Josef Vala

Über die involutorischen Paare der Regelflächen

Matematický časopis, Vol. 20 (1970), No. 1, 11--26

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126963

Matematický časopis 20 (1970), No. 1

ÜBER DIE INVOLUTORISCHEN PAARE DER REGELFLÄCHEN

JOSEF VALA, Brno

Man betrachtet in dieser Abhandlung die Eigenschaften der involutorischen Regelflächenpaare und der mit diesen Paaren verknüpften Geradenmannigfaltigkeiten.

Im projektiven Raum P_3 untersuchen wir ein Paar P der Regelflächen $\Omega_1(q_1)$, $\Omega_2(q_2)$. Ein solches Paar besitze eine Korrespondenz $C : q_1 \to q_2$, wobei die einander zugeordneten Geraden q_1, q_2 stets demselben Parameter u entsprechen und windschief sind. Wir werden voraussetzen, daß der Parameter u alle Werte aus dem offenen Intevall I einnimmt und daß die Flächen Ω_1, Ω_2 im Intervall I keine Torsalerzeugenden haben.

a) Betrachten wir ein bewegliches Koordmatentetraeder mit den Eckpunkten A_1, A_2, A_3, A_4: $q_1 = (A_1, A_4)$, $q_2 = (A_2, A_3)$. Wenn wir mit ω_i^k die Komponenten der differentiellen Verrückung des Tetraeders bezeichnen, dann gilt

$$dA_i = \omega_i^k A_k\,, \quad i, k = 1, 2, 3, 4\,. \tag{1}$$

Wenn die Geraden q_1, q_2 fest sind, dann bekommen wir:

$$dq_1 = \vartheta_1 q_1\,, \quad dq_2 = \delta_2 q_2\,.$$

ϑ_1, ϑ_2 sind im allgemeinen Funktionen des Hauptparameters u und der sekundären Parameter und der Differentialen der Parameter. Daraus folgt, daß die Formen ω_4^2, ω_4^3, ω_1^2, ω_1^3, ω_3^1, ω_2^1, ω_3^4, ω_2^4 Hauptformen sind. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} &\omega_4^2 = u_4^2 du\,, \quad \omega_4^3 = u_4^3 du\,, \quad \omega_1^2 = u_1^2 du\,, \quad \omega_1^3 = u_1^3 du\,,\\ &\omega_3^1 = u_3^1 du\,, \quad \omega_2^1 = u_2^1 du\,, \quad \omega_3^4 = u_3^4 du\,, \quad \omega_2^4 = u_2^4 du\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Koeffizienten u_i^k, $i, k = 1, 2, 3, 4$, in den Gleichungen (2) sind im allgemeinen Funktionen des Hauptparameters u und der sekundären Parameter.

Die Gerade $p(u_0)$ ist *die Quasiflecknodalgerade* des Paares P, wenn für den festen Wert u_0 des Parameters $u \in I$

$$p \times (A_1, A_4) = 0\,, \quad p \times (A_2, A_3) = 0\,, \quad p \times d(A_1, A_4) = 0\,, \quad p \times d(A_2, A_3) = 0$$

gilt. Mit $\times$ bezeichnen wir das Plückersche Produkt. Die Quasifleknodalgerade $p(u_0)$ schneidet die Geraden $q_1(u_0)$, $q_2(u_0)$ in *den Quasifleknodalpunkten* des Paares P. Die zu allen Werten von $u = u_0 \in I$ gehörenden Quasifleknodalpunkte bilden im allgemeinen *die Quasifleknodalkurven.* Ähnlich bilden die Quasifleknodalgeraden im allgemeinen *die Quasifleknodalflächen.*

Wir werden nun einige spezielle Paare der Regelflächen betrachten.

Für den festen Wert u_0 des Parameters $u \in I$ untersuchen wir ein windschiefes Viereck $M_1M_2M_4M_3$, wobei die Punkte M_1, M_4 auf der Geraden $q_1(u_0)$, die Punkte M_2, M_3 auf der Geraden $q_2(u_0)$ liegen sollen. Es gilt dann

$$\text{(3)} \qquad M_1 = \varrho_1 A_1 + \sigma_1 A_4\,,\ M_2 = \varrho_2 A_2 + \sigma_2 A_3\,,\ M_4 = \varrho_4 A_1 + \sigma_4 A_4\,,$$
$$M_3 = \varrho_3 A_2 + \sigma_3 A_3\,.$$

Weiter werden wir folgende Eigenschaften voraussetzen:

Die Tangentenebene der Fläche Ω_1 im Punkte M_1 schneidet $q_2(u_0)$ im Punkte M_2,
die Tangentenebene der Fläche Ω_2 im Punkte M_2 schneidet $q_1(u_0)$ im Punkte M_4,
die Tangentenebene der Fläche Ω_1 im Punkte M_4 schneidet $q_2(u_0)$ im Punkte M_3,
die Tangentenebene der Fläche Ω_2 im Punkte M_3 schneidet $q_1(u_0)$ im Punkte M_1

Ein solches zum Paar P gehörendes Viereck nennen wir *involutorisch.* Mit Hilfe der Gleichungen (1), (2), (3) bekommen wir folgende Bedingungen für die Existenz eines solchen Viereckes:

$$\text{(4a)} \qquad \varrho_2(\varrho_1 u_1^3 + \sigma_1 u_4^3) = \sigma_2(\varrho_1 u_1^2 + \sigma_1 u_4^2)\,,$$

$$\text{(4b)} \qquad \varrho_4(\varrho_2 u_2^4 + \sigma_2 u_3^4) = \sigma_4(\varrho_2 u_2^1 + \sigma_2 u_3^1)\,,$$

$$\text{(4c)} \qquad \varrho_3(\varrho_4 u_1^3 + \sigma_4 u_4^3) = \sigma_3(\varrho_4 u_1^2 + \sigma_4 u_4^2)\,,$$

$$\text{(4d)} \qquad \varrho_1(\varrho_3 u_2^4 + \sigma_3 u_3^4) = \sigma_1(\varrho_3 u_2^1 + \sigma_3 u_3^1)\,.$$

Aus den Gleichungen (4a), (4b) folgt dann:

$$\text{(5a)} \qquad \varrho_4[u_2^4(\varrho_1 u_1^2 + \sigma_1 u_4^2) + u_3^4(\varrho_1 u_1^3 + \sigma_1 u_4^3)] =$$
$$= \sigma_4[u_3^1(\varrho_1 u_1^3 + \sigma_1 u_4^3) + u_2^1(\varrho_1 u_1^2 + \sigma_1 u_4^2)]\,.$$

