Pavol Marušiak

Дифференциальное чравнение с западывающим аргументом асимптотически эквивалентное с уравнением $y^{(n)} = 0$

Matematický časopis, Vol. 23 (1973), No. 1, 45--54

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126990

Matematický časopis 23 (1973), No. 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ, АСИМПТОТИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНОЕ С УРАВНЕНИЕМ $y^{(n)} = 0$

ПАВОЛ МАРУШИАК, Жилина

Рассматривается дифференциальное уравнение n-того порядка ($n \geq 2$) с запаздывающим аргументом (в дальнейшем: д. уравнение) в виде

$$y^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} P_k(t) y^{(n-k)}(t) + \sum_{k=1}^{n} Q_k(t) y_h^{(n-k)}(t) = f(t), \tag{1}$$

где $y_h^{(n-k)}(t) = y^{(n-k)}[h(t)]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Функции $P_k(t)$, $Q_k(t)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), $h(t)(\leq t)$, $f(t)$ непрерывны на интервале $I = [a, \infty)$. Кроме того, $\lim_{t\to\infty} h(t) = +\infty$.

В этой работе мы будем заниматься асимптотическим свойством решений д. уравнения (1) и их производных. Импульсом для написания настоящей работы послужила работа Т. Г. Галлама [1].

С функцией $h(t)$ свяжем функцию $\gamma^*(t)$ следующим образом: $\gamma^*(t) = \sup \{x;\ a \leq x, h(x) < t\}$. С. Б. Норкин [2, стр. 35] показал следующее: Если $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$, то

$$\gamma^*(t) < \infty, \quad t \in I \tag{2}$$

Ю. А. Ведь в работе [3, стр. 147] привёл лемму:

Пусть для скалярных функций $u(t)$, $w_1(t)$ и $v_i(t)$, ($i = 0, 1, \ldots, m$), неотрицательных и непрерывных на полуинтервале I, выполняются соотношения

$$u(t) \leq w_1(t)\{C + \int_a^t \sum_{i=0}^{m} v_i(s) u[h_i(s)]\, ds\}, \quad t \in I$$

$$u(t) = p_1(t), \quad t \in E_a = \{s;\ s = h(t) < a,\ t \in I\} \cup \{a\},$$

где C — неотрицательная постоянная; $p_1(t)$ — неотрицательная и непрерывная функция на E_a.

Тогда при $t \in I$ спаведливо неравенствор

$$u(t) \leq w_1(t)\{C \exp [\int_a^t V(s) ds] + \int_a^t W(s) \exp [\int_a^t V(\tau) d\tau]\, ds\},$$

где

$$V(t) = \sum_{i=0}^{m} v_i(t)w[h_i(t)], \quad W(t) = \sum_{i=0}^{m} v_i(t)p[h_i(t)],$$

$$w(t) = \begin{Bmatrix} w_2(t), & t \in E_a \\ w_1(t), & t \in I \end{Bmatrix}, \quad p(t) = \begin{Bmatrix} p_1(t), & t \in E_a \\ p_2(t), & t \in I \end{Bmatrix},$$

$w_2(t)$, $p_2(t)$ — произвольным образом выбранные функции, неотрицательные и непрерывные на E_a и I соответственно, причем $w_2(a) = w_1(a)$ и $p_2(a) = p_1(a)$.

В предлагаемой работе нам достаточно сформулировать лемму в более простом виде. Мы приведём её как

Следствие: *Пусть для функций* $u(t)$, $a(t)$, $b(t)$, *неотрицательных и непрерывных на* $I = [a, b)$, *выполняются соотношения*

$$(3_1) \qquad u(t) \leq C_1 + C_2 \int_a^t \{a(s)u(s) + b(s)u[h(s)]\}ds,$$

$$(3_2) \qquad u(t) = \Phi(t), \quad t \in E_a,$$

где C_1, C_2 — *неотрицательные постоянные;* $\Phi(t)$ — *неотрицательная и непрерывная функция на* E_a.

