

Matematicko-fyzikálny časopis

Vladimír Hajko

Dvě poznámky k demagnetizačním faktorům tyčových vzoriek

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 7 (1957), No. 1, 46--53

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/127024>

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1957

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

DVE POZNÁMKY K DEMAGNETIZAČNÝM FAKTOROM TYČOVÝCH VZORIEK

VLADIMÍR HAJKO

Katedra fyziky Vysokej školy technickej v Košiciach

VENOVANÉ K 50. NARODENINÁM AKADEMIKA
DIONÝZA ILKOVIČA

1. Ako je známe, demagnetizačný faktor elipsoidálnej feromagnetickej vzorky možno presne vypočítať z rozmerov elipsoidu a v prípade, že ide o rotačný elipsoid s veľkou polosou a a malou polosou b , uložený do homogénneho vonkajšieho magnetického poľa tak, že smer veľkej osi elipsoidu spadá do smeru vonkajšieho poľa, je hodnota jeho demagnetizačného faktora daná vzťahom

$$N = \frac{4\pi}{p^2 - 1} \left\{ \frac{p}{(p^2 - 1)} \ln(p + \sqrt{p^2 - 1}) - 1 \right\},$$

kde $p = a/b$. Vidieť, že hodnota demagnetizačného faktora je úplne určená veličinou p , a preto sa hodnoty demagnetizačných faktorov elipsoidov tabulujú pre rôzne hodnoty p .

Pri tyčových vzorkách valcového tvaru je tiež zvykom pri hodnotení závislosti stredového (balistického) demagnetizačného faktora na geometrických rozmeroch tyče pracovať s veličinou p , ktorá je však teraz definovaná vzťahom $p = l/d$, kde l je dĺžka tyče a d jej priemer, aj keď, ako je známe, nezávisia stredové demagnetizačné faktory tyčových vzoriek len od geometrických rozmerov tyče, ale aj od magnetického stavu tyče a od magnetických vlastností materiálu tyče.

Pri tyčových vzorkách so štvorcovým alebo obdĺžnikovým prierezom zavádzajú niektorí autori veličinu p ako podiel dĺžky tyče a druhej odrovniny z veľkosti prierezu. Na inú možnosť definície veličiny p poukazuje Schneider [1], ktorý túto veličinu definuje ako podiel dĺžky tyče a priemeru takého kruhu, ktorého obsah je rovný obsahu štvorcového alebo obdĺžnikového prierezu tyče. Ak označíme dĺžku tyče l a jej druhé dva rozmery a , b , je

$$p = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{l}{\sqrt{ab}}. \quad (1)$$

Schneider experimentálne zistil, že pri takejto definícii p sú priemerné (magnetometrické) demagnetizačné faktory valcovej tyče a tyče so štvorcovým prierezom pri tomže p rovnaké. Veličiny p podľa definície (1) použil aj Warmuth [2], ktorý experimentálne zistil, že pri tomže p a tej istej susceptibilite κ majú v obore rastúceho κ valcové vzorky a vzorky so štvorcovým prierezom ten istý stredový demagnetizačný faktor.

V špeciálnom prípade, keď tyčové vzorky sú zmagnetované do nasýtenia pozdĺž celej svojej dĺžky, možno matematicky ukázať, že pri definícii veličiny p podľa (1) sú stredové demagnetizačné faktory valcových tyčí a tyčí so štvorcovým alebo obdĺžnikovým prierezom pri tomže p rovnaké. To je účelom prvej poznámky.

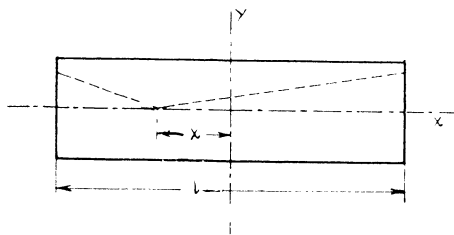
Z magnetostatiky pre demagnetizačné pole platí vzťah

$$\mathbf{H}_p = \text{grad} \left(\int \int \int \frac{\text{div } \mathbf{J}}{r} dV - \int \int \frac{\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}{r} \right), \quad (2)$$

kde sa integrácia týka celého objemu, resp. celého povrchu feromagnetika. V limitnom prípade, keď tyčová vzorka je zmagnetovaná do nasýtenia pozdĺž celej svojej dĺžky a vo smere dĺžky, je \mathbf{J} pozdĺž celej vzorky rovnaké, takže $\text{div } \mathbf{J} = 0$ a vzťah (2) prejde v tomto prípade na tvar

$$\mathbf{H}_p = - \text{grad} \int \int \frac{\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}{r},$$

kde sa integrácia týka už len obidvoch základní tyče, keďže všade inde na povrchu je $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Hodnotu demagnetizačného poľa možno potom v určitom mieste na osi tyče (obr. 1) vypočítať podľa vzťahu



