s} \tag{3}$$

für $t > \tau$.

Beweis. Erwägen wir die Funktion

$$G(t) = g(t) \int_\tau^t E(\tau_0, s)\,\mathrm{d}s - g'(t) \int_\tau^t (t - s)\,E(\tau_0, s)\,\mathrm{d}s, \quad t \geqq \tau .$$

Dann ist $G(\tau) = 0$ und

$$G'(t)\,E(t, \tau_0) - g(t) - g''(t)\,E(t, \tau_0) \int_\tau^t (t - s)\,E(\tau_0, s)\,\mathrm{d}s = H(t) .$$

$$H(\tau) = g(\tau) > 0, \quad H'(t) = g'(t) - g''(t)\,E(t, t_0) \int_\tau^t E(\tau_0, s)\,\mathrm{d}s -$$

$$- (g''(t)\,E(t, \tau_0))' \int_\tau^t (t - s)\,E(\tau_0, s)\,\mathrm{d}s \geqq$$

$$\geqq g'(t) - g''(t)\,E(t, \tau_0) \int_\tau^t E\,(\tau_0, s)\,\mathrm{d}s = F(t) .$$

Also haben wir $F(\tau) = g'(\tau) > 0$ und

$$F'(t) - - (g''(t)\,E(t, \tau_0))' \int_\tau^t E(\tau_0, s)\,\mathrm{d}s \geqq 0 \quad \text{für} \quad t \geqq \tau .$$

Aus diesen Tatsachen folgt, dass $F(t) \geqq F(\tau) > 0$, $H'(t) \geqq F(t)$, $H(t) \geqq H(\tau) >$

> 0 und $G'(t) > 0$ für $t \geqq \tau$. Das heisst, dass $G(t) > G(\tau) = 0$ für $t > \tau$ ist, d. h. es gilt (3).

Folgerung 1. *Die Funktion $g(t)$ erfülle die im Hilfssatz* 1 *angeführten Voraussetzungen. Dann gilt*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{g(t)}{tg'(t)} E^-(\tau_0, t) \geqq \frac{1}{2} \qquad (\tau_0 \in I).$$

Beweis. Für $t \in (\tau', \infty)$, wo $\tau' \geqq \max\{\tau_0, \tau\}$ ist, gilt

$$\frac{\int_{\tau'}^{t} (t-s) E(\tau_0, s)\, ds}{\int_{\tau'}^{t} E(\tau_0, s)\, ds} = \frac{\int_{\tau'}^{t} (t-s) E^+(\tau_0, s) E^-(\tau_0, s)\, ds}{\int_{\tau'}^{t} E^+(\tau_0, s) E^-(\tau_0, s)\, ds} \geqq$$

$$\geqq E^-(t, \tau_0) \frac{\int_{\tau'}^{t} (t-s) E^+(\tau_0, s)\, ds}{\int_{\tau'}^{t} E^+(\tau_0, s)\, ds}.$$

Auf Grund des Cauchyschen Satzes über das Zunehmen der Funktionen haben wir weiter

$$\frac{\int_{\tau'}^{t} (t-s) E^+(\tau_0, s)\, ds}{(t-\tau') \int_{\tau'}^{t} E^+(\tau_0, s)\, ds} = \frac{\int_{\tau'}^{\tau_1} E^+(\tau_0, s)\, ds}{\int_{\tau'}^{\tau_1} E^+(\tau_0, s)\, ds + (\tau_1 - \tau') E^+(\tau_0, \tau_1)} =$$

$$= \frac{E^+(\tau_1, \tau_0) \int_{\tau'}^{\tau_1} E^+(\tau_0, s)\, ds}{(\tau_1 - \tau') + E^+(\tau_1, \tau_0) \int_{\tau'}^{\tau_1} E^+(\tau_0, s)\, ds} =$$

$$= \frac{1 + a_+(\tau_2) E^+(\tau_2, \tau_0) \int_{\tau'}^{\tau_2} E^+(\tau_0, s)\, ds}{1 + 1 + a_+(\tau_2) E^+(\tau_2, \tau_0) \int_{\tau'}^{\tau_2} E^+(\tau_0, s)\, ds} \geqq \frac{1}{2}$$

für $t > \tau'$, wo $\tau' < \tau_2 < \tau_1 < t$ ist.

