Bohdan Zelinka

Rozklad úplného grafu podle dané grupy

Matematický časopis, Vol. 17 (1967), No. 3, 234--239

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126940`

Matematický časopis 17 (1967), No. 3

ROZKLAD ÚPLNÉHO GRAFU PODLE DANÉ GRUPY

BOHDAN ZELINKA, Liberec

Práce [2], [3], [4] a [5] pojednávají o rozkladu úplného grafu na dva, případně čtyři navzájem isomorfní hranově disjunktní podgrafy. Budeme tuto otázku zkoumat obecněji. Jde o rozklady úplného grafu na určitý (konečný nebo nekonečný) počet navzájem isomorfních podgrafů, přičemž je splněna určitá podmínka:

Podmínka $\boldsymbol{P}$: *Je-li $\langle n \rangle$ úplný graf o n uzlech, který je rozložen na určitý počet navzájem isomorfních podgrafů, z nichž každý obsahuje všechny uzly grafu $\langle n \rangle$ a žádné dva nemají společnou hranu, jsou-li G_1, G_2, G_3 tři z těchto grafů a je-li φ takový automorfismus grafu $\langle n \rangle$, který převádí G_1 v G_2, pak obrazem grafu G_3 ve zobrazení φ je opět graf náležející popsanému rozkladu.*

Zkoumejme nyní vlastnosti takovéhoto rozkladu (označme jej $\mathscr{R}$). Buďtež G_0, G_1, G_2 podgrafy náležející rozkladu $\mathscr{R}$ a φ_1, φ_2 automorfismy grafu $\langle n \rangle$, které převádějí graf G_0 po řadě v grafy G_1, G_2. Protože $\varphi_2(G_0) = G_2$ a φ_1 je automorfismus grafu $\langle n \rangle$, je $\varphi_1(G_2) = \varphi_1\varphi_2(G_0)$. Graf $G_3 = \varphi_1(G_2)$ musí podle podmínky $\boldsymbol{P}$ náležet rozkladu $\mathscr{R}$. Jestliže tedy graf G_0 rozkladu $\mathscr{R}$ lze převést automorfismy φ_1, φ_2 grafu $\langle n \rangle$ v grafy rozkladu $\mathscr{R}$, pak jej lze převést v graf rozkladu $\mathscr{R}$ i složeným automorfismem $\varphi_1\varphi_2$. Dále identickým automorfismem ε grafu $\langle n \rangle$ je každý graf rozkladu $\mathscr{R}$ převeden sám v sebe. Konečně nechť opět G_0, G_1 jsou grafy rozkladu $\mathscr{R}$ a $G_1 = \varphi_1(G_0)$. Pak $G_0 = \varphi^{-1}(G_1)$ a podle podmínky $\boldsymbol{P}$ také graf $\varphi^{-1}(G_0)$ náleží rozkladu $\mathscr{R}$. Došli jsme tedy k tomuto výsledku (důkaz postačující podmínky je triviální):

Rozklad $\mathscr{R}$ grafu $\langle n \rangle$ splňuje podmínku $\boldsymbol{P}$ právě tehdy, jestliže existuje podgrupa H grupy automorfismů grafu $\langle n \rangle$ taková, že je-li G_0 libovolný graf rozkladu $\mathscr{R}$ a α libovolný prvek grupy H, pak $\alpha(G_0)$ je grafem rozkladu $\mathscr{R}$ a každý graf rozkladu $\mathscr{R}$ lze vyjádřit jako $\alpha(G_0)$ pro nějaké $\alpha \in H$.

Rozklad $\mathscr{R}$ budeme nazývat rozkladem grafu $\langle n \rangle$ podle grupy H. Je-li přiřazení grafů $\alpha(G_0)$ zobrazením $\alpha \in H$ vzájemně jednoznačné, mluvíme o jednoduchém rozkladu grafu $\langle n \rangle$ podle grupy H.

Dokážeme nyní větu.