Obr. 1.

$$H_x = \left(\frac{l}{2} + x \right) J \int \int \frac{dy dz}{\left[\left(\frac{l}{2} + x \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \\ + \left(\frac{l}{2} - x \right) J \int \int \frac{dy dz}{\left[\left(\frac{l}{2} - x \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}},$$

ak sme os x orientovali v smere dĺžky tyče. Vzhľadom na to, že je $H_x = N_r J$, platí pre demagnetizačný faktor v tomže mieste na osi tyče vzťah

$$N_r = \left(\frac{l}{2} + x \right) \int \int \frac{dy dz}{\left[\left(\frac{l}{2} + x \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \\ + \left(\frac{l}{2} - x \right) \int \int \frac{dy dz}{\left[\left(\frac{l}{2} - x \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (3)$$

Uvedeným postupom spočítaval Arkadiev [3] demagnetizačné faktory pre úplne nasýtený stav valcových tyčí a pre stredový demagnetizačný faktor (pri $p \gg 1$) dostal hodnotu

$$N = \frac{2\pi}{\mu^2}. \quad (4)$$

Pre tyč s obdĺžnikovým prierezom o rozmeroch a , b zrejme platí

$$N_x = \left(\frac{l}{2} + x\right) \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dy dz}{\left[\left(\frac{l}{2} + x\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{l}{2} - x\right) \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dy dz}{\left[\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (5)$$

Riešením integrálov vo vzťahu (5) dostávame pre N_x vzťah

$$N_x = 2 \left[\operatorname{arctg} \frac{ab}{2\left(\frac{l}{2} + x\right)\sqrt{a^2 + b^2 + 4\left(\frac{l}{2} + x\right)^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-ab}{2\left(\frac{l}{2} + x\right)\sqrt{a^2 + b^2 + 4\left(\frac{l}{2} + x\right)^2}} \right] + 2 \left[\operatorname{arctg} \frac{ab}{2\left(\frac{l}{2} - x\right)\sqrt{a^2 + b^2 + 4\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-ab}{2\left(\frac{l}{2} - x\right)\sqrt{a^2 + b^2 + 4\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}} \right].$$

Pre stred tyče je $x = 0$, takže pri rešpektovaní okolnosti, že je spravidla $l \gg a$, a $l \gg b$, dostávame pre stredový demagnetizačný faktor hodnotu

$$N = 4 \left[\operatorname{arctg} \frac{ab}{l\sqrt{a^2 + b^2 + l^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-ab}{l\sqrt{a^2 + b^2 + l^2}} \right] \doteq 4 \left[\operatorname{arctg} \frac{ab}{l^2} - \operatorname{arctg} \frac{-ab}{l^2} \right] \doteq \frac{8ab}{l^2}. \quad (6)$$

keď sme príslušné výrazy v poslednej zátvorke rozvinuli v rad a zanedbali veličiny malé vyššieho rádu.

Porovnaním vzťahu (4) a (6) dostávame podmienku, pri ktorej stredový demagnetizačný faktor valcovej tyče a tyče s obdĺžnikovým prierezom je v magnetickom stave úplného nasýtenia rovnaký. Je to zrejme splnené vtedy, keď platí

$$\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{l}{\sqrt{ab}}. \quad (1)$$

Ak teda definujeme pri tyčiach s obdĺžnikovým prierezom veličinu μ podľa vzťahu (1), tak z predehádzajúceho plynie, že pri rovnakom μ majú valcové tyče aj tyče s obdĺžnikovým prierezom v magnetickom stave úplného nasýtenia rovnaké stredové demagnetizačné faktory.

2. Druhá poznámka sa týka zjvu hysterézie stredového demagnetizačného faktora. Autor spolu s J. Danielom-Szabóom upozornil v práci [4] a [5] na to, že podstatu tohto zjvu treba vidieť v typickom priebehu procesu premagnetúvania tyčových vzoriek v homogénnom postupne klesajúcom a do záporných hodnôt prechádzajúcom vonkajšom magnetickom poli. Oprávnenosť tohto tvrdenia možno podprieť aj výsledkami nasledujúcich úvah.