Aus diesen Tatsachen und aus dem Hilfssatz 1 für die Funktion $g(t)$ in (τ', ∞) erhalten wir

$$\frac{g(t)}{g'(t)} > \frac{t-\tau'}{2} E^{-}(t, \tau_0),$$

daraus geht die Behauptung der Folgerung hervor.

Folgerung 2. *Die Funktion $g(t)$ entspreche den Voraussetzungen des Hilfssatzes* 1 *und*

1. *die Funktion $a(t)$ sei derart, dass für $t > \tau$*

$$0 < m \leqq E(\tau_0, t) \leqq M$$

gilt, wo m, M Zahlen sind. Dann ist

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{g(t)}{tg'(t)} \geqq \frac{m}{2M}.$$

2. *es sei*

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = -A, \quad A \in (0, \infty).$$

Dann gilt

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{g(t)}{g'(t)} \geqq \frac{1}{A}.$$

Bemerkung 3. Aus dem Hilfssatz 1 folgt

$$\frac{\int_\tau^t (t-s)\, E(\tau_0, s)\, ds}{\int_\tau^t E(\tau_0, s)\, ds} > \frac{\int_{\tau'}^t (t-s)\, E(\tau_0, s)\, ds}{\int_{\tau'}^t E(\tau_0, s)\, ds} \qquad \text{für} \quad t > \tau' > \tau > \alpha, \quad \tau_0 \in I.$$

Bemerkung 4. Es gilt

$$t - \tau \geqq \frac{\int_\tau^t (t-s)\, E\,(\tau_0, s)\, ds}{\int_\tau^t E(\tau_0, s)\, ds} \geqq \frac{t-\tau'}{2} E^{-}(t, \tau_0)$$

für $t > \tau' \geqq \tau > \alpha$, $\tau' \geqq \tau_0 > \alpha$ und also ist

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\int_\tau^t (t-s)\, E(\tau_0, s)\, ds}{t \int_\tau^t E(\tau_0, s)\, ds} \leqq 1,$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\int_\tau^t (t-s)\,E(\tau_0, s)\,\mathrm{d}s}{tE^-(t,\tau_0)\int_\tau^t E(\tau_0, s)\,\mathrm{d}s} \geqq \frac{1}{2}.$$

Satz 2. *Es sei* $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$, $b(t) \in \mathscr{S}^+(I)$,

$$\text{(E)} \qquad \int_{\tau_0}^{\infty} E(\tau_0, s)\,\mathrm{d}s = \infty \quad (\tau_0 \in I)$$

und eine Funktion $\mu(t) \in C(I)$, $\mu(t) > 0$ *in irgendeinem Intervall* $(t_0, \infty) \subset I$ *existiere derart, dass*

$$(4) \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{\int_\tau^t (t-s)\,E(\tau_0, s)\,\mathrm{d}s}{\mu(t)\int_\tau^t E(\tau_0, s)\,\mathrm{d}s} \geqq 1$$

für ein beliebiges $\tau \in I$ *gilt. Ausserdem sei die Differentialgleichung zweiter Ordnung* $lv = 0$ *diskonjugiert im Intervall* I *und die Differentialgleichung*

$$(5) \qquad v'' + a(t)v' + [b(t) + \Theta\mu(t)c(t)]v = 0$$

sei oszillatorisch in I *für irgendeine Zahl* $\Theta \in (0, 1)$. *Dann ist die Differentialgleichung* $Lx = 0$ *im Intervall* I *oszillatorisch.*

