Ivan Žembery

Характеризация операний в алгебрах при помощи частично упорядоченных множеств

Matematický časopis, Vol. 24 (1974), No. 3, 277--281

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126968

Mat. časopis 24, 1974, No 3, 277—282

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ОПЕРАЦИЙ В АЛГЕБРАХ ПРИ ПОМОЩИ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

ИВАН ЖЕМБЕРЫ (IVAN ŽEMBERY)

Известно, что группу можно определить при помощи трех операций, а именно: одной бинарной операции умножения, одной нулярной операции единицы и одной унарной операции обратного элемента. С другой стороны, группу можно определить при помощи одной бинарной операции умножения, обладающей тем свойством, что существует единица и для каждого элемента существует обратный. Эти два разных подхода определения группы обуславливаются тем обстоятельством, что если любое отображение группы A в группу B сохраняет операцию умножения, то оно сохраняет и операции единицы и обратного элемента. Такими свойствами операций в алгебрах мы будем заниматься в этой работе. Для этого мы будем пользоваться отображениями между носителями алгебр, от которых не будем требовать сохранения всех операций.

При помощи этих отображений мы упорядочим множество всех операционных символов так, что операционный символ $\mathbf{f}_\gamma$ предшествует операционному символу $\mathbf{f}_\delta$ тогда и только тогда, когда сохранение операции f_δ влечет за собой сохранение операции f_γ. Основным результатом работы является то, что для любого счетного частично упорядоченного множества $\langle X; \leqslant\rangle$, бесконечные множества которого не имеют нижнюю грань, существует система алгебр $\{\langle A_i; (f_{xi})_{x\in X}\rangle | i \in J\}$ так, что если мы обозначим множество всех $f_{xi}f_{xj}$ — гомоморфизмов через H_x, то имеет место $H_x \supseteq H_y$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant y$.

В работе мы будем пользоваться понятиями и обозначениями из монографии [1].

В дальнейшем мы будем рассматривать классы K алгебр определенного типа $\tau = \langle n_0, n_1, \ldots, n_\gamma, \ldots\rangle$ $(\gamma < o(\tau))$. Каждому $\gamma < o(\tau)$ соответствует операционный символ f_γ. Для каждой алгебры $\langle A; F\rangle$ класса K операционный символ $\mathbf{f}_\gamma$ осуществляется как n-арная операция $(\mathbf{f}_\gamma)_{\mathfrak{A}}$ на A и $F = \langle(\mathbf{f}_0)_{\mathfrak{A}}, (\mathbf{f}_1)_{\mathfrak{A}}, \ldots, (\mathbf{f}_\gamma)_{\mathfrak{A}}, \ldots\rangle_{\gamma<o(\tau)}$. В дальнейшем вместо $(\mathbf{f}_\gamma)_{\mathfrak{A}}$ мы будем писать f_γ, так что $F = \langle f_0, f_1, \ldots, f_\gamma, \ldots\rangle_{\gamma<o(\tau)}$.

На множестве $M(\tau)$ всех операционных символов, принадлежащих к типу τ, определим бинарное отношение $R(K)$ следующим образом. Для $\gamma, \delta < o(\tau)$ положим $\mathbf{f}_\gamma R(K)\mathbf{f}_\delta$, если выполняется условие: для $\langle A; F\rangle$, $\langle B; F\rangle \in K$ отображение $\varphi : A \to B$ сохраняет операцию f_γ тогда и только тогда, когда оно сохраняет операчию f_δ. Очевидно, $R(K)$ является эквивалентностью, и она разбивает множество $M(\tau)$ на классы эквивалентности. Множество этих классов обозначим через $T(K)$. Разные классы алгебр K могут дать разные разбиения на множестве $M(\tau)$. Ясно, что $R(\emptyset) = I$, где I — наибольшая эквивалентность на $M(\tau)$. О дальнейших соотношениях между K и $R(K)$ говорят следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если $K_1 \subseteq K_2$, то $R(K_1) \supseteq R(K_2)$.*

Теорема 2. *Для любой эквивалентности R на множестве $M(\tau)$ существует одноэлементный класс K так, что $R(K) = R$.*

Доказательство. Положим $A = M(\tau)/R$. Для каждого $f_\gamma \in M(\tau)$ определим операцию f_γ на множестве A следующим образом:

$$f_\gamma(r_0, r_1, \ldots, r_{n_\gamma-1}) = [\mathbf{f}_\gamma]R \quad (r_i \in A).$$

Положим $K = \{\langle A; F\rangle\}$. Отображение $\varphi : A \to A$ сохраняет операцию f_β тогда и только тогда, когда $([\mathbf{f}_\beta]R)\varphi = [\mathbf{f}_\beta]R$. Из этого вытекает утверждение теоремы.