Rozloženie magnetizácie¹ pozdĺž tyče, prislúchajúce jednotlivým magnetickým stavom pri premagnetúvaní možno s dosť dobrou presnosťou vyjadriť vzťahom

$$J = J_0(1 - k_1x^2 - k_2x^4), \quad (7)$$

kde J_0 je hodnota magnetizácie v strede tyče, x je vzdialenosť od stredu tyče miesta, v ktorom má magnetizácia hodnotu J , k_1 a k_2 sú konštanty, ktoré však môžu mať v rôznych magnetických stavoch tyče rôzne hodnoty. Do akej miery vzťah (7) správne vyjadruje rozloženie magnetizácie pozdĺž tyče v jednotlivých stavoch vidieť z tab. 1, v ktorej sú porovnané výsledky vypočítané podľa vzťahu (7) pri vhodných hodnotách konštánt k_1 a k_2 s výsledkami meraní, uvedenými v práci [5].

Použitím vzťahu (7) a zavedením zjednodušujúceho predpokladu, že smer magnetizácie spadá do smeru dĺžky tyče v každom mieste tyče, možno hodnoty stredových demagnetizačných faktorov v jednotlivých magnetických stavoch tyče počas premagnetúvania matematicky vypočítať. Vychádzajúc zo vzťahu (2) a rešpektujúc platnosť rovnice $H_p = NJ$, možno pre valcovú tyč vzhľadom

¹ Máme tu na mysl zložku magnetizácie spadajúcu do smeru dĺžky tyče. Túto totiž pri balistických meraniach na tyčových vzorkách určujeme.

Tabuľka 1

J_0 v G	k_1 v cm^{-2} k_2 v cm^{-4}		J/J_0					
			0,0 l	0,2 l	0,4 l	0,6 l	0,8 l	0,95 l
1146	$k_1 = 0,562 \cdot 10^{-2}$	meranie	1,00	0,97	0,90	0,75	0,52	0,24
	$k_2 = 0,293 \cdot 10^{-4}$	výpočet	1,00	0,98	0,90	0,76	0,52	0,25
400	$k_1 = 0,682 \cdot 10^{-2}$	meranie	1,00	0,97	0,88	0,72	0,49	0,21
	$k_2 = 0,226 \cdot 10^{-4}$	výpočet	1,00	0,97	0,89	0,73	0,47	0,20
152	$k_1 = 0,682 \cdot 10^{-2}$	meranie	1,00	0,98	0,88	0,71	0,45	0,20
	$k_2 = 0,226 \cdot 10^{-4}$	výpočet	1,00	0,97	0,89	0,73	0,47	0,20
9,7	$k_1 = 1,016 \cdot 10^{-2}$	meranie	1,00	0,96	0,84	0,64	0,41	0,17
	$k_2 = -0,102 \cdot 10^{-4}$	výpočet	1,00	0,96	0,84	0,65	0,39	0,17
3,9	$k_1 = 1,588 \cdot 10^{-2}$	meranie	1,00	0,88	0,73	0,55	0,31	0,08
	$k_2 = -0,553 \cdot 10^{-4}$	výpočet	1,00	0,94	0,76	0,50	0,21	0,14
0,8	$k_1 = 2,300 \cdot 10^{-2}$	meranie	1,00	0,94	0,71	0,40	0,03	-0,36
	$k_2 = -0,980 \cdot 10^{-4}$	výpočet	1,00	0,91	0,66	0,30	-0,07	-0,28
- 0,6	$k_1 = -2,120 \cdot 10^{-2}$	meranie	1,00	1,17	1,27	1,47	1,35	0,62
	$k_2 = +2,814 \cdot 10^{-4}$	výpočet	1,00	1,08	1,27	1,40	1,21	0,63
- 9,2	$k_1 = 0,682 \cdot 10^{-2}$	meranie	1,00	0,96	0,88	0,73	0,49	0,18
	$k_2 = 0,226 \cdot 10^{-4}$	výpočet	1,00	0,97	0,89	0,73	0,47	0,20
- 33,5	$k_1 = 0,682 \cdot 10^{-2}$	meranie	1,00	0,96	0,87	0,71	0,48	0,19
	$k_2 = 0,226 \cdot 10^{-4}$	výpočet	1,00	0,97	0,89	0,73	0,47	0,20
- 96,4	$k_1 = 0,682 \cdot 10^{-2}$	meranie	1,00	0,99	0,90	0,73	0,50	0,22
	$k_2 = 0,226 \cdot 10^{-4}$	výpočet	1,00	0,97	0,89	0,73	0,47	0,20
- 346	$k_1 = 0,682 \cdot 10^{-2}$	meranie	1,00	0,97	0,87	0,71	0,48	0,21
	$k_2 = 0,226 \cdot 10^{-4}$	výpočet	1,00	0,97	0,89	0,73	0,47	0,20
- 996	$k_1 = 0,682 \cdot 10^{-2}$	meranie	1,00	0,97	0,89	0,72	0,49	0,22
	$k_2 = 0,226 \cdot 10^{-4}$	výpočet	1,00	0,97	0,89	0,73	0,47	0,20