Beweis. Es sei $u(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $Lx = 0$ ohne Nullstellen im Intervall I. Ohne Verlust an der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass $u(t) > 0$ in I ist. Mit Rücksicht darauf, dass (E) gilt und die Differentialgleichung $lv = 0$ in I diskonjugiert ist, existiert auf Grund des Hilfssatzes 6 bzw. 5 [1] eine solche Zahl $\tau \in I$, dass entweder

$$\text{(j)} \qquad u(t) > 0, \quad u'(t) < 0 \quad \text{für} \quad t \geqq \tau$$

oder

$$\text{(jj)} \qquad u(t) > 0, \quad u'(t) > 0 \quad \text{für} \quad t \geqq \tau$$

ist.

Wir zeigen, dass der Fall (jj) unter den gegebenen Voraussetzungen nicht eintreten kann. Tatsächlich, es sei $u(t) > 0$, $u'(t) > 0$ für $t \geqq \tau$. Dann ist

$$(u''(t)\,E(t, t_0))' = -\,[b(t)u'(t) + c(t)u(t)]\,E(t, t_0) \in \mathscr{S}_0\,([\tau, \infty)).$$

Laut Hilfssatz 1 und (4) für die Lösung $u(t)$ haben wir dann, dass

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{u(t)}{\mu(t)u'(t)} \geqq 1$$

ist. Das heisst, dass zu der Zahl $\Theta \in (0, 1)$ eine solche Zahl $T > \tau$ $(T > t_0)$ existiert, dass

$$\frac{u(t)}{\mu(t)u'(t)} > \Theta$$

für $t > T$ ist, d. h. es gilt

$$\frac{u(t)}{u'(t)} > \Theta\mu(t)$$

für $t \in (T, \infty)$. Setzen wir

$$u'(t) = y .$$

Dann können wir die Gleichheit $Lu = 0$ auf folgende Art schreiben:

$$y'' + a(t)y' + \left[b(t) + \frac{u(t)}{u'(t)}\, c(t)\right] y = 0, \quad t > T.$$

Weil

$$b(t) + \frac{u(t)}{u'(t)}\, c(t) \geqq b(t) + \Theta\mu(t)\, c(t)$$

für $t > T$ ist und die Differentialgleichung (5) in I oszillatorisch ist, folgt aus dem Sturmschen Vergleichungssatz, dass auch die Differentialgleichung

$$v'' + a(t)v' + \left[b(t) + \frac{u(t)}{u'(t)}\, c(t)\right] v = 0 \tag{6}$$

in $[\tau, \infty)$ oszillatorisch ist. Dies ist aber im Widerspruch zu der Tatsache, dass die Differentialgleichung (6) in $[\tau, \infty)$ die nichtoszillatorische Lösung $v = u'(t)$ hat. Also kann der Fall (jj) nicht eintreten, sondern nur der Fall (j). Auf Grund des Hilfssatzes 6 bzw. 5 [1] ist dann $u(t) > 0$, $u'(t) < 0$ für alle $t \in I$. Da $u(t)$ eine beliebige Lösung von $Lx = 0$ ohne Nullstellen in I war, ist laut Satz 4 [1] die Differentialgleichung $Lx = 0$ im Intervall I oszillatorisch.

Bemerkung 5. Wenn $b(t) \equiv 0$ in I ist, dann ist es möglich im Satz 2 die Voraussetzung ($\mathfrak{E}$) wegzulassen. (Im Beweis des Satzes 2 wird nur der Hilfssatz 5 [1], in welchem die Voraussetzung ($\mathfrak{E}$) nicht verlangt wird, angewandt.)

Bemerkung 6. 1. Im Satz 2 können wir im allgemeinen

$$\mu(t) = \frac{t}{2} E^{-}(t, t_0), \quad t > t_0 > \alpha, \quad t_0 \geqq 0$$

setzen.