Тогда при $t \in I$ *справедливо неравенство*

$$u(t) \leq A \exp C_2 \int_a^t [a(s) + b(s)]ds,$$

где

$$A = C_1 + C_2 \int_a^{\gamma^*(a)} b(s)u[h(s)]ds.$$

Доказательство. Если мы положим

$$U(t) = C_1 + C_2 \int_a^t \{a(s)u(s) + b(s)u[h(s)]\}ds, \quad t \in I,$$

то (3_1) мы можем писать в виде

$$(3_1') \qquad u(t) \leq U(t)$$

Легко видеть, что $U(a) = C_1 \geq 0$, $U(t) \geq 0$, $\acute{U}(t) \geq 0$ для $t \in I$ и дальше

$$\acute{U}(t) = C_2\{a(t)u(t) + b(t)u[h(t)]\} \leq$$

$$\leq C_2\left[a(t)U(t) + b(t)\begin{Bmatrix} \Phi[h(t)], & h(t) < a \\ U(t), & t \geq a \end{Bmatrix}\right]$$

Проинтегрировав обе части в последнем неравенстве от a до t, мы получим

$$U(t) \leq C_1 + C_2 \int_a^{\gamma^*(a)} b(t)u[h(t)]dt + C_2 \int_a^t [a(s) + b(s)]U(s)ds$$

Если мы обозначим $C_1 + C_2 \int_a^{\gamma^*(a)} b(t)u[h(t)]dt$ через A и используем неравенство Гронуолла, из последнего неравенства получим

$$U(t) \leq A \exp C_2 \int_a^t [a(s) + b(s)]ds$$

Отсюда и из $(3_1')$ получаем утверждение следствия.

Пусть $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда имеет место

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n b_i) \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть*

$$\int^\infty |f(t)|dt < \infty, \quad \int^\infty t^{k-1}|P_k(t)|dt < \infty, \quad \int^\infty |h(t)|^{k-1}|Q_k(t)|dt < \infty \tag{5}$$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$. *Тогда для всякого решения* $y(t)$ *д. уравнения* (1) *существует число* a_1 *такое, что имеет место*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y^{(n-k)}(t)}{t^{k-1}} = \frac{a_1}{(k-1)!} \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Доказательство. Пусть k — произвольное натуральное число, $1 \leq k \leq n$. В силу (2) $\gamma^*(1) < +\infty$. Проинтегрировав обе части д. уравнения (1) k раз от $t_0 = \max\{a, \gamma^*(1)\}$ до t, мы получим

$$y^{n-k}(t) = (c_0 + c_1 t + \ldots + c_{k-1}t^{k-1}) + \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} f(s)ds - \tag{6}$$
$$-\sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \left\{P_i(s)y^{(n-i)}(s) + Q_i(s)y_h^{(n-i)}(s)\right\}ds$$

Если умножим уравнение (6) на t^{1-k} и положим

$$A_k = (|c_0| + |c_1|t_0 + \ldots + |c_{k-1}|t_0^{k-1})t_0^{1-k} + \int_{t_0}^t \frac{|f(s)|}{(k-1)!}ds,$$

то из (6) получим

$$\left|\frac{y^{(n-k)}(t)}{t^{k-1}}\right| \leq A_k + \frac{1}{(k-1)!}\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n} s^{i-1}|P_i(s)|\left|\frac{y^{(n-i)}(s)}{s^{i-1}}\right|ds +$$

$$+\frac{1}{(k-1)!}\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}|h(s)|^{i-1}|Q_i(s)|\left|\frac{y_h^{(n-i)}(s)}{[h(s)]^{i-1}}\right|ds$$

Если просуммируем последнее неравенство от $k = 1$ до $k = n$ и потом используем (4), то получим

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{y^{(n-k)}(t)}{t^{k-1}}\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}\left\{\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{i=1}^{n}s^{i-1}|P_i(s)|\right)\left(\sum_{i-1}^{n}\left|\frac{y^{(n-i)}(s)}{s^{i-1}}\right|\right)ds +\right.$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{i=1}^{n}|h(s)^{i-1}|Q(s)|\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_h^{(n-i)}(s)}{[h(s)]^{i-1}}\right|\right)ds + \sum_{k=1}^{n}A_k$$

На основании следствия из последнего неравенства вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{y^{(n-k)}(t)}{t^{k-1}}\right| \leq A\exp\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}\right)\times\right. \tag{7}$$

$$\left.\times\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\{s^{i-1}|P_i(s)| + |h(s)|^{i-1}|Q_i(s)|\}ds\right],$$

где

$$A = \sum_{k=1}^{n}\left[A_k + \frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{\gamma^*(t_0)}|Q_i(s)||y_h^{(n-i)}(s)|ds.\right.$$

Из (7) в силу (5) получим

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{y^{(n-k)}(t)}{t^{k-1}}\right| \leq D < +\infty, \quad t \geq t_0, \tag{8}$$

D — некоторая постоянная.