Dĺžka tyče = $2l = l_0$.

na označenie v obr. 2, ako aj na zjednodušujúci predpoklad, že magnetizácia má v každom mieste tyče smer spadajúci do smeru dĺžky tyče. píšef

$$\begin{aligned}
 N = & 2\pi \int (-2k_1x - 4k_2x^3) \frac{\partial}{\partial a} \left[\int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{(x+a)^2 + r^2}} \right] dx \\
 = & 2\pi \frac{J_c \partial}{J_0 \partial a} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{\left(\frac{l_0}{2} + a\right)^2 + r^2}} + 2\pi \frac{J_c \partial}{J_0 \partial a} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{\left(\frac{l_0}{2} - a\right)^2 + r^2}} \quad (8)
 \end{aligned}$$

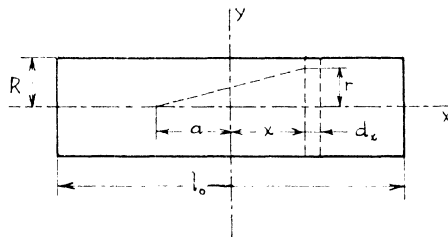
kde N vo vzťahu (8) značí hodnotu demagnetizačného faktora v mieste, ktoré sa nachodí vo vzdialenosti a od stredu tyče. Ak vo vzťahu (8) jednotlivé integrály, ktoré treba vykonať pozdĺž celej tyče, resp. cez povrch základnej

tyče, vypočítame a položíme $a = 0$, pre hodnotu stredového demagnetizačného faktora, dostaneme

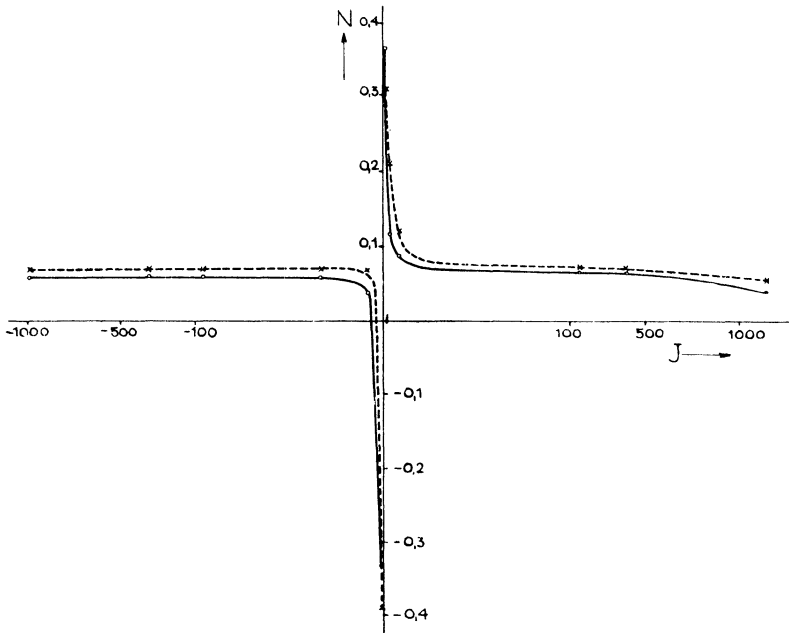
$$N = 4\pi k_1 R^2 \ln \frac{l_0}{R} - \frac{3}{2} \pi k_2 R^2 l_0^2 - 6\pi k_2 R^4 \ln \frac{l_0}{R} + \frac{2\pi J_0}{\rho^2 J_0}, \quad (9)$$

keď sme pri úprave príslušných výrazov zanedbávali hodnotu výrazu R^2/l^2 , resp. veličiny malé vyššieho rádu voči jednotke.

Ak do vzťahu (9) dosadíme $l_0 = 20$ cm, $R = 0,5$ cm ako rozmery valcovej tyče, na ktorej sa robili merania, uvedené v tab. 1, môžeme pre jednotlivé magnetickej stavy tyče použitím príslušných hodnôt konštánt k_1 , k_2 vypočítať



Obr. 2.



Obr. 3.

týmto stavom prislúchajúce hodnoty stredových demagnetizačných faktorov. Na obr. 3² je čiarkovane vyznačená takýmto výpočtom získaná závislosť $N = N(J)$ pozdĺž klesajúcej vetvy hysteréznej slučky a porovnaná s experimentálne získanými vyjadreniami tejto závislosti (plynulé krivky). Vidieť, že i napriek zjednodušujúcim predpokladom výpočtom získaná závislosť $N = N(J)$ kvalitatívne dobre vystihuje typický charakter zjavy hysterézie stredového demagnetizačného faktora.