2. Wenn solche positive Zahlen m und M existieren, dass für $t > t_0 > \alpha$, $t_0 \geqq 0$

$$m \leqq E(\tau_0, t) \leqq M \quad (\tau_0 \in I)$$

bzw.

$$\lim_{t \to \infty} a(t) = -A, \quad A \in (0, \infty)$$

gilt, dann ist es möglich im Satz 2 $\mu(t) = mt/2M$ bzw. $\mu(t) = 1/A$ zu nehmen.

3. Wenn das Integral

$$\int_{t_0}^{\infty} a(s) \, \mathrm{d}s \quad (t_0 \in I)$$

existiert, dann kann man im Satz 2

$$\mu(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{s}^{\infty} a(\eta) \, \mathrm{d}\eta \right) \mathrm{d}s, \quad t > t_0$$

setzen. (In beiden Fällen 2 und 3 ist die Bedingung (E) erfüllt.)

Bemerkung 7. Im Falle, dass $a(t) = 0$ in I ist, ist der Satz 2 eine Ergänzung des Satzes 3.1 [2] in dem Sinne, dass anstatt der Voraussetzung $(2c(t) - b'(t)) \in \mathscr{S}_0^+(I)$ im Satz 2 die Voraussetzung, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$v'' + b(t)v = 0$$

im Intervall I diskonjugiert ist, besteht.

Beispiel 2.

$$x''' + \frac{\sin^2 t}{4t^2} x' + \left[\frac{\cos^2 t}{t^3} + \frac{\delta}{t^3 \ln^2 t} \right] x = 0, \quad t \in (1, \infty), \tag{7}$$

wo $\delta (\delta > 1)$ eine Zahl ist.

Wir zeigen aufgrund des Satzes 2, dass die Differentialgleichung (7) in $(1, \infty)$ oszillatorisch ist.

Mit Rücksicht darauf, dass $\sin^2 t/4t^2 \leqq 1/4t^2$ für $t > 1$ gilt und die Differentialgleichung

$$v'' + \frac{1}{4t^2} v = 0$$

in $(1, \infty)$ diskonjugiert ist, ist auch die Differentialgleichung

$$v'' + \frac{\sin^2 t}{4t^2} v = 0$$

in $(1, \infty)$ diskonjugiert [10]. Ferner ist ersichtlich, dass die Bedingung (E) erfüllt ist und als $\mu(t)$ können wir die Funktion $t/2$ nehmen. Setzen wir $\Theta =$ $= 1/2$. Dann hat die entsprechende Differentialgleichung (5) die Form

$$v'' + \left[\frac{1}{4t^2} + \frac{\delta}{4t^2 \ln^2 t}\right] v = 0 \quad (t > 1) .$$

Diese Differentialgleichung ist oszillatorisch in $(1, \infty)$ für $\delta > 1$ ([10], Seite 384).

Die Voraussetzungen des Satzes 2 sind für die Differentialgleichung (7) erfüllt, also ist die Differentialgleichung (7) in $(1, \infty)$ oszillatorisch. Da die Gleichung (7) auch eine Lösung ohne Nullstellen in $(1, \infty)$ hat (Satz 1 [1]), ist gemäss Satz 1 [9] auch die adjungierte Differentialgleichung

$$x''' + \frac{\sin^2 t}{4t^2} x' + \left[\frac{\sin 2t}{4t^2} - \frac{\sin^2 t}{2t^3} - \frac{\cos^2 t}{t^3} - \frac{\delta}{t^3 \ln^2 t}\right] x = 0$$

in $(1, \infty)$ oszillatorisch.

Die Funktion

$$2c(t) - b'(t) = \frac{1}{t^3}\left[2 \cos^2 t + \frac{\sin^2 t}{2} + \frac{2\delta}{\ln^2 t} - \frac{t}{4} \sin 2t\right]$$

$$\left(c(t) - b'(t) = \frac{1}{t^3}\left[\cos^2 t + \frac{\sin^2 t}{2} + \frac{\delta}{\ln^2 t} - \frac{t}{4} \sin 2t\right]\right)$$

hat in der beliebigen Umgebung des Punktes $+\infty$ kein konstantes Zeichen. Aus diesem Grund ist es nicht möglich mit Hilfe des Satzes 3.1 [2] (des Satzes 5.12 [3]) und ebenso der Ergebnisse [5, 6, 7, 8] festzustellen, ob die Differentialgleichung (7) in $(1, \infty)$ oszillatorisch ist.