Aus den Gleichungen (5a), (4c) bekommen wir dann:

$$\text{(5b)} \qquad \varrho_3\{u_1^3[u_3^1(\varrho_1 u_1^3 + \sigma_1 u_4^3) + u_2^1(\varrho_1 u_1^2 + \sigma_1 u_4^2)] +$$
$$+ u_4^3[u_2^4(\varrho_1 u_1^2 + \sigma_1 u_4^2) + u_3^4(\varrho_1 u_1^3 + \sigma_1 u_4^3)]\} =$$
$$= \sigma_3\{u_1^2[u_3^1(\varrho_1 u_1^3 + \sigma_1 u_4^3) + u_2^1(\varrho_1 u_1^2 + \sigma_1 u_4^2)] +$$
$$+ u_4^2[u_2^4(\varrho_1 u_1^2 + \sigma_1 u_4^2) + u_3^4(\varrho_1 u_1^3 + \sigma_1 u_4^3)]\}\,.$$

Die Gleichungen (5b), (4d) ergeben die Bedingung: Das zum Paare P für den festen Wert $u = u_0 \in I$ gehörende Viereck ist dann und nur dann involutorisch, wenn wenigstens eine der folgenden Relationen gilt:

$$(6a) \qquad (u_2^4 u_1^2 + u_3^4 u_1^3)[\varrho_1]^2 + (-\, u_2^1 u_1^2 - u_3^1 u_1^3 + u_2^4 u_4^2 + u_3^4 u_4^3)\, \varrho_1 \sigma_1 + \\ + (-\, u_2^1 u_4^2 - u_3^1 u_4^3)[\sigma_1]^2 = 0\,,$$

$$(7) \qquad u_1^2 u_2^1 + u_1^3 u_3^1 + u_2^4 u_4^2 + u_3^4 u_4^3 = 0\,.$$

Nach Ivlev [3] bestimmt die Gleichung (6a) die Quasifleknodalpunkte der Fläche Ω_1 auf der Geraden $q_1(u_0)$. Bei der Gültigkeit dieser Relation gilt $M_1 \quad M_4$, $M_2 \quad M_3$; das involutorische Viereck zerfällt dann in eine Abszisse $M_1 M_2$. Das folgt auch aus der Gleichung (5a) im Falle $\varrho_1 = \varrho_4$, $\sigma_1 - \sigma_4$. Im folgenden betrachten wir diesen Fall nicht. Weiter werden wir voraussetzen, daß für keinen Wert von $u \in I$ die Gleichung (6a) nicht für alle Werte von ϱ_1, σ_1 erfüllt ist.

Wir finden leicht die Gleichung der Quasifleknodalpunkte der Fläche Ω_2 auf der Geraden $q_2(u_0)$.

$$(6b) \qquad (\quad u_4^3 u_2^4 - u_1^3 u_2^1)[\varrho_3]^2 + (u_1^2 u_2^1 - u_1^3 u_3^1 + u_2^4 u_4^2 - u_3^4 u_4^3) \varrho_3 \sigma_3 + \\ + (u_1^2 u_3^1 + u_4^2 u_3^4)[\sigma_3]^2 = 0\,.$$

Die Gleichung (7) hängt von den Parametern ϱ_i, σ_i, $i - 1, 2, 3, 4$, nicht ab. Bei ihrer Gültigkeit existieren für $u = u_0$ unendlich viele involutorische Vierecke. Nach der Gleichung (5a) schneiden die angeführten Vierecke die Gerade $q_1(u_0)$ in zwei projektive Punktreihen. Diese Punktreihen haben folgende Gleichung:

$$(8) \qquad \varrho_1 \varrho_4 (u_1^2 u_2^4 + u_3^4 u_1^3) + \varrho_1 \sigma_4 (-\, u_3^1 u_1^3 - u_2^1 u_1^2) + \varrho_4 \sigma_1 (u_2^4 u_4^2 + u_3^4 u_4^3) + \\ + \sigma_1 \sigma_4 (-\, u_3^1 u_4^3 - u_2^1 u_4^2) = 0\,.$$

Wenn für alle Werte von $u \in I$ die Relation (7) gilt, dann bezeichnen wir das zugehörige Paar der Flächen Ω_1, Ω_2 als involutorisch. Weiter bezeichnen wir mit Γ die Menge aller involutorischen Vierecke des Paares (für $u \in I$).

Die durch die Seiten $M_1 M_2$, $M_4 M_3$ der involutorischen Vierecke gehenden Geraden bilden zwei Kongruenzen. Diese Kongruenzen sind im gewissen Sinne ein Sonderfall der Hilfskongruenzen von Popov (Finikov [2]). In diesem Falle zerfallen die Grundkongruenzen von Popov in zwei Regelflächen. Dasselbe gilt für die Seiten $M_2 M_4$, $M_3 M_1$.

Hilfssatz 1. *Wenn das Paar P im Intervall I involutorisch ist, dann existieren für alle Werte von $u = u_0 \in I$ zwei Quadriken, eine dieser Quadriken berührt die Fläche Ω_1 längs der Geraden $q_1(u_0)$ und schneidet die Fläche Ω_2 längs der*

Geraden $q_2(u_0)$ harmonisch (Cartan [1]). Die andere Quadrik berührt die Fläche Ω_2 längs der Geraden $q_2(u_0)$ und schneidet die Fläche Ω_1 längs der Geraden $q_1(u_0)$ harmonisch.

Der Beweis folgt aus der Definition der Γ-Schar der involutorischen Vierecke.

Hilfssatz 2. *Das involutorische Paar P der Flächen Ω_1, Ω_2 hat für $u = u_0$ im Intervall I keine zusammenfallenden Quasifleknodalerzeugenden.*

Beweis. Setzen wir voraus, daß für den festen Wert u_0 des Parameters u die beiden Quasifleknodalgeraden des Paares P zusammenfallen. Die Eckpunkte A_1, A_2 des Kordinatentetraeders wählen wir in den zugehörigen Quasifleknodalpunkten des Paares. Für $u = u_0$ gilt dann:

$$u_1^3 - u_2^4 = 0 . \tag{9}$$

Eine Wurzel der Gleichung (6a) ist $\sigma_1 = 0$. Wenn gleichzeitig $\sigma_1 = 0$ die zweite Wurzel der Gleichung (6a) ist, dann gilt

$$u_1^2 u_2^1 - u_3^4 u_4^3 = 0 .$$

Unter Voraussetzung von (9) gilt dann nach (7):

$$u_1^2 u_2^1 + u_3^4 u_4^3 = 0 .$$

Aus den letzten zwei Gleichungen folgt entweder $u_1^2 = 0$, oder $u_2^1 = 0$, oder $u_1^2 = u_2^1 = 0$. Im ersten Falle gilt dann für $u = u_0 \in I$:

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^4 A_4 .$$

Daraus folgt, daß die Gerade $q_1(u_0)$ torsal ist. Nach den Voraussetzungen ist es im Intervall I unmöglich. Ähnlich kann man die Fälle $u_2^1 = 0$, $u_1^2 = u_2^1 = 0$ betrachten. Nach (6b) müssen wir auch die Fälle $u_3^4 = 0$, $u_4^3 = 0$, $u_3^4 = u_4^3 = 0$ ausschließen.

