Matematický časopis

Iosif Aleksandrovič Vil′ner

Бесквадратурная номогррафия. Алгебраическая номография и проблема анаморфозы функций в двухмерной плоскости при $n = 6$ переменных.

Matematický časopis, Vol. 17 (1967), No. 3, 169--186,187--205

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126938`

MATEMATICKÝ ČASOPIS
ROČNÍK 17 1967 ČÍSLO 3

БЕСКВАДРАТУРНАЯ НОМОГРАФИЯ. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ НОМОГРАФИЯ И ПРОБЛЕМА АНАМОРФОЗЫ ФУНКЦИЙ В ДРУХМЕРНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ $n = 6$ ПЕРЕМЕННЫХ

ИОСИФ АЛЕКСАНДРОВИЧ ВИЛЬНЕР, Москва (СССР)

В настоящей работе дано систематическое изложение бесквадратурной номографии, разработаной автором в 1948—1952 гг. и сжато опубликованной в нескольких цитируемых ниже работах ([2], [3], [5], [6], [7], [8], [19], [21], [25](1)).

Полное и подробное изложение публикуется в настоящей работе впервые.(2)

Рассматривается преимущественно случай функций трех абстрактных аргументов.

В первой главе настоящей работы (§§1—8) рассматривается общий случай бесквадратурной анаморфозы функции трех абстрактных аргументов.

Во второй главе (§9) рассматривается особый случай бесквадратурной анаморфозы функции трех абстрактных аргументов.

Автор выражает признательность П. Галайде за большую работу по редактированию рукописи и за сделанные при этом замечания, улучшившие изложение ряда мест.

§1. Пусть E_3 — трехмерное евклидово пространство. Для x, $y \in E_3$ обозначим xy, $[xy]$ соответственно скалярное и векторное произведение векторов x, y. Пусть F — функция трех переменных z_1, z_2, z_3. В настоящей работе найдем условия, чтобы функцию F было можно выразить в виде

---

(1) В этой ссылке имеется ввиду стенограмма речи автора.

(2) Настоящая работа была доложена 9/XII-1952 г. на заседании Московского математического общества и 26/V-1952 года на заседании семинара синтетической геометрии и номографии при МГУ. Она выходит в свет с большим опозданием. При подготовке к печати старой рукописи добавлены ссылки на значительно более поздние, но раньше вышедшие в свет работы самого автора и других лиц, а также критическое выступление автора (таковы, например ссылки [6], [21], [25]).

$$(1) \qquad F = \underset{3}{\bar{a}}[\underset{1}{\bar{a}}\underset{2}{\bar{a}}],$$

где $\underset{k}{\bar{a}}$ — вектор-функция переменного z_k (для $k = 1, 2, 3$). Далее дается систематическое изложение бесквадратурного метода решения проблемы анаморфозы функций для случая плоскости.

Уравнение (1) с неизвестными вектор-функциями эквивалентно системе уравнений

$$(1.1) \qquad F = \underset{3}{\bar{a}}\bar{b},$$

$$(1.2) \qquad \bar{b} = [\underset{1}{\bar{a}}\underset{2}{\bar{a}}].$$

Покажем, что разрешимость системы уравнений (1.1) и (1.2) с такими ограничениями необходима и достаточна для того, чтобы данная функция $F \not\equiv F(z_1; z_2; z_3)$ тождественно равнялась произведению некоторого анаморфизирующего множителя $\sigma_{12} \equiv \sigma_{12}(z_1; z_2)$ на определитель Массо третьего порядка, элементы первой, второй и третьей строк которого зависели бы только от абстрактных аргументов соответственно z_1, z_2 и z_3.

Рассмотрение функций F, зависящих от абстрактных аргументов, оправдано тем, что позволит нам ниже получить единые общие выведенные формулы для элементов искомого определителя Массо, охватывающие и случаи обычных однопараметрических шкал (шкальные номограммы) и вещественные случаи бинарных, тернарных и т. д. многопараметрических шкал или полей (номограмма с бинарными, тернарными и т. д. полями). Целесообразность и роль такой общности особенно очевидны при получении с помощью нашего метода и формул пространственных номограмм Мемке, для которых случаи бинарных и тернарных шкал и пространственных полей следует считать практически важными.

Для решения уравнения (1) введем следующие обозначения. Пусть дана функция трех переменных

$$(2) \qquad F(z_1^{l_1}; z_2^{l_2}; z_3^{l_3}),$$

где l_1, l_2, l_3 — неотрицательные целые числа. Пусть s — неотрицательное целое число и $k \in \{1, 2, 3\}$ — фиксированный индекс. Обозначим через $F_{z_k^s}$ функцию, которую получим из выражения (2) так, что переменную $z_k^{l_k}$ заменим переменной $z_k^{l_k+s}$. Функцию $F_{z_k^s}$ будем называть условной производной функции F относительно переменной z_k порядка s и обозначать $\dfrac{\partial^s F}{\partial z_k^s}$. $\Big($При $s = 1$ пишем вместо $\dfrac{\partial^1 F}{\partial z_k^1}$ только $\dfrac{\partial F}{\partial z_k}$ или просто F_{z_k}; а при $s = 0$ считаем, что $\dfrac{\partial^s F}{\partial z_k^s} = F$.$\Big)$