Beispiel 3.

$$x''' + \sin^2 t\, x'' + \frac{4}{t} x = 0, \quad t \in (0, \infty). \tag{8}$$

Diese Differentialgleichung geht durch die Substitution

$$x = y \exp\left(\frac{1}{3}\int_t^1 \sin^2 s \, ds\right), \qquad t > 0$$

in die Differentialgleichung

$$(8') \qquad y''' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (t > 0)$$

über, wo

$$p(t) = -\frac{1}{3}\sin^4 t - \sin 2t, \qquad q(t) = \frac{4}{t} + \frac{2}{27}\sin^6 t - \frac{2}{3}\cos 2t$$

ist. Man sieht leicht, dass $p(t)$, $q(t)$ und $2q(t) - p'(t)$, $q(t) - p'(t)$ in keinem Intervall (τ, ∞), $\tau > 0$ ein konstantes Zeichen haben. Es ist also nicht möglich mit Hilfe der bekannten Ergebnisse [2, 3, 5, 6, 7, 8] festzustellen, ob die Differentialgleichung (8′) in $(0, \infty)$ oszillatorisch ist.

Jetzt zeigen wir aufgrund des Satzes 2, dass die Differentialgleichung (8) in $(0, \infty)$ oszillatorisch ist. Es ist offenbar, dass dann auch die Differentialgleichung (8′) in $(0, \infty)$ oszillatorisch ist. Nämlich, die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$v'' + \sin^2 t\, v' = 0$$

ist diskonjugiert in $(0, \infty)$. Weil der Koeffizient bei x' in (8) gleich Null ist, ist die Voraussetzung (E) im Satze 2 nicht nötig (Bemerkung 5). Weiter können wir aufgrund der Bemerkung 6 $\mu(t) = t/2$ nehmen. Setzen wir $\Theta = 1/2$. Dann hat die Differentialgleichung (5) die Form

$$(9) \qquad v'' + \sin^2 t\, v' + v = 0,$$

welche durch die Transformation

$$v = w \exp\left(\frac{1}{2}\int_t^1 \sin^2 s\, ds\right)$$

in die Differentialgleichung

$$(\mathrm{Q}) \qquad w'' + Q(t)w = 0$$

übergeht, wo

$$Q(t) = 1 - \frac{\sin 2t}{2} - \frac{1}{4}\sin^4 t \quad (t > 0)$$

ist. Weil $Q(t) \geqq 1/4$ für $t > 0$ und die Differentialgleichung

$$w'' + \frac{1}{4}w = 0$$

in $(0, \infty)$ oszillatorisch ist, ist aufgrund des Vergleichungssatzes von Sturm auch die Differentialgleichung (Q) in $(0, \infty)$ oszillatorisch und also auch die

Differentialgleichung (9). Die Voraussetzungen des Satzes 2 sind für die Differentialgleichung (8) erfüllt (siehe auch die Bemerkung 5) und deshalb ist die Differentialgleichung (8) in $(0, \infty)$ oszillatorisch.