Věta 1. *Budiž $\mathcal{R}$ jednoduchý rozklad grafu $\langle n \rangle$ podle Abelovy grupy H, budiž K podgrupa grupy H. Pak existuje jednoduchý rozklad $\mathcal{R}'$ grafu $\langle n \rangle$ podle faktorgrupy H/K, který je zákrytem rozkladu $\mathcal{R}$.*

Důkaz. Je-li G_0 jeden z grafů rozkladu $\mathcal{R}$, pak všechny ostatní grafy rozkladu $\mathcal{R}$ lze vyjádřit jako $\alpha(G_0)$, kde $\alpha \in H$. Budiž $G_0' = \bigcup_{\beta \in K} \beta(G_0)$. Pro každé $\alpha \in H$ je pak $\alpha(G_0) = \bigcup_{\beta \in K} \alpha\beta(G_0) = \bigcup_{\gamma \in \alpha K} \gamma(G_0)$. Pro libovolné prvky α_1, α_2 z H jsou tedy grafy $\bigcup_{\gamma \in \alpha_1 K} \gamma(G_0)$, $\bigcup_{\gamma \in \alpha_2 K} \gamma(G_0)$ navzájem isomorfní a buď totožné, nebo hranově disjunktní, neboť grafy $\gamma(G_0)$ jsou pro různá γ disjunktní a jestliže současně $\gamma \in \alpha_1 K$, $\gamma \in \alpha_2 K$, pak $\gamma \in \alpha_1 K \cap \alpha_2 K$, tedy $\alpha_1 K \cap \alpha_2 K \neq \emptyset$, z čehož plyne $\alpha_1 K = \alpha_2 K$, jak je známo z teorie grup. Grafy $\bigcup_{\gamma \in \alpha K} \gamma(G_0)$ pro všechny navzájem různé třídy αK tedy tvoří hledaný rozklad.

V dalším budeme užívat pro G_0 označení $G(\varepsilon)$, kde ε je jednotkový prvek grupy H a pro $\alpha(G_0)$ označení $G(\alpha)$.

Vyslovíme nyní dvě existenční věty. Omezíme se ve svých úvahách pouze na Abelovy grupy, neboť tyto grupy lze rozložit na direktní součin primárních cyklických podgrup, což obecně u grupy nelze.

Věta 2. *Budiž $\langle n \rangle$ konečný úplný graf o n uzlech, budiž H Abelova grupa. Nutnou a postačující podmínkou existence jednoduchého rozkladu $\mathcal{R}$ grafu $\langle n \rangle$ podle grupy H je, aby H byla konečná a její řád m byl dělitelem čísla n nebo $\frac{1}{2}(n - 1)$ při n lichém a dělitelem čísla $\frac{1}{2}n$ nebo $n - 1$ při n sudém a byl lichý.*

Důkaz. Graf $\langle n \rangle$ obsahuje $\frac{1}{2}n(n - 1)$ hran, každá z těchto hran musí být obsažena právě v jednom grafu rozkladu $\mathcal{R}$ a všechny grafy rozkladu $\mathcal{R}$ musí být navzájem izomorfní, musí mít tedy stejný počet hran. Každý z těchto grafů musí tedy obsahovat $n(n - 1)/2m$ hran, což musí být celé číslo, a proto $\frac{1}{2}n(n - 1)$ musí být dělitelné číslem m.

Budiž nejprve n liché. Čísla n a $n - 1$ se liší o jednotku, jsou tedy nesoudělná. Tím spíše jsou nesoudělná čísla n a $\frac{1}{2}(n - 1)$. Je-li m dělitelem čísla $\frac{1}{2}n(n - 1)$, znamená to, že m je součinem dvou čísel m_1 a m_2 takových, že m_1 je dělitelem n a m_2 je dělitelem $\frac{1}{2}(n - 1)$, čísla m_1, m_2 jsou zřejmě nesoudělná. Konečnou Abelovu grupu lze vyjádřit jako direktní součin cyklických primárních podgrup [1]. Řády prvků z H jsou děliteli m, tedy buď děliteli m_1, nebo děliteli m_2. Budiž H_1 (resp. H_2) direktní součin primárních podgrup grupy H odpovídajících prvočinitelům čísla m_1 (resp. m_2); zřejmě H je direktním součinem grup H_1 a H_2 a grupa H_1 (resp. H_2) má řád m_1 (resp. m_2). Dokážeme, že alespoň jedna z grup H_1 a H_2 je jednoprvková, tedy buď $m_1 = 1$, nebo $m_2 = 1$.