Пусть дан невырождающийся репер $(\bar\beta_1, \bar\beta_2, \bar\beta_3)$ и ему взаимный $(\bar\beta^1, \bar\beta^2, \bar\beta^3)$. Пусть

$$(1.3) \qquad \underset{3}{\bar a} = a_1\bar\beta^1 + a_2\bar\beta^2 + a_3\bar\beta^3$$

$$(1.4) \qquad \bar b = b_1\bar\beta_1 + b_2\bar\beta_2 + b_3\bar\beta^3$$

суть разложения векторов $\underset{3}{\bar a}$ и $\bar b$. Тройке основных векторов соответствует тройка взаимных векторов по формулам

$$(1.5) \qquad \bar\beta^1 = \frac{[\bar\beta_2\bar\beta_3]}{(\bar\beta_1\bar\beta_2\bar\beta_3)}, \quad \bar\beta^2 = \frac{[\bar\beta_3\bar\beta_1]}{(\bar\beta_1\bar\beta_2\bar\beta_3)}, \quad \bar\beta^3 = \frac{[\bar\beta_1\bar\beta_2]}{(\bar\beta_1\bar\beta_2\bar\beta_3)},$$

где $(\bar\beta_1\bar\beta_2\bar\beta_3)$ — смешанное произведение трех векторов.

Аналогично выражаются $\bar\beta_1$, $\bar\beta_2$, $\bar\beta_3$ через $\bar\beta^1$, $\bar\beta^2$, $\bar\beta^3$ (3), что побудило оба репера назвать взаимными.

При отнесении векторов к взаимным реперам будем иметь

$$(1.6) \qquad \underset{3}{a}\bar b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Равенство (1.1) примет вид

$$(1.7) \qquad F = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

,,Дифференцируя'' (1.7) по z_3 три раза, получим

$$(1.7^1) \qquad F_{z_3^i} = a_{1z_3^i}b_1 + a_{2z_3^i}b_2 + a_{3z_3^i}b_3, \quad i = 1, 2, 3.$$

Условие совместности четырех уравнений (1.7) и (1.7¹) выразится равенством нулю определителя 4 порядка $\tilde A$. Обозначая адъюнкты элементов первого столбца через $\tilde A_{j1}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$(4) (эти элементы не зависят

---

(3) Скалярное произведение векторов $\bar m = u\bar\alpha + v\bar\beta + w\bar\gamma$ и $\bar n = u'\bar\alpha^* + v'\bar\beta^* + w'\bar\gamma^*$ равно $\bar m\bar n = uu' + vv' + ww'$, где $(\bar\alpha, \bar\beta, \bar\gamma)$ и $(\bar\alpha^*, \bar\beta^*, \bar\gamma^*)$ — взаимные реперы.

Векторное же произведение удобно вычислять, когда векторы $\bar m$ и $\bar n$ отнесены к одному реперу, скажем к $\bar\alpha$, $\bar\beta$, $\bar\gamma$. Тогда

$$[\bar m\bar n] = \begin{vmatrix} \bar\alpha^* & \bar\beta^* & \bar\gamma^* \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix} (\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma).$$

Аналогично в N-мерном случае.

(4) Хотя, как легко понять (см. §2), никакой ошибки не будет, если заменить определитель $\tilde A$ и его миноры определителем $\underset{3}{A^{z_3}}$ из §2 и его минорами, но здесь это вызвало бы недоумение, тем более, что возможность такого понимания прямо нигде у нас не используется.

от z_1 и z_2) и раскладываются по элементам первого столбца, получим

$$F\tilde{A}_{11} + F_{z_3}\tilde{A}_{21} + F_{z_3^2}\tilde{A}_{31} + F_{z_3^3}\tilde{A}_{41} = 0. \tag{1.8}$$

,,Дифференцируя'' это уравнение три раза по z_1 и z_2, получим вместе с (1.8) систему 4 однородных уравнений, условие нетривиальной совместности которой выражается равенством (2.1) (см. ниже), которое дает необходимое условие разрешимости уравнения (1.7). Равенство (2.2), справедливое при дополнительном ограничении, что $\underset{\text{з}}{A}{}_{11}^{z_3} \not\equiv 0$, показывает, что условия (2.1) и достаточно при этой оговорке. Получим билинейное разложение (2.2) ранга $\varrho = 3$, и не меньше и не больше, так как в противном случае — представляем это проверить читателю легким вычислением — $\underset{\text{з}}{A}{}_{11}^{z_3}$ при $\varrho < 3$ обратилось бы в нуль и мы имели бы случай вырождения.(⁵) Отсюда следует, что компоненты разложения (2.2), т. е. a_1, a_2, a_3 (см. 1.3) линейно независимы, а компоненты разложения b_1, b_2, b_3 (см. (1.4)) также линейно независимы. Мы видим, что за a_1, a_2, a_3 можно принять $\underset{\text{з}}{A}{}_{12}^{z_3}$, $\underset{\text{з}}{A}{}_{13}^{z_3}$, $\underset{\text{з}}{A}{}_{14}^{z_3}$, т. е. выражения, усматриваемые из (2.3) (см. ниже).

Заметим, что наши ,,дифференцирования'' могут толковаться совершенно произвольно: по существу это любая операция, которая превращает z_k в новую переменную z_k^1, которую при желании и возможности, с точки зрения достижения цели, можно затем превратить и опять в z_k. В качестве примера можно указать, что из необходимого условия (2.1) вытекает их множество: можно, например, считать, что $z_2^S \equiv z_2^0 \equiv z_2$ и тогда в (2.1) останутся лишь ,,дифференцирования'' по z_1 (если угодно по z_2) и т. д. Итак, задача решена. В ней поставлено в привилегированное положение z_3. Аналогично можно было бы поставить в это положение z_1 или z_2. Это можно делать, если по z_3 условия не выполнены. Наконец, условия $\underset{i}{A}{}^{z_i} = 0$, $\underset{i}{A}{}_{11}^{z_i} \neq 0$ $(i = 1, 2)$ дают достаточные условия возможности представления в номографически рациональном виде.