Satz 3. *Es sei* $b(t) \in \mathscr{S}^+(I)$,

$$\text{(E)} \qquad \int_{\tau_0}^{\infty} E(\tau_0, s)\,\mathrm{d}s = \infty \quad (\tau_0 \in I)$$

und die Differentialgleichung zweiter Ordnung $lv = 0$ *sei im Intervall* I *diskonjugiert. Ferner sei* $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$ *und die Differentialgleichung* $Lx = 0$ *sei im Intervall* I *nichtoszillatorisch. Dann ist*

$$\int_{t_0}^{\infty} b(t)E(t, t_0)\,\mathrm{d}t < \infty, \qquad \int_{t_0}^{\infty} tc(t)\,E(t, t_0)\,\mathrm{d}t < \infty \qquad (t_0 \in I).$$

Wenn dabei $b(t) \in C^1(I)$ *und* $(c(t) - b'(t) - a(t)b(t)) \in \mathscr{S}^+(I)$ *ist, dann gilt*

$$\int_{\tau_0}^{\infty} t[c(t) - b'(t) - a(t)b(t)]\,E(t, t_0)\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Beweis. Mit Rücksicht auf die Voraussetzungen des Satzes existiert laut Satz 2 [1] eine solche Zahl $\tau \in I$ und eine solche Lösung $y(t)$ von $Lx = 0$, dass $y(t) > 0$, $y'(t) > 0$ für $t \in (\tau, \infty)$ ist. Daher gilt

$$(10) \quad (y''(t)\,E(t, t_0))' = -\,[b(t)y'(t) + c(t)y(t)]\,E(t, t_0) = Y(t) \in \mathscr{S}_0^-((\tau, \infty)).$$

Wir zeigen, dass $y''(t) > 0$ in $[\tau, \infty)$ ist. Indirekt. Es sei $y''(\tau_1) \leqq 0$ in irgenddeinem $\tau_1 \geqq \tau$. Dann ist

$$y''(t) = y''(\tau_1)\,E(\tau_1, t) + E(t_0, t)\int_{\tau_1}^{t} Y(s)\,\mathrm{d}s < 0$$

für $t > \tau_1$. Es sei $\tau_2 > \tau_1$. Weil $(y''(t)\,E(t, t_0))' \in \mathscr{S}_0^-((\tau, \infty))$ gilt, ist

$$y''(t) \leqq y''(\tau_2)\,E(\tau_2, t) \quad \text{für} \quad t \geqq \tau_2.$$

Aus dieser Ungleichung folgt, dass

$$y'(t) \leqq y'(\tau_2) + y''(\tau_2)\int_{\tau_2}^{t} E(\tau_2, s)\,\mathrm{d}s$$

für $t \geqq \tau_2$ ist. Daraus, mit Rücksicht darauf, dass die Bedingung (E) erfüllt ist, erhalten wir

$$\lim_{t \to \infty} y'(t) = -\,\infty.$$

Das ist aber im Widerspruch zu der Tatsache, dass $y'(t) > 0$ in (τ, ∞) ist. Also haben wir $y''(t) > 0$ für $t \geqq \tau$. Aus diesen Tatsachen geht hervor, dass ein Limes

$$\lim_{t \to \infty} y''(t)\, E(t, t_0)$$

existiert und ist endlich. Dieser Limes sei gleich $\bar{k}$ ($\bar{k} \geqq 0$). Mittels Integration der Gleichheit (10) von τ bis t erhalten wir

$$y''(t)\, E(t, t_0) = y''(\tau)\, E(\tau, t_0) - \int_\tau^t b(s)\, E(s, t_0)\, y'(s)\, ds - \int_\tau^t c(s)\, E(s, t_0) y(s)\, ds,$$

woraus

$$\bar{k} = y''(\tau)\, E(\tau, t_0) - \lim_{t \to \infty} \{ \int_\tau^t b(s)\, E(s, t_0)\, y'(s)\, ds + \tag{11}$$

$$+ \int_\tau^t c(s)\, E(s, t_0)\, y(s)\, ds\}$$

folgt. Weil $b(t) \in \mathscr{S}^+(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$, $y(t) > 0$, $y'(t) > 0$ für $t > \tau$ ist, folgt aus (11), dass die Integrale

$$\int_\tau^\infty b(s)\, E(s, t_0)\, y'(s)\, ds, \quad \int_\tau^\infty c(s)\, E(s, t_0)\, y(s)\, ds$$

konvergent sind. Mit Rücksicht darauf, dass $y''(t) > 0$ in $[\tau, \infty)$ und $y(t) > 0$, $y'(t) > 0$ für $t > \tau$ gilt, ist

$$y'(t) > y'(\xi), \quad y(t) > y(\xi) + y'(\xi)(t - \xi) \quad \text{für} \quad t > \xi > \tau.$$