Existuje-li rozklad $\mathcal{R}$ grafu $\langle n \rangle$ podle grupy H, existuje podle věty 1 rozklad $\mathcal{R}'$ grafu $\langle n \rangle$ podle grupy $H_1 \cong H/H_2$. Nechť $m_1 > 1$ a budiž u uzel grafu $n\rangle$, který není samodružný ve všech zobrazeních z grupy H_1. (Je-li

$n \geqq 2$, $m_1 > 1$, musí takovýto uzel existovat, neboť uzel samodružný ve všech zobrazeních z H může být nejvýše jeden; kdyby byly dva, byly by samodružná i hrana je spojující, což nelze.) Existuje tedy $\alpha \in H_1$ tak, že $\alpha(u) = v \neq u$. Existuje-li současně nějaké zobrazení $\beta \in H_1$ takové, že $\beta(u) = u$, pak $\beta(v) = \beta\alpha(u) = \alpha\beta(u) = \alpha(u) = v$. Tedy hrana uv je samodružná ve zobrazení β a náleží-li nějakému grafu $G'(\gamma)$ rozkladu $\mathscr{R}$, náleží současně i grafu $G'(\beta\gamma)$, tedy $G'(\gamma) = G'(\beta\gamma)$, z čehož plyne $\beta = \varepsilon$, kde ε je jednotkový prvek grupy H. Pro všechna zobrazení $\gamma \in H_1, \gamma \neq \varepsilon$, tedy $\gamma(u) \neq u$. Rovněž je $\gamma(u) \neq \delta(u)$ pro $\gamma \neq \delta$, neboť z rovnosti $\gamma(u) = \delta(u)$ plyne $u = \gamma^{-1}\delta(u)$, tedy $\gamma^{-1}\delta = \varepsilon$, z čehož plyne $\gamma = \delta$. Ke každému uzlu grafu $\langle n \rangle$, který není samodružný ve všech zobrazeních z grupy H, tedy existuje množina uzlů, které jsou jeho obrazy ve zobrazeních z H, jejíž mohutnost je m_1. Přitom dvě takovéto množiny buď splývají, nebo jsou disjunktní. Existuje tedy systém n/m_1 takovýchto množin, označme jej $\mathscr{A}$, a neexistuje samodružný uzel ve všech zobrazeních z H. Budiž $u \in A \in \mathscr{A}$ a budiž $\xi \in H_2$. Nechť uzel $w = \xi(u) \in B \in \mathscr{A}$. Je-li uzel $v \in A$, pak $v = \alpha(u)$, kde $\alpha \in H_1$. Uzel $\xi(v) = \xi\alpha(u) = \alpha\xi(u) = \alpha(w)$ a poněvadž $w \in B$, je také tento uzel v B. Analogicky bychom dokázali, že obrazem každého uzlu z B ve zobrazení ξ^{-1} je uzel z A. Je tedy $\xi(A) = B$. Předpokládejme $B = A$. Pak $w = \xi(u) = \beta(u)$ pro nějaké $\beta \in H_1$. Je-li x libovolný uzel z A, pak $x = \gamma(u)$ pro nějaké $\gamma \in H_1$, tedy $\xi(x) = \xi\gamma(u) = \gamma\xi(u) = \gamma\beta(u) = \beta\gamma(u) = \beta(x)$. Na množině A tedy zobrazení β a ξ splývají. Je-li h hrana spojující dva uzly z A, pak h patří grafu $G(\delta)$ pro nějaké $\delta \in H$. Hrana $\beta(h) = \xi(h)$ náleží současně grafům $G(\beta\delta)$ a $G(\xi\delta)$, což znamená $\beta\delta = \xi\delta$, tedy $\beta = \xi$. Protože však $\beta \in H_1$, $\xi \in H_2$, může tato rovnost nastat pouze pro $\xi = \varepsilon$ a tedy $\xi(A) = A$ pouze tehdy, je-li $\xi = \varepsilon$. Pak ovšem také $\xi(A) \neq \eta(A)$ pro $\xi \in H_2, \eta \in H_2, \xi \neq \eta$. Ke každému $A \in \mathscr{A}$ tedy existuje podsystém systému $\mathscr{A}$ takový, jehož všechny množiny jsou obrazy množiny A ve zobrazeních z H_2, tento systém obsahuje m_2 množin. Pro různá A tyto podsystémy zřejmě buď splývají, nebo jsou disjunktní. Takovéto systémy tedy tvoří rozklad systému $\mathscr{A}$ na n/m_1m_2 podsystémů. Pak ovšem $n\ m_1m_2$ musí být celé číslo, což může nastat pouze tehdy, je-li $m_2 = 1$, neboť m_2 musí být současně dělitelem čísel n a $n - 1$. Z předpokladu $m_1 > 1$ nám vyplynulo $m_2 = 1$, tedy musí být buď $m_1 = 1$, nebo $m_2 = 1$.