Каждый раз, когда z_1, z_2, z_3 таковы, что $F = 0$, то в силу (1.1) и (2.1) и $\underset{\text{з}}{\bar{a}}\bar{b} = 0$ и обратно.

Вектор-функции $\bar{r} = \underset{\text{з}}{a}$ и $\bar{r} = \bar{b}$, где $\bar{r}$ — радиус-вектор точки пространства, опишут параметризованные ,,кривую'' и ,,поверхность'' z_1 и z_2. Кривая z_3 вместе с началом 0 определит коническую поверхность, для которой эта кривая служит направляющей, а прямая, коллинеарная $\bar{r} = \underset{\text{з}}{\bar{a}}$ (прямая z_3), служит образующей.

Вектор-функция $\bar{r} = \bar{b}$ определит 2 семейства конических поверхностей $z_1 = \text{const}$ и $z_2 = \text{const}$.

(⁵) Случай вырождения рассмотрен автором ниже и в [19], причем показано, что случай вырождения может быть включен в общий случай.

Возьмем коническую поверхность $z_1 = \mathrm{const}$ и каждой образующей z_2 сопоставим проходящую через начало нормальную к ней плоскость z_2. Тогда если $F, = 0$, то прямая z_3 будет лежать в плоскости z_2. Аналогично — в плоскости z_1.

Проведем теперь плоскость π, не проходящую через 0. Кривая z_3 определит и в ней кривую пересечения z_3. Каждой плоскости z_2 (z_1) будет отвечать прямая. Следовательно, конической поверхности $z_1 = \mathrm{const}$ ($z_2 = \mathrm{const}$) сопоставится однопараметрическое семейство (параметр z_2) (параметр z_1) прямых в плоскости π. Пользование номограммой при определении z_3 по z_1 и z_2 сведется к определению в плоскости π точки пересечения прямой z_2 из семейства прямых z_1 с кривой z_3, либо, что то же, к определению точки пересечения с шкалой z_3 прямой z_1 из семейства прямых z_2.

Эта номограмма коррелятивна номограмме в плоскости π, состоящей из этой же шкалы z_3 и бинарного поля (z_1; z_2), образованного пересечением соответствующих конических поверхностей $z_1 = \mathrm{const}$ с плоскостью π. Но эта номограмма—пространственная: точку (z_1; z_2) поля по z_1 и z_2 надо соединить прямой с 0. В точке 0 построить нормальную к этой прямой плоскость и найти точку пересечения её (или её следа в плоскости π) со шкалой z_3.

Отсюда вытекает, что прямая z_2 из семейства прямых z_1 совпадает с прямой z_1 из семейства прямых z_2, так как и та и другая прямые являются единственным следом на плоскости π плоскости нормальной к прямой, соединяющей 0 с точкой (z_1; z_2) бинарного поля (z_1; z_2) в плоскости π.

Если предположить нашу функцию F дифференцируемой и все производные обычными, то семейства прямых $z_1 = \mathrm{const}$ ($z_2 = \mathrm{const}$) будут иметь огибающие и незачем тогда вычерчивать все прямые. Получаем в π тангенциальную номограмму с двумя инвариантными бинарными полями, рассмотренную автором на стр. 134 работы [15] и ранее в работе [9].

Не будем предполагать дифференцируемости и существования огибающих.

Для каждой образующей z_2 поверхности $z_1 = \mathrm{const}$ мы получили в π соответствующую прямую, а для всех образующих z_2 этой конической поверхности получим ∞^1 прямых z_2, являющихся образом шкалы $z_1 = \mathrm{const}$, определяемой вектор-функцией $\bar{r} = \bar{b}(z_1;\ z_2)$, где $z_1 = \mathrm{const}$.

Есть единственный случай, когда шкале $z_1 = \mathrm{const}$ как множеству точек z_2, будет отвечать не ∞^1 прямых z_2 в плоскости π, а единственная точка (каково бы ни было z_2), имеющая эту же пометку $z_1 = \mathrm{const}$. Точнее — это не точка, а пучек прямых z_2, центр которого отвечает конической поверхности. Это тот случай, когда конические поверхности $z_1 = \mathrm{const}$, вырождаются в плоскости, а кривые $\bar{r} = \bar{b}(z_1;\ z_2)$, где $z_1 = \mathrm{const}$ суть плоские кривые, плоскости которых проходят через начало 0.

Для каждого $z_1 = \mathrm{const}$ получим свой пучок прямых z_2. Все центры их образуют шкалу z_1. Пользование номограммой сведется к определению пометки z_3 точки пересечения шкалы z_3 с прямой z_2 пучка с центром z_1 — $= \mathrm{const}$ (эта же прямая будет прямой z_1 бесконечной совокупности прямых, отвечающих конической поверхности $z_2 = \mathrm{const}$ с уравнением $\bar{r} = \bar{b}(z_1;\, z_2)$, где $z_2 = \mathrm{const}$).

Но если и эти конические поверхности суть плоскости, то в плоскости π еще определится шкала центров пучков z_2, а прямая, соединяющая центры пучков z_1 и z_2 (т. е. точки z_1 и z_2 шкал z_1 и z_2) будет играть роль прямой z_2 пучка z_1 и прямой z_1 пучка z_2 и так как пометка точки пересечения этой прямой со шкалой z_3 дает ответ, то мы и получаем в плоскости π номограмму из выравненных точек.