Es gilt also:

$$u_1^2 \neq 0, \; u_2^1 \neq 0, \; u_3^4 \neq 0, \; u_4^3 \neq 0$$

für alle Werte des Parameters $u \in I$.

Auf der Fläche Ω_1 betrachten wir die Kurve $M_1(u) = (M_1)$. Setzen wir voraus, daß für $u \in I$ die Kurve $M_1(u)$ jede Erzeugende der Fläche Ω_1 gerade in einem Punkt durchschneidet. Die Punkte dieser Kurve seien die Eckpunkte M_1 der zum involutorischen Paar P gehörigen involutorischen Vierecke. Zu den Punkten der Kurve (M_1) gehört die einparametrische Schar Λ der involutorischen Vierecke. Wir bezeichnen mit R(1,2), R(2,4), R(4,3), R(3,1) die Regelflächen, die fortschreitend durch die Geraden M_1M_2, M_2M_4, M_4M_3, M_3M_1 gebildet werden.

Eine einparametrische Schar Λ der involutorischen Vierecke des Paares P

bezeichnen wir mit Δ_2, wenn gerade zwei der angeführten Flächen $R(i, k)$, $i, k = 1, 2, 3, 4$, im Intervall I abwickelbar sind. Ähnlich bezeichnen wir mit Δ_3 eine Δ-Schar, wo gerade drei der angeführten Flächen $R(i, k)$ im Intervall I abwickelbar sind. Für die Δ_4-Schar sind alle Flächen $R(i, k)$ im Intervall I abwickelbar.

Hilfssatz 3. *Wenn eine zur einparametrischen* Schar Δ *gehörige Fläche* $R(i, k)$ *im Intervall I abwickelbar ist, dann ist mindestens eine weitere Fläche* $R(i, k)$ *im Intervall I abwickelbar.*

Beweis. Die Eckpunkte A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, des beweglichen Koordinatentetraeders wählen wir in den entsprechenden Punkten der Kurven (M_i). Die Kurven (M_i) seien von den Eckpunkten der Δ-Schar der involutorischen Vierecke gebildet. Bei der angeführten Wahl des Koordinatensystems gelten dann für alle betrachteten Werte der Parameter, d. h. für $u \in I$ und für alle reellen Werte der sekundären Parameter, folgende Relationen:

$$\omega_1^3 = 0\,,\quad \omega_2^1 = 0\,,\quad \omega_4^2 = 0\,,\quad \omega_3^4 = 0\,. \tag{10}$$

Wenn $R(1,2)$ eine Torse ist, dann gilt entweder $\omega_1^4 = 0$, oder $\omega_2^3 = 0$, oder $\omega_1^4 = \omega_2^3 = 0$. Das heißt für alle betrachteten Werte der Parameter. Einen ähnlichen Sinn haben die Relationen $\omega_i^k = 0$, $i, k = 1, 2, 3, 4$, in folgenden Fällen.) In den Fällen $\omega_1^4 = 0$, $\omega_1^4 = \omega_2^3 = 0$ ist (A_1) die Rückkehrkante der Torse, im Falle $\omega_2^3 = 0$ ist $(\omega_2^4 A_1 - \omega_1^4 A_2)$ die Rückkehrkante der Torse. Wenn $R(2,4)$ eine Torse ist, dann gilt entweder $\omega_2^3 = 0$, oder $\omega_4^1 = 0$, oder $\omega_2^3 = \omega_4^1 = 0$. Im ersten und dritten Falle ist (A_2) die Rückkehrkante der Torse, im zweiten Falle ist $(\omega_4^3 A_2 - \omega_2^3 A_4)$ die Rückkehrkante der Torse. Wenn $R(4,3)$ eine Torse ist, dann ist entweder $\omega_4^1 = 0$, oder $\omega_3^2 = 0$, oder $\omega_4^1 = \omega_3^2 = 0$. Im ersten und dritten Falle ist (A_4) die Rückkehrkante der Torse, im zweiten Falle ist $(\omega_3^1 A_4 - \omega_4^1 A_3)$ die Rückkehrkante der Torse. Wenn $R(3,1)$ eine Torse ist, dann gilt entweder $\omega_3^2 = 0$, oder $\omega_1^4 = 0$, oder $\omega_3^2 = \omega_1^4 = 0$. Im ersten und dritten Falle ist (A_3) die Rückkehrkante der Torse, im zweiten Falle ist $(\omega_1^2 A_3 - \omega_3^2 A_1)$ die Rückkehrkante der Torse.

Daraus folgt die Behauptung des Satzes. Für die Δ_2-Schar der involutorischen Vierecke gilt dann in dem angeführten Koordinatensystem gerade eine der folgenden Relationen:

$$\omega_1^4 = 0\,,\quad \omega_2^3 = 0\,,\quad \omega_3^2 = 0\,,\quad \omega_4^1 = 0\,.$$

Eine der Torsen $R(i, k)$, $i, k = 1, 2, 3, 4$, hat die Rückkehrkante in der Grundlinie, die Rückkehrkante der anderen Torse liegt nicht in der Grundlinie.

Für die folgenden Berechnungen führen wir noch einige Relationen an: Die Kurve (A_1) ist die asymptotische Kurve der Fläche Ω_1,

wenn $\omega_1^2\omega_2^3 - \omega_1^4\omega_4^3 = 0$ gilt.

die Kurve (A_4) ist die asymptotische Kurve der Fläche Ω_1,
wenn $\omega_4^1\omega_1^2 + \omega_4^3\omega_3^2 = 0$ gilt ,
die Kurve (A_2) ist die asymptotische Kurve der Fläche Ω_2,
wenn $\omega_2^3\omega_3^1 + \omega_2^4\omega_4^1 = 0$ gilt ,
die Kurve (A_3) ist die asymptotische Kurve der Fläche Ω_2,
wenn $\omega_3^1\omega_1^4 + \omega_3^2\omega_2^4 = 0$ gilt .

Die einparametrische Schar der involutorischen Vierecke A_1, A_2 A_4 A_3 ist eine Δ_3-Schar, wenn die Gleichungen (10) und folgende Relationen gelten:

$\omega_1^4 = 0$, $\omega_2^3 = 0$; ω_3^2, ω_4^1

sind nicht für alle betrachteten Werte der Parameter gleich Null.

Die Fläche $R(1,2)$ ist eine Torse, ihre Rückkehrkante ist die Kurve (A_1), die Kurve (A_1) ist eine Asymptotenkurve der Fläche Ω_1. Die Fläche $R(2,4)$ ist auch eine Torse, ihre Rückkehrkante ist die Kurve (A_2). Die Fläche $R(3,1)$ ist auch eine Torse, ihre Rückkehrkante ist die Kurve $(\omega_1^2 A_3 - \omega_3^2 A_1)$.