Nechť nyní n je sudé. Analogicky dokážeme, že m je součinem dvou čísel $\tilde{m}_1$ a $\tilde{m}_2$, kde $\tilde{m}_1$ je dělitelem čísla $n - 1$ a $\tilde{m}_2$ je dělitelem čísla $\frac{1}{2}n$. Tedy grupu H lze vyjádřit jako direktní součin grupy $\tilde{H}_1$ řádu $\tilde{m}_1$ s grupou $\tilde{H}_2$ řádu $\tilde{m}_2$. Existuje rozklad $\mathscr{R}''$ grafu $\langle n \rangle$ podle grupy $\tilde{H}_1 \cong H/\tilde{H}_2$. Nechť $\tilde{m}_1 > 1$. Analogicky rozkladu $\mathscr{A}$ při n lichém dokážeme existenci rozkladu $\tilde{\mathscr{A}}$ množiny uzlů grafu $\langle n \rangle$ na $(n - 1)/\tilde{m}_1 + 1$ disjunktních podmnožin, z nichž $(n - 1)/\tilde{m}_1$ množin má mohutnost $\tilde{m}_1$ a jedna má mohutnost 1 (množina vytvořená uzlem samodružným ve všech zobrazeních z H_1). Analogicky dokážeme, že pro $A \in \tilde{\mathscr{A}}$, $\xi \in \tilde{H}_2$ opět $\xi(A) \in \tilde{\mathscr{A}}$. Dále uzel v samodružný ve všech zobrazeních z $\tilde{H}_1$ je samodružný také ve všech zobrazeních z $\tilde{H}_2$. Je-li totiž $\alpha \in \tilde{H}_1$, $\xi \in \tilde{H}_2$, pak $\alpha\xi(v) = \xi\alpha(v) = \xi(v)$ a tedy uzel $\xi(v)$ je rovněž samodružný v libovolném zobrazení z $\tilde{H}_1$. Je-li $\tilde{m}_1 > 1$, existuje $\alpha \in \tilde{H}_1$, $\alpha \neq \varepsilon$ a hrana spojující uzly v, $\xi(v)$ by byla samodružná ve zobrazení α, což nelze. Při $\tilde{m}_1 > 1$ tedy v je samodružný ve všech zobrazeních z H.

Analogicky jako pro $\mathscr{A}$ pak dokážeme, že existuje rozklad systému $\tilde{\mathscr{A}} - \{\{v\}\}$ na disjunktní podsystémy, z nichž každý má mohutnost m_2; těchto podsystémů je tedy $(n - 1)/\tilde{m}_1\tilde{m}_2$, tudíž $\tilde{m}_2 = 1$. Je tedy opět buď $\tilde{m}_1 = 1$, nebo $\tilde{m}_2 = 1$.

Je-li m sudé, musí H obsahovat alespoň jeden prvek δ řádu 2. Je-li u uzel grafu $\langle n \rangle$ a $v = \delta(u)$, pak také $u = \delta(v)$. Hrana h spojující uzly u a v je samodružná v zobrazení δ a patří-li do $G(\alpha)$ pro nějaké $\alpha \in H$, patří také do $G(\delta\alpha)$, přičemž $\alpha \neq \delta\alpha$, neboť δ je řádu 2, tudíž $\delta \neq \varepsilon$. Neexistuje tedy hledaný jednoduchý rozklad $\mathscr{R}$. Tím je dokázaná podmínka nutná.