Условие того, что конические поверхности $\bar{r} = \bar{b}(z_1;\, z_2)$, где $z_1 = \mathrm{const}$ — плоские, есть очевидно условие компланарности трех векторов

$$\bar{r} = \bar{b},\ \bar{r}_{z_2} = \bar{b}_{z_2},\ \bar{r}_{z_2^2} = \bar{b}_{z_2^2},\ \text{т. е.}$$

$$\underset{(2)}{A}^{z_3} \equiv (\bar{b}\bar{b}_{z_2}\bar{b}_{z_2^2}) = 0. \tag{1.9}$$

Тогда вектор, определяющий в плоскости π положение центров пучка $z_1 = \mathrm{const}$, есть, очевидно, с точностью до несущественного скалярного множителя

$$\underset{1}{\bar{a}} \equiv \underset{1}{a}(z_1) = [\bar{b}\bar{b}_{z_2}]. \tag{1.10}$$

Аналогично, при условии

$$\underset{(1)}{A}^{z_3} \equiv (\bar{b}\bar{b}_{z_1}\bar{b}_{z_1^2}) = 0, \tag{1.11}$$

можем написать

$$\underset{2}{\bar{a}} \equiv \underset{2}{\bar{a}}(z_2) = [\bar{b}\bar{b}_{z_1}]. \tag{1.12}$$

Заменяя в (1.9) и (1.11) вектор $\bar{b}$ его полученным ниже выражением (см. (2.4) ниже), мы получим вместо (1.9) и (1.11) соответственно (2.5) и (2.6) (см. ниже), а вместо (1.10) и (1.12) получим (3.1) и (3.2).

Перемножим теперь векторно-скалярно $\underset{1}{\bar{a}},\ \underset{2}{\bar{a}},\ \underset{3}{\bar{a}}$. Получим

$$\begin{aligned}(\underset{1}{\bar{a}}\underset{2}{\bar{a}}\underset{3}{\bar{a}}) &= [\bar{b}\bar{b}_{z_2}]\,[\bar{b}\bar{b}_{z_1}]\underset{3}{\bar{a}} = [[\bar{b}\bar{b}_{z_2}]\,[\bar{b}\bar{b}_{z_1}]]\underset{3}{\bar{a}} = \\ &= -\,(\bar{b}\bar{b}_{z_1}\bar{b}_{z_2})\,(\underset{3}{a}\bar{b}) = -(\bar{b}\bar{b}_{z_1}\bar{b}_{z_2})F.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Но

$$\bar{B} \equiv B_{z_3} \equiv (\bar{b}\bar{b}_{z_1}\bar{b}_{z_2}) = \left|\begin{matrix} F_{z_3} & F_{z_3^2} & F_{z_3^3} \\ F_{z_3 z_1} & F_{z_3^2 z_1} & F_{z_3^3 z_1} \\ F_{z_3 z_2} & F_{z_3^2 z_2} & F_{z_3^3 z_2} \end{matrix}\right. . \tag{1.14}$$

Множитель (1.14) есть функция z_1 и z_2.

Мы предположим, что это выражение не равно тождественно нулю. Отсюда уже будет следовать, что более общее выражение $\underset{3}{A}{}^{z_3}_{11}$ не может тождественно равняться нулю.

В определителе (1.14) можно очевидно аннулировать одно из ,,дифференцирований'' по z_3.

Тогда получим неравенство

$$B \equiv \begin{vmatrix} F & F_{z_3} & F_{z_3^2} \\ F_{z_1} & F_{z_3 z_1} & F_{z_3^2 z_1} \\ F_{z_2} & F_{z_3 z_2} & F_{z_3^2 z_2} \end{vmatrix} \not\equiv 0. \tag{1.15}$$

Итак, если выполнено неравенство (1.15), то необходимым и достаточным условием законности построенной анаморфозы функции, т. е. условие возможности представления F в виде определителя Массо с точностью до анаморфозируемого множителя от двух переменных (1.14), есть выполнение равенств (2.1), (2.5), (2.6) (см. ниже). *Мы подчеркиваем, что так как все наши переменные абстракны, то это — критерий и номограмм шкальных, и с любыми полями!*

Однако, так как для плоских номограмм актуальны бинарные поля, мы для конкретности говорим дальше только о них.

Аналогичным образом можно было бы элементарно вывести формулы алгебраической номографии для трехмерного пространства, использовав для этого векторный анализ в четырехмерном евклидовом пространстве.

Вернемся к определителю $\bar{B}$ (1.14) и обратим внимание на формулы (3.1) и (3.2) (см. ниже). Мы видим, что

$$\begin{aligned} &\underset{1}{x_1} = -\bar{B}_{21} = \underset{(2)}{A}{}^{z_3}_{11}, \quad \underset{1}{x_2} = -\bar{B}_{22} = \underset{(2)}{A}{}^{z_3}_{12}, \quad \underset{1}{x_3} = -\bar{B}_{23} = \underset{(2)}{A}{}^{z_3}_{13}, \\ &\underset{2}{x_1} = \quad \bar{B}_{31} = \underset{(1)}{A}{}^{z_3}_{31}, \quad \underset{2}{x_2} = \quad \bar{B}_{32} = \underset{(1)}{A}{}^{z_3}_{32}, \quad \underset{2}{x_3} = \quad \bar{B}_{33} = \underset{(1)}{A}{}^{z_3}_{33}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

причем знак минус можно везде опустить. Что же касается $\underset{3}{x_1}$, $\underset{3}{x_2}$, $\underset{3}{x_3}$, то из (2.3) (или (3.3)) видно, что

$$\underset{3}{x_1} = \underset{3}{A}{}^{z_3}_{12}, \quad \underset{3}{x_2} = \underset{3}{A}{}^{z_3}_{13}, \quad \underset{3}{x_3} = \underset{3}{A}{}^{z_3}_{14}; \tag{1.17}$$