Из (6) для $k = 1$ получим

$$y^{(n-1)}(t) = c_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \{P_i(s)y^{(n-i)}(s) + Q_i(s)y_h^{(n-i)}(s)\}ds.$$

Отсюда в силу условий (8), (5) следует, что существует $\lim y^{(n-1)}(t)$ при $t \to \infty$ и он конечен. Пусть $\lim\limits_{t\to\infty} y^{(n-1)}(t) = a_1$.

По правилу Лопиталя существует $\lim \dfrac{y^{(n-k)}(t)}{t^{k-1}}$ при $t \to \infty$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Методом математической индукции легко докажется, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y^{(n-k)}(t)}{t^{k-1}} = \frac{a_1}{(k-1)!}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть существуют числа* $m \geq -1$ *и* $f_m \neq 0$ *такие, что*

(9) $$\lim_{t\to\infty} t^{-m} f(t) = f_m$$

и пусть для каких-то $p_i > i$, $q_i > i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *существуют постоянные* b_i, c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *такие, что*

(10) $$\lim_{t\to\infty} t^{p_i} P_i(t) = b_i, \quad \lim_{t\to\infty} t^{q_i} Q_i(t) = c_i$$

1) *Если* $m > -1$, *то для всякого решения* $y(t)$ *д. уравнения* (1) *имеет место:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y^{(n-k)}(t)}{t^{k+m}} = \frac{m!}{(m+k)!} f_m, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

2) *В случае* $m = -1$ *для всякого решения* $y(t)$ *д. уравнения* (1) *имеет место:*

$$\lim_{t\to\infty} t y^{(n)}(t) = f_{-1},$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y^{(n-k)}(t)}{t^{(k-1)} \ln t} = \frac{f_{-1}}{(k-1)!}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство: 1) Пусть $m > -1$, k — произвольное натуральное число, $1 \leq k \leq n$ и $t_0 = \max\{a, \gamma^*(1)\}$

Из (6) после умножения на t^{-k-m} получим

(11) $$\frac{y^{(n-k)}(t)}{t^{k+m}} = t^{-k-m}[c_0 + c_1 t + \ldots + c_{k-1} t^{k-1}] +$$

$$+ t^{-k-m}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}f(s)ds - \frac{t^{-k-m}}{(k-1)!}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{k-1}\{P_i(s)y^{n-i}(s) +$$

$$+ Q_i(s)y_h^{(n-i)}(s)\}ds$$

Так как $m > -1$, то справедливо следующее:

(12) $$\lim_{t\to\infty}[c_0 + c_1t + \ldots + c_{k-1}t^{k-1}]t^{-k-m} = 0$$

Если мы применим правило Лопиталя k раз к второму члену правой части (11) и используем (9), получим

(13) $$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{k+m}}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}f(s)ds = \frac{m!}{(k+m)!}f^m \neq 0$$

Из (12), (13) следует существование постоянной A_k и к ней числа $\bar{t}_k > t_0$ такого, что для $t \geq \bar{t}_k$ имеет место

$$t^{-k-m}\{|c_0 + c_1t + \ldots + c_{k-1}t^{k-1}| + \int_{t_k}^{t}\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\,|f(s)|ds\} \leq A_k$$

В силу (10) для любого $\alpha > 0$ можно указать такое $t_k > t_0$, что для всех $t > t_k$ будет иметь место $t^{p_i}|P_i(t)| \leq |b_i| + \alpha$, $t^{q_i}|Q_i(t) \leq |c_i| + \alpha$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если мы положим $d = \max_k\{|b_k| + \alpha, |c_k| + \alpha\}$ $T = \max_k\{t_k, \bar{t}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то из (11) для $t \geq T$ получим

(14) $$\left|\frac{y^{(n-k)}(t)}{t^{k+m}}\right| \leq A_k + \frac{d}{(k-1)!}\left\{\int_T^t\sum_{i=1}^{n}s^{i-p_i-1}\left|\frac{y^{(n-i)}(s)}{s^{i+m}}\right|ds + \right.$$

$$\left. + \int_T^t\sum_{i=1}^{n}s^{i-q_i-1}\left|\frac{y_h^{(n-i)}(s)}{[h(s)]^{i+m}}\right|ds\right\}.$$

При написании последнего члена в (14) мы применили: $1 \leq h(t) \leq t$,

$m > -1$ [так что $[h(t)]^{i+m} \leq t^{i+m}$, $i = 1, 2, \ldots, n$].