Nechť nyní n je liché a m je dělitelem n. Rozložíme množinu uzlů grafu $\langle n \rangle$ na n/m disjunktních množin $A_1, A_2, \ldots, A_{n/m}$, z nichž každá má m uzlů. Pro každé přirozené $j \leqq n/m$ přiřaďme každému prvku $\alpha \in H$ uzel $u_j(\alpha) \in A_j$. Pro každé zobrazení $\beta \in H$ potom definujme $\beta(u_j(\alpha)) = u_j(\beta\alpha)$. Zvolíme libovolnou hranu h_1 a zařadíme ji do $G(\varepsilon)$. Pak $\alpha(h_1)$ zařadíme do $G(\alpha)$ pro každé $\alpha \in H$ a dostáváme tak po jedné hraně z každého grafu rozkladu $\mathscr{R}$. Zvolíme pak hranu h_2, která není dosud nikam zařazena, zařadíme ji do $G(\varepsilon)$ a hranu $\alpha(h_2)$ pro libovolné $\alpha \in H$ zařadíme do $G(\alpha)$. Toto provedeme celkem n/m-krát, až vyčerpáme všechny hrany grafu $\langle n \rangle$. Sestrojený rozklad je zřejmě hledaným rozkladem $\mathscr{R}$. Nechť n je sudé a m je dělitelem $n - 1$. Množinu uzlů grafu $\langle n \rangle$ nyní rozložíme na $(n - 1)/m + 1$ disjunktních podmnožin $A_0, A_1, \ldots, A_{(n-1)/m}$, kde A_0 se skládá z jediného uzlu v a každá z množin $A_1, A_2, \ldots, A_{(n-1)/m}$ z m uzlů. Zavedeme označení $u_j(\alpha)$ pro $1 \leqq j \leqq (n - 1)/m$, $\alpha \in H$ analogicky prvnímu případu. Pro každé zobrazení $\beta \in H$ definujeme $\beta(u_j(\alpha)) = u_j(\beta\alpha)$, $\beta(v) = v$. Pak postupujeme opět analogicky prvnímu případu. V případě, že n je sudé a m je dělitelem $\frac{1}{2}n$, postupujeme analogicky prvnímu případu (n liché a m dělí n), v případě, že n je liché a m je dělitelem $\frac{1}{2}(n - 1)$, postupujeme analogicky druhému přlpadu (n sudé a m dělí $n - 1$). Ve všech případech ovšem uvažujeme m liché, jak to předpisuje podmínka věty.

Nyní vyslovíme větu pro nekonečné grafy.

Věta 3. *Budiž $\langle \mathfrak{n} \rangle$ úplný graf o $\mathfrak{n}$ uzlech, kde $\mathfrak{n} \geqq \aleph_0$. Budiž H Abelova grupa. Nutnou a postačující podmínkou existence jednoduchého rozkladu $\mathscr{R}$ grafu $\langle \mathfrak{n} \rangle$ podle grupy H je, aby řád $\mathfrak{m}$ grupy H byl menší nebo roven $\mathfrak{n}$ a aby grupa H neobsahovala prvky řádu 2.*

Důkaz. Graf $\langle\mathfrak{n}\rangle$ při $\mathfrak{n} \geqq \aleph_0$ obsahuje $\mathfrak{n}$ hran; tedy rozklad $\mathscr{R}$ nemůže obsahovat více než $\mathfrak{n}$ grafů. Je-li $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}$ a H neobsahuje prvky řádu 2, můžeme rozložit množinu uzlů grafu $\langle\mathfrak{n}\rangle$ na $\mathfrak{n}$ disjunktních podmnožin mohutnosti $\mathfrak{m}$ a postupovat stejně jako v důkaze věty 2 při n lichém a m dělícím n. Nebo můžeme rozložit množinu uzlů grafu $\langle\mathfrak{n}\rangle$ na $\mathfrak{n}$ disjunktních podmnožin, z nichž jedna je jednoprvková a ostatní mají mohutnost $\mathfrak{m}$, a postupovat jako při n sudém a m dělícím $n - 1$. Nutnost podmínky, že grupa H nesmí obsahovat prvky řádu 2, lze dokázat analogicky důkazu věty 2.

Nyní vyslovíme ještě větu, která se týká obecně všech grup, nikoli pouze Abelových.

Věta 4. *Budiž dán jednoduchý rozklad $\mathscr{R}$ konečného grafu $\langle n\rangle$ podle grupy H. Nutnou podmínkou existence uzlu u v grafu $\langle n\rangle$ samodružného ve všech zobrazeních z grupy H je, aby řád m grupy H byl lichý a byl dělitelem čísla $n - 1$.*

Důkaz. Budiž ε jednotkový prvek grupy H a α libovolný prvek grupy H. Nechť graf $G(\varepsilon)$ obsahuje právě r hran incidentních s uzlem u splňujícím tvrzení věty. Zobrazením α přejde každá hrana incidentní s u opět v hranu incidentní s u, tedy graf $G(\alpha)$ obsahuje nejméně r hran incidentních s u. Co bylo řečeno o zobrazení α, platí i pro zobrazení α^{-1}, tedy $G(\varepsilon)$ nemůže obsahovat méně hran incidentních s u než $G(\alpha)$. Graf $G(\alpha)$ tedy obsahuje rovněž r hran incidentních s u. Protože α bylo libovolně zvoleno, znamená to, že každý graf $G(\alpha)$, $\alpha \in H$, obsahuje r hran incidentních s u. Celkový počet takových hran je $n - 1$, každá z nich náleží právě jednomu $G(\alpha)$, je tedy $m = (n - 1)/r$.