и в целом определитель Массо будет

$$\sigma F \equiv \begin{vmatrix} \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} & \bar{B}_{23} \\ \bar{B}_{31} & \bar{B}_{32} & \bar{B}_{33} \\ \underset{3}{A}{}^{z_3}_{12} & \underset{3}{A}{}^{z_3}_{13} & \underset{3}{A}{}^{z_3}_{14} \end{vmatrix}, \tag{1.18}$$

где множитель

$$\sigma \equiv \varphi(z_1;\, z_2)\, \psi(z_3). \tag{1.19}$$

Ниже формула (1.18) будет обобщена на случай не трех, а N переменных(6), причем выкладки мы будем, как правило, опускать или сжато намечать, что вполне достаточно для воспроизведения их читателем, знакомым с тензорной алгеброй в N-мерном пространстве.

Единственное отличие будет в представлении (1.18) при $N = 3$: как видно из (3.1) и (3.2), в координаты входят ,,производные'' не выше первого порядка, благодаря чему удалось записать координаты через адъюнкты одного и того же определителя (1.14). При переходе в $(N — 1)$-мерное пространство будут участвовать производные по z_i $(i = 1, 2, \ldots (N — 1))$ до $(N — 2)$ порядка включительно и потому придется для каждой строки определителя Массо, т. е. для каждого z_i, пользоваться особым определителем $\underset{i}{\bar{B}}$ и брать его адъюнкты $\underset{i}{\bar{B}}_{21}$, $\underset{i}{\bar{B}}_{22}$, $\ldots$, $\underset{i}{\bar{B}}_{2N}$ или пропорциональные им $\underset{i}{\bar{B}}_{11}$, $\underset{i}{\bar{B}}_{12}$, $\ldots$ $\underset{i}{\bar{B}}_{1N}$ $(i = 1, 2, \ldots (N — 1))$. Определители $\underset{i}{\bar{B}}$ — это по существу, как легко видеть из (3.1), (3.2), (2.5) и (2.6), определители $\underset{i}{A}^{z_N}$ $(i = 1, 2, \ldots (N — 1))$; так что, полагая $N = 3$, представление (1.18) можно записать в виде

$$(1.20) \qquad \sigma F \equiv \begin{vmatrix} \underset{(2)}{A}{}^{z_3}_{11} & \underset{(2)}{A}{}^{z_3}_{12} & \underset{(2)}{A}{}^{z_3}_{13} \\ \underset{(1)}{A}{}^{z_3}_{31} & \underset{(1)}{A}{}^{z_3}_{32} & \underset{(1)}{A}{}^{z_3}_{33} \\ \underset{3}{A}{}^{z_3}_{13} & \underset{3}{A}{}^{z_3}_{12} & \underset{3}{A}{}^{z_3}_{14} \end{vmatrix}.$$

Это же можно сделать и для любого N.

Обобщая ниже на $(N — 1)$-мерное пространство, мы пользовались не определителями $\underset{(i)}{A}^{z_3}$ при написании представлений, а по существу такими же определителями $\underset{(i)}{\bar{B}}$. Чтобы понять причину различных форм одного и того же решения, проследим это для рассматриваемого случая $N = 3$.

Пусть условие $\underset{3}{A}^{z_3} \equiv 0$ (см. ниже (2.1))выполнено и векторы $\underset{3}{a}$ и $\underset{3}{\bar{b}}$ в равенстве (1.1) определены. Остается решить векторное уравнение (1.2). Дифференцируя обе части этого равенства сначала по z_1, а потом по z_1^2, затем по z_2 и z_2^2, получим

$$(1.21) \qquad \bar{b}_{z_1} = [\underset{1}{\bar{a}}_{z_1}\underset{2}{a}],\ \bar{b}_{z_1^2} = [\underset{1}{\bar{a}}_{z_1^2}\underset{2}{a}],\ \bar{b}_{z_2} = [\underset{1}{a}\underset{2}{\bar{a}}_{z_2}],\ \bar{b}_{z_2^2} = [\underset{1}{\bar{a}}\underset{2}{a}_{z_2^2}].$$

При помощи (1.2) отсюда находим необходимые условия (1.9) и (1.11), ранее найденные чисто геометрически.

Находим

$$(1.22) \qquad [\bar{b}\bar{b}_{z_1}] = [[\underset{1}{a}\underset{2}{\bar{a}}]\,[\underset{1}{\bar{a}}_{z_1}\underset{2}{\bar{a}}]] = \underset{2}{a}(\underset{1}{a}\underset{1}{a}_{z_1}\underset{2}{a}) = \sigma_2(z_1;\, z_2)\underset{2}{a},$$

---

(6) Это будет сделано в продолжении данной работы, посвящённом N-мерному случаю.

$$[\bar{b}\bar{b}_{z_2}] = [[\underset{1}{\bar{a}}\underset{2}{a}]\,[\underset{1}{a}\underset{2}{\bar{a}}_{z_2}]] = \underset{1}{\bar{a}}(\underset{1}{a}\underset{2}{a}\underset{2}{\bar{a}}_{z_2}) = \sigma_1(z_1;\, z_2)\underset{1}{\bar{a}}, \tag{1.23}$$

где $\sigma_2 \equiv \sigma_2(z_1;\, z_2)$ и $\sigma_1 \equiv \sigma_1(z_1;\, z_2)$ — несущественные скаляры, неравные тождественно нулю. Отсюда видно, что за $\underset{2}{\bar{a}}$ и $\underset{1}{\bar{a}}$ можно принять ранее найденные геометрически выражения (1.10) и (1.12).