Если мы просуммируем неравенство (14) от $k = 1$ до $k = n$ и потом используем (4), получим

$$\sum_{k-1}^{n}\left|\frac{y^{(n-k)}(t)}{t^{k+m}}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} A_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{d}{(k-1)!}\left\{\int_T^t\left(\sum_{k=1}^{n} s^{i-p_i-1}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{i-1}^{n}\left|\frac{y^{(n-i)}(s)}{s^{i+m}}\right|\right)ds + \int_T^t\left(\sum_{i=1}^{n} s^{i-g_i-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_h^{(n-i)}(s)}{[h(s)]^{i+m}}\right|\right)ds\right\}.$$

Если мы используем следствие в последнем неравенстве, то в силу $p_i > i$, $g_i > i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ существует такая постоянная D, что имеет место

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{y^{(n-k)}(t)}{t^{k+m}}\right| \leq D < \infty, \quad t \geq T. \tag{15}$$

После умножения д. уравнения (1) на t^{-m} мы получим

$$t^{-m}y^n(t) = t^{-m}f(t) - \sum_{k=1}^{n} t^{-m}P_k(t)y^{n-k}(t) - \sum_{k=1}^{n} t^{-m}Q_k(t)y_h^{(n-k)}(t)$$

В силу (9), (10), (15) существует $\lim t^{-m}y^{(n)}(t)$ при $t \to \infty$ и имеет место $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{y^{(n)}(t)}{t^m} = f^m$.

По правилу Лопиталя существует $\lim \dfrac{y^{(n-k)}(t)}{t^{k+m}}$ при $t \to \infty$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и методом математической индукции докажется, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y^{(n-k)}(t)}{t^{k+m}} = \frac{m!}{(k+m)!}f_m.$$

2) Пусть $m = -1$, k — произвольное натуральное число, $1 \leq k \leq n$. Из (6) после умножения на $[t^{k-1}\ln t]^{-1}$ получим

$$\frac{y^{(n-k)}(t)}{t^{k-1}\ln t} = [t^{k-1}\ln t]^{-1}\{[c_0 + c_1 t + \ldots + c_{k-1}t^{k-1}] + \int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\times \tag{16}$$

$$\times f(s)ds\} - [t^{k-1}\ln t]^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\{P_i(s)y^{(n-i)}(s) + Q_i(s)y_h^{(n-i)}(s)\}ds.$$

Для первых двух выражений правой части (16) имеет место

$$(17_1) \qquad \lim_{t\to\infty} [c_0 + c_1 t + \ldots + c_{k-1}t^{k-1}][t^{k-1}\ln t]^{-1} = 0$$

$$(17_2) \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{k-1}\ln t} \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} f(s)ds = \frac{f_{-1}}{(k-1)!}.$$

Равенство (17_2) можно доказать методом математической индукции.

Повторая рассуждения, проведенные при доказательстве 1), мы получим

$$(18) \qquad \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{y^{(n-k)}(t)}{t^{k-1}\ln t} \right| \leq \mathrm{D} < \infty, \quad t \geq T.$$

Если умножим д. уравнение (1) на t и учтем соотношения (9), (10), (18), легко увидим, что существует $\lim t\, y^{(n)}(t)$ при $t \to \infty$ и имеет место $\lim\limits_{t\to\infty} t\, y^{(n)}(t) = f_{-1}$. Согласно правила Лопиталя существовует $\lim \dfrac{y^{(n-k)}(t)}{t^{k-1}\ln t}$ при $t \to \infty$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Потом методом математической индукции докажется, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y^{(n-k)}(t)}{t^{k-1}\ln t} = \frac{f_{-1}}{(k-1)!}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть существуют числа* $m \geq 0$, $b > 0$, $f_m \neq 0$ *такие, что*

$$(19) \qquad \lim_{t\to\infty} t^{-m} e^{-bt} f(t) = f_m$$

и имеет место (10), *где* $q_i > n$, $p_i > n$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда для всякого решения $y(t)$ *д. уравнения* (1) *имеет место*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y^{(n-k)}(t)}{t^m e^{bt}} = \frac{f_m}{b^k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Пусть k натуральное число, $1 \leq k \leq n$. Из (6) после умножения на $t^{-m}e^{-bt}$ получим

$$(20) \qquad \frac{y^{(n-k)}(t)}{t^m e^{bt}} = \frac{1}{t^m e^{bt}} \left\{[c_0 + c_1 t + \ldots + c_{k-1}t^{k-1}] + \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} f(s)ds\right\} -$$

$$- t^{-m}e^{-bt} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \left\{P_i(s)y^{(n-i)}(s) + Q_i(s)y_h^{(n-i)}(s)\right\}ds$$