Ähnlich betrachtet man folgende Fälle:

$\omega_2^3 = 0$, $\omega_4^1 = 0$; ω_3^2, ω_1^4

sind nicht für alle betrachteten Werte der Parameter gleich Null;

$\omega_1^4 = 0$, $\omega_3^2 = 0$; ω_2^3, ω_4^1

sind nicht für alle betrachteten Werte der Parameter gleich Null,

$\omega_3^2 = 0$, $\omega_4^1 = 0$; ω_2^3, ω_1^4

sind nicht für alle betrachteten Werte der Parameter gleich Null.

Zwei Torsen $R(i, k)$ haben die Rückkehrkanten in den Grundlinien, die Rückkehrkante der übrigen Torsen liegt in der Grundlinie nicht.

Betrachten wir die Δ_4 — Scharen der involutorischen Vierecke $A_1A_2A_4A_3$.

Wir haben drei interessante Fälle:

1. Die Torsen, die durch die gegenüberliegenden Geraden der involutorischen Vierecke gebildet werden, haben die Rückkehrkanten in den Grundlinien, die Rückkehrkanten der übrigen Torsen liegen nicht in den Grundlinien. Das kommt in folgenden Fällen in Erwägung:

$\omega_1^4 = 0$, $\omega_4^1 = 0$; ω_3^2, ω_2^3

sind nicht für alle betrachteten Werte der Parameter gleich Null,

$\omega_2^3 - 0$, $\omega_3^2 = 0$; ω_1^4, ω_4^1

sind nicht für alle betrachteten Werte der Parameter gleich Null.

Im ersten Falle haben die Flächen $R(1,2)$, $R(2,4)$, $R(4,3)$, $R(3,1)$ die Rückkehrkanten in den Kurven (A_1), $(\omega_4^3 A_2 - \omega_2^3 A_4)$, (A_4), $(\omega_1^2 A_3 - \omega_3^2 A_1)$.

Im zweiten Falle haben die Flächen $R(1,2)$, $R(2,4)$, $R(4,3)$, $R(3,1)$ die Rückkehrkanten in den Kurven $(\omega_2^4 A_1 - \omega_1^4 A_2)$, (A_2), $(\omega_3^1 A_4 - \omega_4^1 A_3)$, (A_3).

2. Drei Torsen haben die Rückkehrkanten in den Grundlinien, die letzte Torse hat die Rückkehrkante nicht in der Grundlinie. Das kommt in folgendem Falle in Erwägung:

$\omega_1^4 = 0,\ \omega_2^3 = 0,\ \omega_4^1 = 0;\ \omega_3^2$

ist nicht für alle betrachteten Werte der Parameter gleich Null.
Die Rückkehrkanten der Torsen sind die Kurven

$$(A_1),\ (A_2),\ (A_4),\ (\omega_1^2 A_3 - \omega_3^2 A_1).$$

Ähnlich betrachtet man folgende Fälle:

$\omega_1^4 = 0,\ \omega_4^1 = 0,\ \omega_3^2 = 0;\ \omega_2^3$

ist nicht für alle betrachteten Werte der Parameter gleich Null

$\omega_1^4 = 0,\ \omega_2^3 = 0.\ \omega_3^2 = 0;\ \omega_4^1$

ist nicht für alle betrachteten Werte der Parameter gleich Null,

$\omega_2^3 = 0,\ \omega_4^1 = 0,\ \omega_3^2 = 0;\ \omega_1^4$

ist nicht für alle betrachteten Werte der Parameter gleich Null.

3. Alle vier Torsen haben die Rückkehrkanten in den Grunlinien.
Es bleibt der einzige Fall:

$$\omega_1^4 = \omega_2^3 = \omega_4^1 = \omega_3^2 = 0.$$

Die Kurven (A_1), (A_4) sind die Asymptotenkurven der Fläche Ω_1, die Kurven (A_2), (A_3) sind die Asymptotenkurven der Fläche Ω_2.

Im folgenden betrachten wir die Allgemeinheit der Existenz von vier Kurven $A_1(u)$, $A_2(u)$, $A_3(u)$, $A_4(u)$ mit folgender Eigenschaft: Für alle Werte von $u \in I$ bilden die Vierecke $A_1A_2A_4A_3$ die einparametrische Schar der involutorischen Vierecke.

Satz 1. *Die Bestimmung der geometrischen Kurven $A_1(u)$, $A_2(u)$, $A_3(u)$, $A_4(u)$ mit der Eigenschaft, daß für alle Werte von $u \in I$ die Vierecke $A_1A_2A_4A_3$ bezüglich des entsprechenden Paares A_1A_4, A_2A_3 involutorisch sind, hängt von 8 Funktionen des Parameters u ab.*

Beweis. Die Eckpunkte des Koordinatentetraeders betrachten wir in den entsprechenden Punkten der angeführten geometrischen Kurven (A_1), (A_2), (A_3), (A_4). Es gelten dann die Relationen (10). Bei dem festen Wert des Parameters $u \in I$ sind auch die geometrischen Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 fest, es gilt dann:

$$\omega_i^k = u_i^k \mathrm{du}\,, \quad i, k = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq k\,. \tag{11}$$

Durch die äußere Differentiation der Gleichungen (11) bekommen wir folgende Relationen.

$$[du_i^k + u_i^k(-\omega_i^i + \omega_k^k),\ du] = 0, \quad i \neq k\,. \tag{12}$$

In den Gleichungen (12) und in den weiter angeführten Gleichungen bedeutet ω_i^i, ω_k^k keine Addition nach i. bzw. k. (Unter Voraussetzung, daß nichts anderes angeführt ist.)

Nach den Strukturgleichungen des projektiven Raumes und nach der Gleichungen (11) gilt dann.

$$D\omega_i^i = 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4\,.$$

Die Formen ω_i^i sind die Differentialen der Funktionen Θ_i, die im allgemeinen von dem Hauptparameter u und von den sekundären Parametern abhängen. Es gilt also:

$$\omega_i^i = d\Theta_i\,.$$

Führen wir nun die Umnormung

$$\overline{A}_i = \varrho_i A_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \varrho_i \neq 0 \text{ für } u \in I, \text{ an.}$$

Wenn wir mit $\bar{\omega}_i^k$ die Komponenten der Bewegung des Teraeders $\overline{A}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, bezeichnen, dann gilt:

$$\bar{\omega}_i^i = \frac{d\varrho_i}{\varrho_i} + \omega_i^i = \frac{d\varrho_i}{\varrho_i} + d\Theta_i; \quad \bar{\omega}_i^k = \frac{\varrho_i}{\varrho_k}\,\omega_i^k, \ i \neq k; \ i, k = 1, 2, 3, 4\,. \tag{13}$$