Найдем, однако, еще

$$[\bar{b}_{z_1}\bar{b}_{z_1^2}] = [[\underset{1}{\bar{a}}_{z_1}\underset{2}{a}]\,[\underset{1}{\bar{a}}_{z_1^2}\underset{2}{\bar{a}}]] = \underset{2}{a}(\underset{1}{\bar{a}}_{z_1}\underset{1}{\bar{a}}_{z_1^2}\underset{2}{\bar{a}}) = \sigma_{2z_1}\underset{2}{\bar{a}}, \tag{1.24}$$

$$[\bar{b}_{z_2}\bar{b}_{z_2^2}] = [[\underset{1}{\bar{a}}\underset{2}{\bar{a}}_{z_2}]\,[\underset{1}{a}\underset{2}{\bar{a}}_{z_2^2}]] = \underset{1}{a}(\underset{1}{\bar{a}}\underset{2}{\bar{a}}_{z_2}\underset{2}{\bar{a}}_{z_2^2}) = \sigma_{1z_2}\underset{1}{a}, \tag{1.25}$$

где σ_{2z_1} и σ_{1z_2} — неранвые тождественно нулю скаляры.

Мы видим, что оба способа равноправны, и можно принять с равным успехом, что

$$\underset{2}{\bar{a}} = [\bar{b}_{z_1}\bar{b}_{z_1^2}], \quad \underset{1}{\bar{a}} = [\bar{b}_{z_2}\bar{b}_{z_2^2}]. \tag{1.26}$$

Так мы и сделаем при решении задачи для (N — 1)-мерного пространства.

То, что $[\underset{1}{a}\underset{2}{a}]$ коллинеарно $\bar{b}$, т. е. $\underset{1}{\bar{a}}$ и $\underset{2}{\bar{a}}$ являются решениями уравнения (1.2), очевидно при первом определении $\underset{1}{\bar{a}}$ и $\underset{2}{\bar{a}}$. При втором же (1.26) доказательство требует незначительных выкладок. Проведем их. Имеем

$$\begin{aligned}[\underset{1}{\bar{a}}\underset{2}{\bar{a}}] &= [[\bar{b}_{z_2}\bar{b}_{z_2^2}]\,[\bar{b}_{z_1}\bar{b}_{z_1^2}]] = \\ &= \bar{b}_{z_1}(\bar{b}_{z_2}\bar{b}_{z_2^2}\bar{b}_{z_1^2}) - \bar{b}_{z_1^2}(\bar{b}_{z_2}\bar{b}_{z_2^2}\bar{b}_{z_1}).\end{aligned} \tag{1.27}$$

Но в силу (1.9) и (1.11) имеем

$$\bar{b}_{z_2^2} = \lambda\bar{b} + \mu\bar{b}_{z_2}, \quad \bar{b}_{z_1^2} = \lambda_1\bar{b} + \mu_1\bar{b}_{z_1}, \tag{1.28}$$

где λ, μ, λ_1, μ_1 — отличны от нуля. Подставляя в предыдущую формулу, получим, что (см. (1.2))

$$[\underset{1}{a}\underset{2}{\bar{a}}] = \sigma\bar{b}, \tag{1.29}$$

что и доказывает равноправность обоих способов выражения векторов $\underset{1}{a}$ и $\underset{2}{a}$, являющихся причиной того, что в разных работах автора имеются разные формы решения задачи бесквадратурной анаморфозы.

Таким образом, все формулы, которыми мы ниже пользуемся, полностью доказаны (ранее мы показали, что $\underset{1}{\bar{a}}$, $\underset{2}{\bar{a}}$, $\underset{3}{\bar{a}}$ даются формулами (3.3) — см. ниже).

§2. В практически важном для номографии частном случае $N = 3$ и $n = 6$ переменных x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32} один их результатов работы автора по алгебраической номографии в N-мерном пространстве может быть сформулирован следующими теоремами, дифференциальными по форме и алгебраическими по содержанию (7). Настоящая работа независима от других работ автора, но наиболее тесно связана с работами [2] и [5].

Теорема 1. *Для того, чтобы однозначная функция* $F = F(x_{11};\ x_{12};\ x_{21};\ x_{22};\ x_{31};\ x_{32})$ *была представима в билинейной трехчленной форме ранга* $\varrho = 3$ *с заданным распределением аргументов; — конкретно, чтобы существовали две вектор-функции* $\bar{a} = \bar{a}(x_{31};\ x_{32})$, $\bar{b} = \bar{b}(x_{11};\ x_{12};\ x_{21};\ x_{22})$ *такие, что* $F \equiv \underset{3}{\bar{a}}\bar{b}$ *(скалярное произведение), необходимо и достаточно чтобы имело место равенство*(8)

$$(2.1)\qquad \underset{3}{A}^{z_3} = \begin{vmatrix} F & F_{z_3} & F_{z_3^2} & F_{z_3^3} \\ F_{z_1 z_2} & F_{z_3 z_1 z_2} & F_{z_3^2 z_1 z_2} & F_{z_3^3 z_1 z_2} \\ F_{z_1^2 z_2^2} & F_{z_3 z_1^2 z_2^2} & F_{z_3^2 z_1^2 z_2^2} & F_{z_3^3 z_1^2 z_2^2} \\ F_{z_1^3 z_2^3} & F_{z_3 z_1^3 z_2^3} & F_{z_3^2 z_1^3 z_2^3} & F_{z_3^3 z_1^3 z_2^3} \end{vmatrix} = 0,$$

причем адъюнкта $\underset{3}{A}^{z_3}_{11}$ *не должна тождественно равняться нулю.*