На множестве $T(K)$ определим бинарное отношение S следующим образом: $[\mathbf{f}_\gamma]RS[\mathbf{f}_\delta]R$ тогда и только тогда, когда из сохранения операции f_δ при произвольным отображении $\varphi : A \to B$, где $\langle A; F\rangle$, $\langle B; F\rangle \in K$, вытекает сохранение операции f_γ при отображении φ. Отношение S является частичным упорядочением на множестве $T(K)$. Рефлексивность и транзитивность очевидны. Пусть $[\mathbf{f}_\gamma]RS[\mathbf{f}_\delta]R$, $[\mathbf{f}_\delta]RS[\mathbf{f}_\gamma]R$ и пусть φ — произвольное отображение множества A в множество B, где $\langle A; F\rangle$, $\langle B; F\rangle \in K$. Потом отображение φ сохраняет операцию f_γ тогда и только тогда, когда оно сохраняет операцию f_δ, следовательно $[\mathbf{f}_\gamma]R = [\mathbf{f}_\delta]R$, и это доказывает антисимметричность отношения S. Таким образом, типу τ и классу K алгебр типа τ принадлежит частично упорядоченное множество $T(K)$.

Пример 1. В случае, когда $\tau = \langle 2, 0, 1\rangle$ и K является классом всех групп, рассматриваемых с операциями умножения, единицы и обратного элемента, множество $T(K)$ содержит три одноэлементных класса, и оно упорядочено следующим образом: $\{\mathbf{f}_1\} \leqslant \{\mathbf{f}_0\}$, $\{\mathbf{f}_2\} \leqslant \{\mathbf{f}_0\}$, и $\{\mathbf{f}_1\}$, $\{\mathbf{f}_2\}$ не сравнимы.

Пример 2. Класс K в доказательстве Теоремы 2 дает наперед заданную эквивалентность R на $M(\tau)$, и частичная упорядоченность S в этом случае дискретна.

Возникает вопрос, которые частично упорядоченные множества могут таким образом соответствовать какому-то типу τ и классу K.

Лемма. *Пусть тип τ содержит натуральное число 1, f_γ является унарным операционным символом и пусть $\langle A; F\rangle$, $\langle B; F\rangle \in K$. Если отображение $\varphi : A \to B$ сохраняет операцию f_γ^n и m делится на n (это будем писать как n/m), то отображение φ сохраняет и операцию f_γ^m. Если $n \nmid m$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $f(a_i) = a_{i+1}$ для $i \neq n$, $f_\gamma(a_n) = a_1$, $a_i\varphi = b_i$ для всех $a_i \in A$ и $f_\gamma(b_i) = b_i$ для всех $b_i \in B$, то отображение φ сохраняет операцию f_γ^n и не сохраняет операцию f_γ^m.*

Доказательство. Пусть n/m. Если $(f_\gamma^n(x))\varphi = f_\gamma^n(x\varphi)$ для произвольного $x \in A$, то $(f_\gamma^m(x))\varphi = f_\gamma^n(f_\gamma^{m-n}(x)\varphi) = \ldots = f_\gamma^m(x\varphi)$. Пусть теперь $n \nmid m$. Потом $f_\gamma^n(a_i))\varphi = a_i\varphi = f_\gamma^n(a_i\varphi)$, но $(f_\gamma^m(a_i))\varphi = a_j\varphi = b_j \neq b_i = f_\gamma^m(b_i) = f_\gamma^m(a_i\varphi)$.