Wenn wir nun $\varrho_i = e^{\Theta_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$, wählen, dann bekommen wir nach (13), (11) folgende Relationen:

$$\bar{\omega}_i^i = 0; \ \bar{\omega}_i^k = e^{\Theta_i \ \Theta_k}\omega_i^k = \bar{u}_i^k du, \quad \bar{u}_i^k = e^{\Theta_i \ \Theta_k}u_i^k, \quad i \neq k \tag{14}$$

Nach (14), (12) gilt dann:

$$[d\bar{u}_i^k, du] = 0\,.$$

Die Funktionen $\bar{u}_i^k$ hängen nur von dem Parameter u ab. Die differentielle Verrückung des Koordinatentetraeders kann nun durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$d\overline{A}_i^k = \bar{u}_i^k du \overline{A}_k\,, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, 3, 4 \text{ (nach } k \text{ addieren)} \tag{15}$$

Aus den Gleichungen (10), (13) folgt dann:

$$u_1^3 = u_2^1 = u_4^2 = u_3^4 = 0$$

Das System der Differentialgleichungen (15) für eine unabhängige Unbekannte u hängt von 8 beliebigen Funktionen der Veränderlichen u ab. Man kann nämlich die Funktionen

$$u_1^2,\ u_1^4,\ u_2^3,\ u_2^4,\ u_3^1,\ u_3^2,\ u_4^1,\ u_4^3$$

beliebig wählen. Daraus und aus den Gleichungen (13) folgt die Bestimmung der Allgemeinheit der einzelnen angeführten Typen der einparametrischen Scharen von involutorischen Vierecken. In diesen Fällen ist eine oder mehrere Funktionen

$$u_1^4,\ u_4^1,\ u_2^3,\ u_3^2$$

im Intervall I gleich Null.

Setzen wir weiter voraus, daß das Koordinatentetraeder mit den Eckpunkten A_1, A_2, A_3, A_4 schon nach dem Satze 1 umgenormt ist. Die Vierecke $A_1A_2A_3A_4$ seien für $u \in I$ involutorisch. Wir führen nun folgende Transformation der Eckpunkte des Koordinatentetraeders durch:

$$M_1 = A_1 = \varrho_1 A_1 + \sigma_1 A_4, \quad M_3 = A_3 = \varrho_3 A_2 + \sigma_3 A_3,$$

$$M_2 = A_2 = \varrho_2 A_2 + \sigma_2 A_3, \quad M_4 = A_4 = \varrho_4 A_1 + \sigma_4 A_4.$$

Die Eckpunkte des neuen involutorischen Koordinatentetraeders seien A_1, A_2, A_3, A_4. Wenn

$$(\varrho_1\sigma_4 - \varrho_4\sigma_1)(\varrho_2\sigma_3 - \varrho_3\sigma_2) \neq 0$$

für alle Werte von $u \in I$ gilt, dann sind die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 linear unabhängig. In anderen Fällen, d. h., wenn für $u_0 \in I$

$$\varrho_1\sigma_4 - \varrho_4\sigma_1 = 0, \quad \text{oder} \quad \varrho_2\sigma_3 - \varrho_3\sigma_2 = 0$$

gilt, dann zerfällt das zugehörige Viereck in eine Abszisse. Diese Fälle schließen wir aus.

Die differentielle Verrückung des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ kann durch folgende Relationen bestimmt werden:

$$dA_i = \omega_i^k A_k \ (i, k = 1, 2, 3, 4, \text{ nach } k \text{ addieren}).$$

Es gilt dann nach (4), (10), (14):

$$\omega_1^3 = \omega_2^1 = \omega_4^2 = \omega_3^4 = 0,$$

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
\omega_1^4(\varrho_4\sigma_1 - \varrho_1\sigma_4) &= \sigma_1 d\varrho_1 - \varrho_1 d\sigma_1 - [\varrho_1]^2\omega_1^4 + [\sigma_1]^2\omega_4^1\,,\\
\omega_2^3(\varrho_3\sigma_2 - \varrho_2\sigma_3) &= \sigma_2 d\varrho_2 - \varrho_2 d\sigma_2 - [\varrho_2]^2\omega_2^3 + [\sigma_2]^2\omega_3^2\,,\\
\omega_3^2(\varrho_2\sigma_3 - \varrho_3\sigma_2) &= \sigma_3 d\varrho_3 - \varrho_3 d\sigma_3 - [\varrho_3]^2\omega_2^3 + [\sigma_3]^2\omega_3^2\,,\\
\omega_4^1(\varrho_1\sigma_4 - \varrho_4\sigma_1) &= \sigma_4 d\varrho_4 - \varrho_4 d\sigma_4 - [\varrho_4]^2\omega_1^4 + [\sigma_4]^2\omega_4^1\,.
\end{aligned}
$$

Aus den Gleichungen (10), (4) folgt dann:

$$(17a)\qquad \varrho_2\sigma_1 u_4^3 = \varrho_1\sigma_2 u_1^2\,,$$

$$(17b)\qquad \varrho_2\varrho_4 u_2^4 = \sigma_2\sigma_4 u_3^1\,,$$

$$(17c)\qquad \varrho_3\sigma_4 u_4^3 = \varrho_4\sigma_3 u_1^2\,,$$

$$(17d)\qquad \varrho_1\varrho_3 u_2^4 = \sigma_1\sigma_3 u_3^1\,.$$

Setzen wir voraus, daß für alle Werte des Parameters $u \in I$

$$u_1^4 \neq 0,\quad u_4^1 \neq 0,\quad u_2^3 \neq 0,\quad u_3^2 \neq 0$$

gilt. Die zu der gegebenen Δ-Schar der involutorischen Vierecke $A_1A_2A_4A_3$ gehörigen Flächen $R\ (i,\,k)$ haben dann im Intervall I keine Torsalerzeugenden.

Setzen wir voraus, daß die Δ-Schar der involutorischen Vierecke $A_1A_2A_4A_3$ eine Δ_2-Schar ist. Das kommt zum Beispiel im Falle $\omega_1^4 = 0$ in Erwägung (Jede der Formen ω_4^1, ω_2^3, ω_3^2 ist nicht für alle betrachteten Werte der Parameter gleich Null.) Nach (16) gilt dann:

$$(18)\qquad d\begin{pmatrix}\varrho_1\\ \sigma_1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\varrho_1\\ \sigma_1\end{pmatrix}^2 u_1^4 du + u_4^1 du = 0\,.$$

Die Gleichung (18) ist die Riccatische Differentialgleichung für die Unbekannte $\begin{pmatrix}\varrho_1\\ \sigma_1\end{pmatrix}$. Jede ihrer Lösungen bestimmt auf der Fläche Ω_1 den geometrischen Ort der Eckpunkte M_1 der involutorischen Vierecke, die im allgemeinen von Typus Δ_2 sind. Weitere Eckpunkte finden wir nach (17), (3). Ähnlich kann man weitere Fälle betrachten.