В этих формулах и в дальнейшем ,,производные'' $\dfrac{\partial^k F}{\partial z_2^k} - F_{z_i^k} \quad F_{x_{21}^k x_{22}^k}$, $(i = 1,\ 2,\ 3)$ означают групповые или совокупные частные ,,производные'' автора, порядка k, т. е. результаты подстсановки в F вместо переменных x_{i1}, x_{i2} новых переменных x_{i1}^k, x_{i2}^k, где k — индекс (порядок групповой или совокупной ,,производной''). Новым переменным придаются такие значения, чтобы соответствующие определители не обращались в нуль. Само билинейное разложение и выражения для векторов $\bar{a} = \underset{3}{\bar{a}}$ и $\bar{b}$ получим, развернув определитель (2.1) по элементам первой строки и разрешив относительно F. Получим

$$(2.2)\qquad F = -\frac{\underset{3}{A}^{z_3}_{12}}{\underset{3}{A}^{z_3}_{11}} F_{z_3} - \frac{\underset{3}{A}^{z_3}_{13}}{\underset{3}{A}^{z_3}_{11}} F_{z_3^2} - \frac{\underset{3}{A}^{z_3}_{14}}{\underset{3}{A}^{z_3}_{11}} F_{z_3^3},$$

$$(2.3)\qquad \bar{a} = -\frac{\underset{3}{A}^{z_3}_{12}}{\underset{3}{A}^{z_3}_{11}} \bar{\beta}^1 - \frac{\underset{3}{A}^{z_3}_{13}}{\underset{3}{A}^{z_3}_{11}} \bar{\beta}^2 - \frac{\underset{3}{A}^{z_3}_{14}}{\underset{3}{A}^{z_3}_{11}} \bar{\beta}^3,$$

$$(2.4)\qquad \bar{b} = F_{z_3}\bar{\beta}_1 + F_{z_3^2}\bar{\beta}_2 + F_{z_3^3}\bar{\beta}_3,$$

---

(7) N есть число абстрактных переменных или размерность объемлющего пространства; $N - 1$ есть размерность пространства анаморфозы (при $N = 3$, $N - 1 = 2$ имеем плоскость). Очевидно, что N есть также порядок определителя Массо.

(8) Мы считаем, что $z_i(x_{i1};\ x_{i2})$, $i = 1,\ 2,\ 3$.

где $(\bar{\beta}_1, \beta_2, \bar{\beta}_3)$ — произвольный репер из трех постоянных некомпланарных векторов $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3$, а $(\bar{\beta}^1, \bar{\beta}^2, \bar{\beta}^3)$ — взаимный репер.

Проблема анаморфозы функции F может быть поставлена векторно: для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы нашлись три вектора $\underset{1}{a}$, $\underset{2}{\bar{a}}$, $\underset{3}{\bar{a}}$, *направления* каждого из которых зависели бы от переменных соответственно z_1, z_2, z_3, и чтобы имели $F \equiv (\underset{1}{a}\underset{2}{\bar{a}}\underset{3}{a})$.

За вектор $\underset{3}{a}$ можно принять построенный нами вектор $a = \underset{3}{\bar{a}}$ (см. (2.3.)). Векторы $\underset{1}{\bar{a}}$ и $\underset{2}{\bar{a}}$ найдутся как решения векторного уравнения $\bar{b} = [\underset{1}{a}\underset{2}{a}]$. Получаем теорему.

Теорема 2. *Для того, чтобы векторное уравнение* $\bar{b} = [\underset{1}{a}\underset{2}{a}]$, *где* $\underset{1}{a} = \underset{1}{a}(x_{11}; x_{12})$, $\underset{2}{a} = \underset{2}{\bar{a}}(x_{21}; x_{22})$ *и* $\bar{b}$ *известно* (см. (2.3.)), *было разрешимо при указанном распределенйи аргументов между неизвестными векторами* $\underset{1}{a}$ *и* $\underset{2}{a}$, *необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись слудеющие условия* (2.5) *и* (2.6), *в которых определители слева обозначены соответственно через* $\underset{(2)}{A}^{z_3}$ *и* $\underset{(1)}{A}^{z_3}$.

$$\underset{(2)}{A}^{z_3} \equiv \begin{vmatrix} F_{z_3} & F_{z_3^2} & F_{z_3^3} \\ F_{z_3 z_2} & F_{z_3^2 z_2} & F_{z_3^3 z_2} \\ F_{z_3 z_2^2} & F_{z_3^2 z_2^2} & F_{z_3^3 z_2^2} \end{vmatrix} \equiv 0, \tag{2.5}$$

$$\underset{(1)}{A}^{z_3} \equiv \begin{vmatrix} F_{z_3} & F_{z_3^2} & F_{z_3^3} \\ F_{z_3 z_1} & F_{z_3^2 z_1} & F_{z_3^3 z_1} \\ F_{z_3 z_1^2} & F_{z_3 z_1^2} & F_{z_3^3 z_1^2} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.6}$$

Выписывать векторы $\underset{1}{\bar{a}}$ и $\underset{2}{\bar{a}}$ не будем (см. [2]), тем более, что проекции этих векторов во взаимном репере $(\bar{\beta}^1, \bar{\beta}^2, \bar{\beta}^3)$, т. е. $\underset{1}{x_1}$, $\underset{1}{x_2}$, $\underset{1}{x_3}$ и $\underset{2}{x_1}$, $\underset{2}{x_2}$, $\underset{2}{x_3}$ даны в слудеющем параграфе.

§3. Имеет место основная теорема 3.