Первые два члена в правой части (20) ограничены. Поэтому существует постоянная A_k и к ней число $t_k > t_0$ такое, что для всех $t \geq t_k$ справедливо неравенство

$$(21) \qquad \frac{1}{t^m e^{bt}} \{|c_0 + c_1 t + \ldots + c_{k-1} t^{k-1}| + \int_{t_k}^{t} \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} |f(s)| ds \leq A_k$$

В силу (10) для любого $\alpha > 0$ можноуказать такое $\overline{t_k} > t_0$, что для всех $t \geq \bar{t}_k$ справедливо неравенство

$$(22) \qquad t^{p_i}|P_i(t)| \leq |b_i| + \alpha, \quad t^{q_i}|Q_i(t)| \leq |c_i| + \alpha, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Положим $d = \max\limits_k \{|b_k| + \alpha, |c_k| + \alpha\}$, $T_0 = \max\limits_k \left\{t_k, \bar{t}_k, \dfrac{n-m-1}{b}\right\}$, $k - 1, 2, \ldots, n$. Функция $F(t) = t^{k-m-1} e^{-bt}$ есть убывающая при $t > T_0$, и поэтому в силу (21), (22) из (20) следует, что

$$(23) \qquad \left|\frac{y^{(n-k)}(t)}{t^m e^{bt}}\right| \leq A_k + \frac{d}{(k-1)!} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{T_0}^{t} s^{k-1-p_i} \left|\frac{y^{(n-i)}(s)}{s^m e^{bs}}\right| ds + \right.$$

$$\left. + \int_{T_0}^{t} s^{k-1-q_i} \left| \frac{y_h^{(n-i)}(s)}{[h(s)]^m e^{bh(s)}} \right| ds \right\},$$

где при написании последнего члена в (23) мы применили неравенства $[h(s)]^m \leq s^m$, $e^{bh}(s) \leq e^{bs}$.

Если мы просуммируем неравенство (23) от $k = 1$ до $k = n$, исполь: зуем (4) и следствие, то в силу $p_i > n$, $q_i > n$, $i = 1, 2, \ldots, n$ получим неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{y^{(n-k}(t)}{t^m e^{bt}} \right| \leq D < \infty, \quad t \geq T_0.$$

Аналогично, как при доказательстве теоремы 2, докажем прежде всего, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y^{(n)}(t)}{t^m e^{bt}} = f_m.$$

Согласно правила Лопиталя существовует $\lim \dfrac{y^{(n-k)}(t)}{t^m e^b}$ при $t \to \infty$ $k = 1, 2, \ldots, n$ и методом математической индукции докажется, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y^{(n-k)}(t)}{t^m e^{bt}} = \frac{f_m}{b^k} .$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] HALLAM, T. G.: Asymptotic Behavior of the Solutions of an n-th Order Nonhomogeneous Ordinary Differential Equation. Tras. Amer. Math. Soc. *1*, 1966, 177—194.

[2] НОРКИН, С. В.: Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. Москва 1965.

[3] ВЕДЬ, Ю. А.: Об асимптотических оценках решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Труды семинара по теории диф. урав. с отклон. аргументом. 7, 1969, 146—154.

Поступило 29. 4. 1971

Katedra matematiky
a deskriptívnej geometrie
Fakulty strojno-elektrotechnickej
Vysokej školy dopravnej
Žilina

THE DIFFERENTIAL EQUATION WITH RETARDED ARGUMENT ASYMPTOTICALLY EQUIVALENT TO THE EQUATION $y^{(n)} = 0$

Pavol Marušiak

Summary

The paper is concerned with asymptotic properties of solutions and their derivations of the equation

$$y^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} P_k(t) y^{(n-k)}(t) + \sum_{k=1}^{n} Q_k(t) y^{(n-k)}[h(t)] = f(t), \quad n \geq 2 \tag{1}$$

where $P_k(t)$, $Q_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $h(t)(\leqslant t)$, $f(t)$ are continuous functions in I $[a, \infty)$ and $\lim h(t) = +\infty$ as $t \to \infty$. It has been proved that under appropriate conditions for the functions $P_k(t)$, $Q_k(t)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $f(t)$, equation (1) has solutions which approach those of $y^{(n)}(t) = 0$ as $t \to \infty$.