Aus diesem Grunde sind die Integrale

$$\int_\xi^\infty b(s)\, E(s, t_0)\, ds, \quad \int_\xi^\infty (s - \xi)\, c(s)\, E(s, t_0)\, ds \tag{12}$$

konvergent. Ist dabei $b(t) \in C^1(I)$, dann folgt aus der Konvergenz der Integrale (12) und daraus, dass

$$\int_\xi^t [b(s) + (s - \xi)\, c(s)]\, E(s, t_0)\, ds$$

$$- (t - \xi)\, b(t)\, E(t, t_0) + \int_\xi^t (s - \xi)[c(s) - b'(s) - a(s)\, b(s)]\, E(s, t_0)\, ds,$$

$$b(t) \in \mathscr{S}^+(I), \quad (c(t) - b'(t) - a(t)\, b(t)) \in \mathscr{S}^+(I)$$

ist, auch die Konvergenz des Integrals

$$\int_\xi^\infty s[c(s) - b'(s) - a(s)\, b(s)]\, E(s, t_0)\, ds.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 8. Wenn $b(t) \in \mathscr{S}^+(I)$ und

$$\int_{t_0}^\infty E(t_0, s)\, ds = \int_{t_0}^\infty b(s)\, E(s, t_0)\, ds = \infty \quad (t_0 \in I)$$

gilt, dann ist die Differentialgleichung $lv = 0$ im Intervall I oszillatorisch (siehe [11]).

Mit Hinblick auf die Bemerkung 8 erhalten wir aus Satz 3 die

Folgerung 1. *Es sei $b(t) \in \mathcal{S}^+(I)$ $(b(t) \in C^1(I) \cap \mathcal{S}^+(I))$ und die Bedingung (E) sei erfüllt. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung $lv = 0$ sei im Intervall I diskonjugiert. Ausserdem sei $c(t) \in \mathcal{S}_0^+(I)$ $(c(t) \in \mathcal{S}_0^+(I)$, $(c(t) - b'(t) - -a(t)\, b(t)) \in \mathcal{S}^+(I))$ und*

$$\int_{t_0}^{\infty} tc(t)\, E(t, t_0)\, \mathrm{d}t = \infty \quad \left(\int_{t_0}^{\infty} t[c(t) - b'(t) - a(t)\, b(t)]\, E(t, t_0)\, \mathrm{d}t = \infty \right),$$

wo $t_0 \in I$ ist. Dann ist die Differentialgleichung $Lx = 0$ im Intervall I oszillatorisch.

Folgerung 2. *Die Voraussetzungen des Satzes 3 seien erfüllt. Für jede Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung $Lx = 0$ mit der Eigenschaft $y(t)\, y'(t) > 0$ in (τ, ∞)*(1)*, wo $\tau \in I$ ist, gilt dann*

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} y''(t)\, E(t, t_0) = \bar{k} \in (-\infty, \infty) \quad (t_0 \in I),$$

$$y(t)\, y''(t) > 0 \quad \text{in} \quad (\tau, \infty), \quad y''(\tau) \neq 0$$

und

$$y''(t)\, E(t, t_0) = \bar{k} + \int_t^{\infty} b(s)\, E(s, t_0)\, y'(s)\, \mathrm{d}s + \int_t^{\infty} c(s)\, E(s, t_0)\, y(s)\, \mathrm{d}s$$

$$\text{für} \quad t \in I.$$

Wenn dabei $b(t) \in C^1(I)$ und $((c(t) - b'(t) - a(t)\, b(t)) \in \mathcal{S}^+(I)$ ist, dann gilt

$$\lim_{t\to\infty} y(t)\, b(t)\, E(t, t_0) = \bar{k}_0 \in (-\infty, \infty)$$

und

$$[y''(t) + b(t)\, y(t)]\, E(t, t_0) =$$

$$= \bar{k} + \bar{k}_0 + \int_t^{\infty} [c(s) - b'(s) - a(s)\, b(s)]\, E(s, t_0)\, y(s)\, \mathrm{d}s$$

für $t \in I$.