Kdyby m bylo sudé, existoval by v H prvek δ řádu 2, tedy takový, že $\delta^{-1} = \delta$, $\delta \neq \varepsilon$. Budiž h hrana z $G(\varepsilon)$, budiž $\delta(h)$ její obraz ve zobrazení δ; hrana $\delta(h)$ zřejmě patří do $G(\delta)$ a jejím obrazem ve zobrazení δ je opět hrana h. Budiž x koncový uzel hrany h různý od u, pak $\delta(x)$ je zřejmě koncový uzel hrany $\delta(h)$ různý od u. Budiž k hrana spojující uzly x, $\delta(x)$. Poněvadž obrazem x ve zobrazení δ je $\delta(x)$ a obrazem $\delta(x)$ je x, je $\delta(k) = k$. Nechť $k \in G(\alpha)$, $\alpha \in H$. Pak je také $k \in G(\delta\alpha)$, tedy $G(\alpha)$ a $G(\delta\alpha)$ mají společnou hranu a musí být $G(\alpha) = G(\delta\alpha)$, tedy $\alpha = \delta\alpha$, z toho $\delta = \varepsilon$, což je spor s předpokladem, že δ je řádu 2.

Problém. *Je podmínka z věty 4 rovněž podmínkou postačující?*

LITERATURA

[1] Fuchs L., *Abelian Groups*, Budapest 1958.
[2] Read R. C., *On the number of self-complementary graphs and digraphs*, J. London Math. Soc. *38* (1963), 99—104.

[3] Ringel G., *Selbstkomplementäre Graphen*, Arch. Math. *14* (1963), 354—358.
[4] Sachs H., *Über selbstkomplementäre Graphen*, Publs math. *9* (1962), 270—288.
[5] Zelinka B., *Rozklad grafu na isomorfní podgrafy*, Časop. pěstov. mat. *90* (1965), 147—152.

Došlo 27. 4. 1966.

Katedra matematiky
Vysoké školy strojní a textilní
Liberec

DECOMPOSITION OF THE COMPLETE GRAPH ACCORDING TO A GIVEN GROUP

Bohdan Zelinka

Summary

Let the complete graph $\langle n \rangle$ with n vertices and a subgroup H of its group of automorphisms be given. A decomposition $\mathscr{R}$ of the graph $\langle n \rangle$ into subgraphs which are isomorphic and edge-disjoint with one another and each of which contains all vertices of $\langle n \rangle$ is called a simple decomposition of the graph $\langle n \rangle$ according to the group H, if and only if there exists a one-to-one mapping of elements α of H on the graphs $G(\alpha)$ of $\mathscr{R}$ such that for each $\alpha \in H$, $\beta \in H$ the graph $G(\alpha)$ is mapped by the automorphism β onto $G(\beta\alpha)$.

The following theorems are proved.

Theorem 1. *Let $\mathscr{R}$ be a simple decomposition of the graph $\langle n \rangle$ according to the Abelian group H, let K be a subgroup of the group H. Then there exists a simple decomposition $\mathscr{R}'$ of the graph $\langle n \rangle$ according to the factor-group H/K, whose refinement is $\mathscr{R}$.*

Theorem 2. *Let $\langle n \rangle$ be a finite complete graph with n vertices, let H be an Abelian group. The necessary and sufficient condition for the existence of a simple decompostion $\mathscr{R}$ of $\langle n \rangle$ according to H is that H be finite and its order m be odd and a divisor of the number n or $\frac{1}{2}(n - 1)$ in the case when n is odd and a divisor of $\frac{1}{2}n$ or $n - 1$ in the case when n is even.*

Theorem 3. *Let $\langle \mathfrak{n} \rangle$ be a complete graph with $\mathfrak{n}$ vertices, where $\mathfrak{n} \geqq \aleph_0$. Let H be an Abelian group. The necessary and sufficient condition for the existence of a simple decomposition $\mathscr{R}$ of $\langle \mathfrak{n} \rangle$ according to H is that the order $\mathfrak{m}$ of the group H be less or equal to $\mathfrak{n}$ and the group H do not contain any elements of order 2.*

Theorem 4. *Let a simple decomposition $\mathscr{R}$ of a finite graph $\langle n \rangle$ according to the group H be given. A necessary condition for the existence of a vertex u in the graph $\langle n \rangle$ fixed in all mappings from H is that the order m of the group H be odd and a divisor of $n - 1$.*