Теорема 3. *Пусть P-счетное частично упорядоченное множество, которое обладает тем свойством, что никакое бесконечное подмножество множества P не содержит нижнюю грань. Потом существует тип τ и класс K алгебр типа τ так, что частично упорядоченное множество, соответствующее типу τ и классу K, изоморфно с P. Существует даже такой класс K унарных алгебр.*

Доказательство. Перенумеруем элементы частично упорядоченного множества P (начиная с нулем) и число, соответствующее элементу x, обозначим через $Q(x)$. Пусть $P(x) = \prod_{x \leq y} \pi(Q(y) + 1)$, где $\pi(i)$ означает i-тое простое число. Из предположения теоремы вытекает, что это умножение всегда конечно. Очевидно, что $P(x)/P(y)$ имеет место тогда и только тогда, когда $y \leqslant x$. Теперь мы построим тип τ и класс K. Для каждого элемента $x \in P$ построим множества $M(x)$ и $N(x)$, состоящие из $P(x)$ элементов, которые обладают свойствами $M(x) \cap N(y) = \emptyset$ для всех $x, y \in P$ и $M(x) \cap M(y) = \emptyset$, $N(x) \cap N(y) = \emptyset$ для $x \neq y$. Пусть $M(x) = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Для каждого $x \in P$ определим отображение $\psi_x : M(x) \to M(x)$ следующим образом:

$$a_i\psi_x = \begin{cases} a_{i+1} & \text{для} \quad i \neq n \\ a_1 & \text{для} \quad i = n \end{cases}$$

Положим $\tau = \langle 1, 1, \ldots, 1, \ldots\rangle_{\gamma<\alpha}$, где α — наименьшее бесконечное ординальное число, если P — бесконечное множество, и $\alpha = \max Q(x)$, если P — конечное множество. Далее, положим

$$K = \{\langle M(x); F\rangle \mid x \in P\} \cup \{\langle N(x); F\rangle \mid x \in P\}.$$

Операционный символ $f_{Q(x)}$ будет в $\langle M(y); F\rangle$ осуществляться следующим образом: $f_{Q(x)}(a) = a\psi_y^{P(x)}$ для каждого $a \in M(y)$, а в $\langle N(y); F\rangle$ будет определен так: $f_{Q(x)}(b) = b$ для каждого $b \in N(y)$. Теперь мы покажем, что частично упорядоченное множество, соответствующее типу τ и классу K, изоморфно с P.

Если $x, y \in P$, $y \leqslant x$, то $P(x) \mid P(y)$, и существует натуральное число n так, что $f_{Q(y)} = f_{Q(x)}^n$ в каждой алгебре $\langle A; F\rangle \in K$. Ввиду леммы любое отображение $\psi : A \to B$, где $\langle A; F\rangle$, $\langle B; F\rangle \in K$, которое сохраняет операцию $f_{Q(x)}$, сохраняет и операцию $f_{Q(y)}$.

Если $x, y \in P$, $y \nleqslant x$, то $P(x) \nmid P(y)$, и отображение $\varphi : M(x) \to N(x)$, определенное $a_i\varphi = b_i$ для $i = 1, \ldots, P(x)$, где $M(x) = \{a_1, \ldots, a_{P(x)}\}$, $N(x) = \{b_1, \ldots, b_{P(x)}\}$, согласно лемме сохраняет операцию $f_{Q(x)}$, но не сохраняет операцию $f_{Q(y)}$.

Следовательно, $T(K)$ будет состоять из одноэлементных классов и отображение $\chi : P \to T(K)$, определенное $x\chi = \{f_{Q(x)}\}$, будет изоморфизм между частично упорядоченными множествами P и $T(K)$. Это доказывает теорему.

Следующий пример показывает, что обратная теорема не имеет места. Множество натуральных чисел N, упорядоченное по величине, не удовлетворяет условиям Теоремы 3 и существует тип τ и класс K алгебр типа τ так, что частично упорядоченное множество, соответствующее типу τ и классу K, изоморфно с N. Положим $\tau = \langle 0, 2, 3, 4, \ldots\rangle$, $K = \{N_0, N_1, \ldots\}$, где N_i множество всех натуральных чисел с одной n-арной операцией для каждого натурального числа $n \neq 1$, определенной так:

$$f_0(\emptyset) = 0,$$

$$f_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1 + \ldots + x_{n+1} + \min(\max(\operatorname{sgn}(x_1) + \ldots + \operatorname{sgn}(x_{n+1}) - 1{,}0), i).$$