Im folgenden untersuchen wir die Bedingungen, nach welchen die Schar der Vierecke $A_1A_2A_4A_3$ eine Δ_3-Schar ist. Das kommt zum Beispiel im Falle $\omega_1^4 = 0$, $\omega_2^3 = 0$ in Erwägung. (Jede der Formen ω_4^1, ω_3^2 ist nicht für alle betrachteten Werte der Parameter gleich Null.) Nach (16) bekommen wir dann:

$$(19)\qquad d\begin{pmatrix}\varrho_1\\ \sigma_1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\varrho_1\\ \sigma_1\end{pmatrix}^2 u_1^4 du + u_4^1 du = 0\,,\quad d\begin{pmatrix}\varrho_2\\ \sigma_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\varrho_2\\ \sigma_2\end{pmatrix}^2 u_2^3 du + u_3^2 du = 0\,.$$

Nach (17) folgt:

$$
(20) \qquad d\begin{pmatrix}\varrho_1\\ \sigma_1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\varrho_1\\ \sigma_1\end{pmatrix}^2 u_1^4 du + u_4^1 du = 0\,,
$$

$$
d\begin{pmatrix}\varrho_1 u_1^2\\ \sigma_1 u_4^3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\varrho_1 u_1^2\\ \sigma_1 u_4^3\end{pmatrix}^2 u_2^3 du + u_3^2 du = 0\,.
$$

Die A_3-Schar der Vierecke $A_1A_2A_4A_3$ kann nur im Falle der gemeinsamen Lösung der Riccatischen Differentialgleichungen (20) existieren. Ähnlich kann man die anderen Fälle der A_3-Scharen der Vierecke $A_1A_2A_4A_3$ betrachten.

Ähnlicherweise untersuchen wir die Möglichkeit der Existenz der A_4-Schar der Vierecke $A_1A_2A_4A_3$. Es handelt sich immer um die gemeinsame Lösung des Systems der Riccatischen Differentialgleichungen.

Satz 2. *Betrachten wir die Rosenfeldschen Bilder des Geradenpaares (M_1, M_2) (M_4, M_3), die zu den gegenüberliegenden Seiten der involutorischen Vierecke der V Schar des involutorischen Paares P gehören. Diese Geraden bilden eine zweiparametrische Schar der Geraden im Kleinschen Raum P_5. Für den festen Wert $u = u_0 \in I$ gehen diese Geraden durch einen festen Punkt R. Ähnlich bilden die Rosenfeldschen Bilder der Geraden (M_2, M_4), (M_3, M_1) auch eine zweiparametrische Schar. Für $u = u_0 \in I$ gehen diese Geraden durch einen festen Punkt $\bar{R}$. Die Punkte R, $\bar{R}$ liegen auf der Verbindungsgeraden der Kleinschen Bilder S, $\bar{S}$ von Geraden s, $\bar{s}$. Die Geraden s, $\bar{s}$ sind die Verbindungsgeraden* (für $u = u_0 \in I$) *der Quasifleknodalpunkte der Flächen Ω_1, Ω_2. Diese Verbindungsgeraden s, $\bar{s}$ sind keine Quasifleknodalgeraden. Die Punkte S, $\bar{S}$, R, $\bar{R}$ haben die harmonische Lage.*

Beweis. Setzen wir voraus, daß das Koordinatentetraeder so gewählt ist, daß die Relationen (10) gelten. Für die Quasifleknodalpunkte des Paares P gilt dann nach (6a), (6b):

$$
u_2^4 u_1^2 [\varrho_1]^2 = u_3^1 u_4^3 [\sigma_1]^2,
$$

$$
u_4^3 u_2^4 [\varrho_3]^2 = u_1^2 u_3^1 [\sigma_3]^2
$$

Wir bekommen leicht die Quasifleknodalpunkte des Paares

$$
(u_3^1 u_4^3)^{\frac{1}{2}} A_1 \pm (u_2^4 u_1^2)^{\frac{1}{2}} A_4\,, \quad (u_1^2 u_3^1)^{\frac{1}{2}} A_2 \pm (u_4^3 u_2^4)^{\frac{1}{2}} A_3\,.
$$

Die Quasiflenodalgeraden des Paares sind die Verbindungsgeraden der angeführten Punkte (für $u = u_0 \subset I$) immer mit dem gleichen Vorzeichen. Betrachten wir die übrigen Verbindungsgeraden der Quasifleknodalpunkte. Für die Kleinschen Bilder S, $\bar{S}$ solcher Geraden s, $\bar{s}$ gilt dann:

$$
(21) \quad S = (u_1^2 u_4^3)^{\frac{1}{2}} [u_3^1 (A_1, A_2) + u_2^4 (A_3, A_4)] \quad (u_2^4 u_3^1)^{\frac{1}{2}} [u_4^3 (A_1, A_3) + u_1^2 (A_2, A_4)]
$$

(21b) $\bar{S} = (u_1^2 u_4^3)'[u_3^1(A_1, A_2) + u_2^4(A_3, A_4)] + (u_2^4 u_3^1)'[u_4^3(A_1, A_3) + u_1^2(A_2, A_4)]$.

Die Geraden (M_1, M_2) haben nach (3) folgende Bilder im Kleinschen Raum:

(22a) $$T_{12} = \varrho_1\varrho_2(A_1, A_2) + \varrho_1\sigma_2(A_1, A_3) - \varrho_2\sigma_1(A_2, A_4) - \sigma_1\sigma_2(A_3, A_4) \, .$$

Ähnlich bekommen wir die Kleinschen Bilder der Geraden (M_4, M_3):

(22b) $$T_{43} = \varrho_3\varrho_4(A_1, A_2) + \varrho_4\sigma_3(A_1, A_3) - \varrho_3\sigma_4(A_2, A_4) - \sigma_3\sigma_4(A_3, A_4) \, .$$

Bemerken wir noch, daß die Parameter ϱ_i, σ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, in den Relationen (22a), (22b) durch die Gleichungen (17) verbunden sind.