LITERATÚRA

1. Schneider W., Zeitschrift für Physik 42, 1927, 883–898. 2. Warmuth K., Archiv für Elektrotechnik 30, 1936, 761–779. 3. Arkadiev V. K., Sbornik „Problemy ferromagnetizma i magnetodinamiki“, izd. AN SSSR, Moskva 1946, 129–132. 4. Hajko, Daniel-Szabó J., Čs. Čas. Fys. 6, 1956, 352–354. 5. Hajko V., Daniel-Szabó J., Mat.-fyz. Čas. SAV.

Došlo 8. 10. 1956.

ДВА ЗАМЕЧАНИЯ К РАЗМАГНИЧИВАЮЩИМ ФАКТОРАМ СТЕРЖНЕВИТЫХ ОБРАЗЦОВ

ВЛАДИМИР ГАЙКО

Выводы

В первом замечании приводится подсчет среднего размагничивающего фактора стержня прямоугольного сечения в состоянии полного насыщения стержня и указывается на обстоятельство, что при определении величины p согласно (1) стержни цилиндрические и стержни прямоугольного сечения имеют при том же p то самое значение среднего размагничивающего фактора.

Второе замечание относится к явлению гистерезиса среднего размагничивающего фактора. Указывается на возможность математического выражения расположения намагничивания вдоль стержня в отдельных состояниях, соответствующих отдельным точкам нисходящей ветви петли гистерезиса, отношением (7), где k_1 , k_2 константы, которые могут быть в разных магнитических состояниях разными. Использование отношения (7) и при упрощенном предположении, что направление намагничивания в каждом месте стержня ориентировано в направлении длины стержня, можно согласно (2) и (8) вычислить значения среднего размагничивающего фактора соответствующие отдельным магнитным состояниям стержня и таким образом получить математически выражение зависимости $N = N(J)$. Эта зависимость графически представлена пунктиром на рис. 3 и сравнена с той же самой зависимостью полученной экспериментально. Видно, что вычисленная полученная зависимость $N = N(J)$ качественно хорошо выражает особый характер гистерезиса размагничивающего фактора.

² Kvôli prehľadnosti sme na obr. 3 volili pre magnetizácie do 100 G inú m erku ako pre magnetizácie väčšie.

ZWEI BEMERKUNGEN ZU DEN ENTMAGNETISIERUNGS- FAKTOREN DER FERROMAGNETISCHEN STÄBE

VLADIMIR HAJKO

Zusammenfassung

In der ersten Bemerkung wird die Ausrechnung des ballistischen Entmagnetisierungsfaktors des Stabes vom rechteckigen Querschnitt im Zustand absoluter Sättigung des Stabes durchgeführt und es wird an die Umstände hingewiesen, daß die zylindrischen und rechteckigen Stäbe bei der Definition der Größe p nach (1) bei demgleichen p denselben Wert des ballistischen Entmagnetisierungsfaktors haben.

Die zweite Bemerkung beschäftigt sich mit der Erscheinung der Hysterese des ballistischen Entmagnetisierungsfaktors. Es wird hingewiesen an die Möglichkeit mathematisch die Zerlegung der Magnetisierung längs des Stabes in den Zuständen, welche den einzelnen Punkten des absteigenden Astes der Hysteresisschleife entsprechen, mit Hilfe der Beziehung (7) auszudrücken, wo k_1 und k_2 Konstanten sind, die in den verschiedenen magnetischen Zuständen verschiedene Werte haben können. Bei Verwendung der Beziehung (7) und bei vereinfachender Voraussetzung, daß die Magnetisierung in jeder Stelle des Stabes dieselbe Richtung hat wie die Länge des Stabes, kann man gemäß der Beziehung (2) und (8) die Werte des ballistischen Entmagnetisierungsfaktors, welche den einzelnen magnetischen Zuständen des Stabes entsprechen, ausrechnen und in dieser Weise den Ausdruck der Beziehung $N = N(J)$ mathematisch bekommen. Dieser Ausdruck ist graphisch im Bilde 3 strichweise dargestellt und mit der durch Experiment gewonnenen Beziehung $N = N(J)$ verglichen. Man sieht, daß die durch die Ausrechnung gewonnene Beziehung $N = N(J)$ qualitativ den typischen Charakter der Hysterese des Entmagnetisierungsfaktors gut ausdrückt.