Очевидно, что

$$f_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}, 0) = f_n(x_1, \ldots, x_{n+1}).$$

Сначала мы покажем, что если произвольное отображение φ сохраняет некоторую операцию f_n для $n \geqslant 1$, то оно сохраняет и операцию f_0. Пусть отображение φ сохраняет операцию f_n и пусть $0\varphi = i$. Тогда имеет место $i = 0\varphi = (f_n(0, \ldots, 0))\varphi = f_n(0\varphi, \ldots, 0\varphi) = f_n(i, \ldots, i) > ni$. Из этого вытекает $i = 0$. Теперь мы покажем, что если отображение φ сохраняет операцию f_{n+1}, то оно сохраняет и операцию f_n. $(f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}))\varphi = (f_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}, 0))\varphi = f_{n+1}(x_1\varphi, \ldots, x_{n+1}\varphi, 0\varphi) = f_{n+1}(x_1\varphi, \ldots, x_{n+1}\varphi, 0) =$

$= f_n(x_1\varphi, \ldots, x_{n+1}\varphi)$. Отображение $\varphi : N_n \to N_0$, определенное $0\varphi = 0$, $x\varphi = x + 1$ для $x \neq 0$, сохраняет операцию f_n, но не сохраняет операцию $f_{n+1} \cdot (f_n(0, \ldots, 0))\varphi = 0\varphi = 0 = f_n(0\varphi, \ldots, 0\varphi)$.

Если некоторое $x_i \neq 0$, то $(f_n(x_1, \ldots, x_{n+1}))\varphi = (x_1 + \ldots + x_{n+1} + \min(\max(\operatorname{sgn}(x_1) + \ldots + \operatorname{sgn}(x_{n+1}) - 1, 0), n))\varphi = x_1 + \ldots + x_{n+1} + 1 + \min(\operatorname{sgn}(x_1) + \ldots + \operatorname{sgn}(x_{n+1}) - 1, n) = x_1 + \ldots + x_{n+1} + 1 + \operatorname{sgn}(x_1) + \ldots + \operatorname{sgn}(x_{n+1}) - 1 = x_1 + \operatorname{sgn}(x_1) + \ldots + x_{n+1} + \operatorname{sgn}(x_{n+1}) = x_1\varphi + \ldots + x_{n+1}\varphi = x_1\varphi + \ldots + x_{n+1}\varphi + \min(\max(\operatorname{sgn}(x_1\varphi) + \ldots + \operatorname{sgn}(x_{n+1}\varphi) - 1, 0), 0) = f_n(x_1\varphi, \ldots, x_{n+1}\varphi)$.

Пусть $x_i \neq 0$ для $i = 1, \ldots, n + 2$, тогда $(f_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+2}))\varphi = (x_1 + \ldots + x_{n+2} + \min(\max(\operatorname{sgn}(x_1) + \ldots + \operatorname{sgn}(x_{n+2}) - 1, 0), n))\varphi = x_1 + \ldots + x_{n+2} + 1 + \min(\operatorname{sgn}(x_1) + \ldots + \operatorname{sgn}(x_{n+2}) - 1, n) = x_1 + \ldots + x_{n+2} + 1 + n \neq x_1 + \ldots + x_{n+2} + n + 2 = x_1 + \operatorname{sgn}(x_1) + \ldots + x_{n+2} + \operatorname{sgn}(x_{n+2}) = x_1\varphi + \ldots + x_{n+2}\varphi = x_1\varphi + \ldots + x_{n+2}\varphi + \min(\max(\operatorname{sgn}(x_1\varphi) + \ldots + \operatorname{sgn}(x_{n+2}\varphi) - 1, 0), 0) = f_{n+1}(x_1\varphi, \ldots, x_{n+2}\varphi)$.

Мы показали, что частично упорядоченное множество, соответствующее типу τ и классу K, изоморфно с целью натуральных чисел, упорядоченных по величине.

ЛИТЕРАТУРА

[1] GRÄTZER, G.: Universal algebra. New York 1968.

Поступило 18. 5. 1973

Matematický ústav SAV
Obrancov mieru 41
886 25 Bratislava