Im Kleinschen Raum betrachten wir den Punkt

(23) $$R = u_3^1(A_1, A_2) + u_2^4(A_3, A_4) \, .$$

Dieser Punkt liegt auf der Verbindungsgeraden der Punkte S, $\bar{S}$ (immer für den gleichen Wert des Parameters u). Die Rosenfeldschen Bilder des Paares (M_1, M_2), (M_4, M_3) sind die Verbindungsgeraden der Punkte T_{12}, T_{43} (immer für den gleichen Wert des Parameters u). Jetzt finden wir die Bedingung, unter welcher die angeführten Rosenfeldschen Bilder für den festen Wert $u_0 \in I$ durch den festen Punkt R gehen. Nach (22a), (22b), (23) bekommen wir in diesem Falle:

(24a) $$\varrho_1\varrho_2 K_1 + \varrho_3\varrho_4 K_2 = u_3^1 \, ,$$

(24b) $$-\sigma_1\sigma_2 K_1 - \sigma_3\sigma_4 K_2 = u_2^4 \, ,$$

(24c) $$\varrho_1\sigma_2 K_1 + \varrho_4\sigma_3 K_2 = 0 \, ,$$

(24d) $$-\varrho_2\sigma_1 K_1 - \varrho_3\sigma_4 K_2 = 0 \, ,$$

$$K_1 = K_1(u, \varrho_i, \sigma_i) \, , \quad K_2 = K_2(u, \varrho_i, \sigma_i) \, , \quad i = 1, 2, 3, 4 \, .$$

Die Gleichungen (24c), (24d) sind linear abhängig. Das folgt aus den Gleichungen (17b), (17d). Aus den Gleichungen (24c), (24d) bekommen wir nach (17):

(25) $$K_1 = -\varkappa\varrho_4\sigma_3 u_1^2 = -\bar{\varkappa}\varrho_3\sigma_4 u_4^3 \, , \quad K_2 = \varkappa\varrho_1\sigma_2 u_1^2 = \bar{\varkappa}\varrho_2\sigma_1 u_4^3 \, ,$$

$$\varkappa = \varkappa(u, \varrho_i, \sigma_i) \, , \quad \bar{\varkappa} = \bar{\varkappa}(u, \varrho_i, \sigma_i) \, , \quad i = 1, 2, 3, 4 \, .$$

Die linken Seiten der Gleichungen (24c), (24d) sind nach (17) in den folgenden Fällen identisch gleich Null:

(26) $$\sigma_1 = \sigma_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = 0 \, ,$$

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0 \, .$$

Im ersten Fall bekommen wir nach (24a), (24b):

$$K_1 = \frac{u_3^1}{\varrho_1\varrho_2}, \quad K_2 = -\frac{u_2^4}{\sigma_3\sigma_4}.$$

Im zweiten Falle bekommen wir

$$K_1 = \frac{u_2^4}{\sigma_1\sigma_2}, \quad K_2 = \frac{u_3^1}{\varrho_3\varrho_4}.$$

In den beiden Fällen sind T_{12}, T_{43} die geometrischen Punkte (A_1, A_2), (A_3, A_4) (im zweiten Falle im umgekehrten Sinne); nach (23) liegt der Punkt R auf ihrer Verbindungsgeraden. Diesen Fall betrachten wir im folgenden nicht.

Die Größen K_1, K_2 (nach (25)) kann man in die Gleichungen (24a), (24b) einsetzen. Mit Hilfe der Gleichungen (17) bekommt man in den beiden Fällen folgende Relation:

$$\sigma_2\sigma_3\varkappa u_1^2[-\varrho_1\sigma_4 + \varrho_4\sigma_1] = u_2^4 .$$

Daraus kann man die Größe $\varkappa$ berechnen und in die Gleichungen (25) einsetzen.

Man muß noch den Fall

$$-\varrho_1\sigma_4 + \varrho_4\sigma_1 = 0$$

behandeln. In diesem Falle fallen nach (3) die Punkte T_{12}, T_{43} zusammen, ihre Verbindungsgerade ist nicht definiert. Wenn wir diesen trivialen Fall ausschließen, dann gehen alle Verbindungsgeraden der Punkte T_{12}, T_{43} bei dem festen Werte des Parameters u (auch in den Fällen (26)) durch einen festen Punkt R. Die Gleichungen (24) sind für K_1, K_2 immer lösbar.

Ähnlich kann man berechnen, daß für den festen Wert $u = u_0 \in I$ die Verbindungsgerade der Kleinschen Bilder von Geraden (M_2, M_4), (M_3, M_1) durch den festen Punkt

$$\bar{R} = u_4^3(A_1, A_3) + u_1^2(A_2, A_4) \tag{27}$$

gehen.

Nach (21a), (21b), (23), (27) haben die Punkte S, $\bar{S}$, R, $\bar{R}$ die harmonische Lage.

b) Wir finden nun alle involutorischen Paare der Regelflächen mit der gegebenen reellen Quasifleknodalfläche Φ und mit den auf ihr liegenden gegebenen Quasifleknodalkurven. Die Erzeugenden $p(u)$ der Fläche Φ seien für keinen Wert von $u \in I$ torsal. Setzen wir weiter voraus, daß die auf der Fläche Φ liegenden Quasifleknodalpunkte de Paares für keinen Wert von $u \in I$ zusammenfallen. Die Koordinaten der erwähnten Quasifleknodalkurven $A_1(u)$, $A_3(u)$ seien die Funktionen des Parameters $u \in I$ der Differentialklasse C^4.

Im Raum P_3 betrachten wir weiter ein Koordinatentetraeder mit den Eckpunkten auf den Kurven $A_1(u)$, $A_2(u)$, $A_3(u)$, $A_4(u)$. Nach der Voraussetzung gilt:

$$(A_4, A_3, A_4', A_3') \neq 0$$

für alle Werte von $u \in I$; die Striche bedeuten die Ableitungen nach u. Daraus bekommen wir dann:

$$(28) \qquad \begin{aligned} A_4'' &= \alpha_{11}A_4 + \alpha_{12}A_3 + \beta_{11}A_4' + \beta_{12}A_3' ,\\ A_3'' &= \alpha_{21}A_4 + \alpha_{22}A_3 + \beta_{21}A_4' + \beta_{22}A_3' , \end{aligned}$$

wo $\alpha_{ik} = \alpha_{ik}(u)$, $\beta_{ik} = \beta_{ik}(u)$, $i, k = 1, 2$, gilt. Die Punkte A_1, A_2 wählen wir in den Tangentialebenen in den zugehörigen (d. h. für den gleichen Wert des Parameters u) Punkten A_4, A_3. Man kann die Umnormung (siehe [4]) der Eckpunkte A_1, A_2 so wählen, daß

$$(29) \qquad \begin{aligned} A_1 &= c_1A_4 + c_2A_3 + 2A_4' ,\\ A_2 &= c_3A_4 + c_4A_3 + 2A_3' \end{aligned}$$

gilt. In den Gleichungen (29) ist $c_i = c_i(u)$, $i = 1, 2, 3, 4$, die Funktion der Differentialklasse C^2.

Wenn für einen festen Wert $u_0 \in I$ die Relation $c_2 = -\beta_{12}$ gilt, dann ist die Gerade $(A_4(u_0), A_1(u_0))$ die asymptotische Tangente der Fläche Φ im Punkte $A_4(u_0)$; wenn für $u = u_0 \in I$ die Relation $c_3 = \beta_{21}$ gilt, dann ist die Gerade $(A_3(u_0), A_2(u_0))$ die asymptotische Tangente der Fläche Φ im Punkte $A_3(u_0)$.