Bemerkung 9. Aus der Folgerung 1 des Satzes 3 für $a(t) = 0$, $b(t) \in C^1(I)$ geht der Satz 5.12 [3] hervor.

Beispiel 4.

$$x''' - \cos t\, x'' + \frac{\lambda}{t^2 \ln t}\, x = 0 \quad (t > 1), \tag{13}$$

wo λ eine positive Zahl ist. Aufgrund der Folgerung 1 des Satzes 3 ist diese Differentialgleichung in $(1, \infty)$ oszillatorisch.

(1) Die Existenz wenigstens einer solchen Lösung verbürgt der Satz 2 [1].

Die Differentialgleichung (13) geht durch die Substitution

$$x = y \exp\left(\frac{1}{3} \sin t\right)$$

in die oszillatorische Differentialgleichung

$$y''' - \left(\frac{1}{3} \cos^2 t + \sin t\right) y' + \left(\frac{\lambda}{t^2 \ln t} - \frac{2}{27} \cos^3 t - \frac{1}{3} \cos t\right) y = 0 \quad (t > 1)$$

über. Zu der Feststellung, ob diese Differentialgleichung in $(1, \infty)$ oszilatorisch ist, kann man die bisher bekannten Ergebnisse [2, 3, 5, 6, 7, 8] nicht verwenden.

LITERATUR

[1] GERA, M.: Über einige Eigenschaften der Lösungen der Gleichung $x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$, $c(t) \geqq 0$. Mat. Čas., *24*, 1974, 357—370.

[2] LAZER, A. C.: The behavior of solutions of the differential equation $y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Pac. J. Math., *17*, 1966, 435—466.

[3] HANAN, M.: Oscillation criteria for third-order linear differential equations. Pac. J. Math., *11*, 1961, 919—944.

[4] САНСОНЕ, ДЖ.: Обыкновенные дифференциальные уравнения, Т. 1. Москва 1953 (перевод с итальянского).

[5] GREGUŠ, M.: Über die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung. Wiss. Z. Univ. Halle, Math.-Nat., XII/3, 1963, 265—268.

[6] GREGUŠ, M.: O oscilatoričnosti riešení diferenciálnej rovnice tretieho rádu, In: Sborník družby pěti bratrských universit Kyjev, Krakov, Debrecín, Bratislava, Brno 1966, 146—150.

[7] RÁB, M.: Oscilační vlastnosti integrálů diferenciální rovnice 3. řádu, Práce Brněnské základny Českoslov. akad. věd XXVII, 1955, 349—360.

[8] ZLÁMAL, M.: Asymptotic properties of the solutions of the third order linear differential equations. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, 1951/6, č. *329*, 159—167.

[9] DOLAN, J. M.: On the relationship between the oscillatory behavior of a linear third-order differential equation and its adjoint. J. diff. Eqs., *7*, 1970, 367—388.

[10] ХАРТМАН, Ф.: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва 1970 (перевод с английского).

[11] RÁB, M.: Kriterien für die Oszillation der Lösungen der Differentialgleichung $[p(x)y']' + q(x)y = 0$. Časop. pěstov. mat., *84*, 1959, 335—370.

Eingegangen am 19. 6. 1973

Katedra matematickej analýzy
Prírodovedeckej fakulty
Univerzity Komenského
Mlynská dolina
816 31 Bratislava