Die differentielle Verrückung des Koordinatentetraeders ist durch die Gleichungen

$$(30) \qquad dA_i = \omega_i^k A_k = u_i^k du A_k \quad \text{(nach } k \text{ addieren)}$$

gegeben. Aus den Gleichungen (29), (30) bekommen wir dann leicht:

$$(31) \quad \omega_1^2 = \tfrac{1}{2}(c_2 + 2\beta_{12})du,\ \omega_2^1 = \tfrac{1}{2}(c_3 - 2\beta_{21})du,\ \omega_3^4 = \tfrac{1}{2}c_3du,\ \omega_4^3 = \tfrac{1}{2}c_2du,$$
$$\omega_3^1 = \omega_4^2 = 0 .$$

Weiter betrachten wir nur diejenigen Flächen $\Omega_1 = (A_1, A_4)$, $\Omega_2 = (A_2, A_3)$, die im Intervall I keine Torsalerzeugenden haben, es gilt dann:

$$c_2(c_2 + 2\beta_{12}) \neq 0 , \quad c_3(c_3 - 2\beta_{21}) \neq 0 .$$

Satz 3. *Alle involutorischen Paare der Flächen Ω_1, Ω_2 mit der gegebenen Quasifleknodalfläche Φ und mit den gegebenen Quasifleknodalkurven $A_4(u)$, $A_3(u)$ bilden im allgemeinen die Menge, die von einem Parameter abhängt. Wenn die*

Fläche Ω_1 durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ gebildet ist, dann bilden die Flächen Ω_1, Ω_2 ein involutorisches Paar genau in dem Falle, wenn $A_3(u)$ die asymptotische Kurve der Fläche Φ ist. Es gibt dann unendlich viele solcher Paare.

Ein ähnlicher Satz gilt auch für den Fall, daß Ω_2 durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ gebildet wird

Beweis. Nach (7), (31) bekommen wir die Bedingung für das involutorische Paar der Flächen Ω_1, Ω_2

$$(32) \qquad c_2 c_3 \quad \beta_{21} c_2 + \beta_{12} c_3 \quad 2\beta_{12}\beta_{21} \quad 0\,.$$

Zwischen den Größen c_2, c_3, die die Lage der Erzeugenden der Flächen Ω_1, Ω_2 bestimmen, besteht nach (32) eine bilineare Relation. Wenn wir eine dieser Größen als eine beliebige Funktion des Parameters u wählen, dann kann man schon die zweite Größe nach (32) linear berechnen.

Betrachten wir noch folgende Fälle:

$$c_2 \quad \beta_{12}, \quad c_3 - \beta_{21}\,.$$

Setzen wir die Gültigkeit der ersten Relation für alle Werte von $u \in I$ voraus Dann wird die Fläche Ω_1 durch die asymptotischen Tangenten der Fläche Φ längs der Kurve $A_3(u)$ gebildet. Die Relation (32) gilt dann nur im Falle

$$\beta_{12} \cdot \beta_{21} \quad 0\,.$$

Im Falle $\beta_{12} \quad 0$ ist die Fläche Ω_1 eine Torse; diesen Fall schließen wir aus Im Falle $\beta_{21} \quad 0$ ist die Kurve $A_3(u)$ die asymptotische Kurve der Fläche Φ man kann dann die Größe c_3 beliebig wählen. (Die Fläche Ω_2 soll nach der Voraussetzung im Intervall I keine Torsalerzeugenden haben.)

Ähnlich kann man auch den Fall $c_3 \quad \beta_{21}$ betrachten.

Die gleichzeitige Gültigkeit der Relationen $c_2 \quad - \beta_{12}$, $c_3 \quad \beta_{21}$ im Punkte $u \quad u_0 \in I$ ist nicht möglich; in diesem Falle gilt nämlich (nach (32)) $c_2 \quad 0$ oder $c_3 \quad 0$, d. h. die Fläche Ω_1, bzw. die Fläche Ω_2 hat für $u \quad u_0$ eine Torsalerzeugende.

Satz 4. *Betrachten wir das involutorische Paar der Regelflächen Ω_1, Ω_2 mit der gegebenen Quasifleknodalfläche Φ. Die Kurven (A_4), (A_3) der Fläche Φ seien die Quasifleknodalkurven des Paares. Setzen wir voraus, daß die Erzeugenden der Flächen Ω_1, Ω_2 für keinen Wert $u - u_0 \in I$ die asymptotischen Kurven der Fläche Φ berühren. D sei das Doppelverhältnis der Tangente der Kurve (A_4), der zu der Kurve (A_4) konjugierten Tangente der Fläche Φ, der Erzeugenden der Fläche Φ und der Erzeugenden der Fläche Ω_1 (für $u \quad u_0$). Weiter sei D das Doppelverhältnis der Tangente der Kurve (A_3), der zu der Kurve (A_3) konjugierten Tangente der Fläche Φ, der Erzeugenden der Fläche Ω_2 und der Erzeugenden der Fläche Φ (für $u \quad u_0$) Dann gilt für alle Werte von $u \in I$: $D \quad D$*

Beweis. Die asymptotische Tangente der Fläche Φ im Punkte A_4 ist durch die Punkte A_4, $\beta_{12}A_3 + 2A'_4$ bestimmt; zur Tangente (A_4, A'_4) ist die Gerade $(A_4, -2\beta_{12}A_3 + 2A'_4)$ auf der Fläche Φ konjugiert. Die asymptotische Tangente der Fläche Φ im Punkte A_3 ist durch die Punkte A_3, $\beta_{21}A_4$ $2A'_3$ bestimmt. Zur Tangente (A_3, A'_3) ist auf der Fläche Φ die Gerade $(A_3, 2\beta_{21}A_4 - 2A'_3)$ konjugiert. Nach (29) gilt dann für alle Werte von $u \in I$ folgende Relation:

$$D = \frac{c_2 + 2\beta_{12}}{c_2}.$$

Ähnlich gilt für alle Werte von $u \in I$:

$$\bar{D} = \frac{c_3}{c_3 - 2\beta_{21}}.$$

Wenn das betrachtete Paar involutorisch ist, dann und nur dann gilt nach (32) für $u \in I$:

$$D = \bar{D}.$$

LITERATUR

[1] Cartan E., *Sur les développantes d'une surface réglée*, Bull. Acad. roumaine *14* (1931), 167–174.

[2] Фиников С. П., *Теория пар конгруэнций*,

[3] Ивлев Е Т., *О паре линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве*, труды томского гос. унив. *161* (1962), 3 12.

[4] Vala J., *Über die Regelflächenpaare mit einer nicht abwickelbaren Quasificknodalfläche*, Czech. Math. Journal 18(93) 1968, 527—559.

Eingegangen am. 3. 1. 1968.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
stavební fakulty Vysokého učení technického
Brno