Теорема 3. *Для того, чтобы однозначная функция* $F(x_{11}; x_{12}; x_{21}; x_{22}; x_{31}; x_{32})$ *была представима в виде определителя Массо, указанного в* §1 *вида и, следователдно, чтобы уравнение* $F = 0$ *допускало в плоскости номограмму из выравненных точек с тремя, воодще говоря, бинарными полями* $(x_{11}; x_{12})$, $(x_{21}; x_{22})$, $(x_{31}; x_{32})$, *соответствующую этому представлению, необходимо и достаточно, чтобы одновременно удовлетворялись условия* (2.1), (2.5), (2.6), *при условии, что* $A^{z_3}_{11} \not\equiv 0$.

Необходимость легко вытекает в процессе определения векторов $\underset{3}{\bar{a}}$, $\underset{1}{\bar{a}}$, $\underset{2}{a}$. А достаточность доказана ниже равенствами (3.13) и (3.21).

Следствие 1. *Если функция* F *задана точно в трехчленной билинейной* *(с разделенными переменными) форме ранга 3* $F \equiv f_3 f_{12} + g_3 g_{12} + h_3 h_{12}$(9), *то критерий* (2.1) *всегда удовлетворяется.* Достаточно проверить критерий (2.5) и (2.6). Для анаморфозируемости такой функции необходим и достаточен следующий геометрический критерий: бинарное поле $\underset{12}{x_1} = f_{12}$, $\underset{12}{x_2} = g_{12}$, $\underset{12}{x_3} = h_{12}$ должно быть прямолинейным(10) (см. также подстрочное примечание на стр. 128 работы [5]).

Следствие 2. *Если одно из условий* (2.5) *или* (2.6) *не удовлетворено, т. е.* $\underset{(2)}{A^{z_3}} \not\equiv$ *или* $\underset{(1)}{A^{z_3}} \not\equiv 0$, *то соответственное поле переменных* $z_1(x_{11};\, x_{12})$ *или поле переменных* $z_2(x_{21};\, x_{22})$ *будет содержать и линии, соответствующие другой переменной (многопараметрические поля с повторением переменных).*

Следствие 3. *Номограмма из выравненных точек некоторого уравнения* $F(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$, *состоящая из любых шкал* z_1 *и* z_2 *и прямолинейного бинарного поля* $(z_3;\, z_4)$, *неоднозначна; возможна еще неколлинеарная ей (коррелятивная) номограмма того же уравнения со шкалами* z_3 *и* z_4 *и прямолинейным бинарным полем* $(z_1;\, z_2)$.

Это следует также из того, что если $F \equiv (\underset{1}{\overline{a}}\,\underset{2}{\overline{a}}[\underset{3}{a}\,\underset{4}{\overline{a}}])$, то одновременно $F \equiv (\underset{3}{\overline{a}}\,\underset{4}{a}[\underset{1}{\overline{a}}\,\underset{2}{\overline{a}}])$, где направление вектора $\underset{i}{a}$, $i = 1, 2, 3, 4$, зависит только от z_i(11).

Теорема 4. (Об игнорировании критериев).

Если условие (2.1) *выполнено, а оба условия* (2.5) *и* (2.6) *или одно из них не выполнены, то номограмма из выравненных точек уравнения* $F = 0$, *а вместе с тем проекции векторов* $\underset{1}{\overline{a}}$ *и* $\underset{2}{\overline{a}}$ *определятся следующими уравнениями* (3.1), (3.2), (3.3) *в однородных координатах*:

$$(3.1)\qquad \underset{1}{x_1} = \begin{vmatrix} F_{z_3^2} & F_{z_3^3} \\ F_{z_3^2 z_2} & F_{z_3^3 z_2} \end{vmatrix}, \quad \underset{1}{x_2} = \begin{vmatrix} F_{z_3^3} & F_{z_3} \\ F_{z_3^3 z_2} & F_{z_3 z_2} \end{vmatrix}, \quad \underset{1}{x_3} = \begin{matrix} F_{z_3} & F_{z_3^2} \\ F_{z_3 z_2} & F_{z_3^3 z_2} \end{matrix},$$

$$(3.2)\qquad \underset{2}{x_1} = \begin{vmatrix} F_{z_3^2} & F_{z_3^3} \\ F_{z_3^3 z_1} & F_{z_3^3 z_1} \end{vmatrix}, \quad \underset{2}{x_2} = \begin{vmatrix} F_{z_3^3} & F_{z_3} \\ F_{z_3^3 z_1} & F_{z_3 z_1} \end{vmatrix}, \quad \underset{2}{x_3} = \begin{vmatrix} F_{z_3} & F_{z_3^2} \\ F_{z_3 z_1} & F_{z_3^2 z_1} \end{vmatrix},$$

---

(9) f_i, g_i, h_i — функции x_{i1} и x_{i2}, а f_{kj}, g_{kj}, h_{kj} — функции переменных $x_{k1}, x_{k2}, x_{j1}, x_{j2}$.

(10) Действительно, в случае анаморфозируемости F,

$$\underset{3}{\overline{a}} = f_2\overline{r} + g_3 j + h_3 k, \quad b = f_{12}\overline{r} + g_{12} j + h_{12}\overline{k} \equiv [\underset{2}{\overline{a}}\,\underset{2}{\overline{a}}],$$

где направления вектор-функций $\underset{1}{\overline{a}}$ и $\underset{2}{a}$ зависят соответственно от z_1 и z_2. Значит, при $z_2 = \mathrm{const}$ имеем $\overline{b}\underset{2}{\overline{a}} \equiv 0$, т. е. f_{12}, g_{12}, h_{12} для каждого $z_2 = \mathrm{const}$ связаны линейной однородной зависимостью, т. е. определяют прямую. Аналогично, при $z_1 = \mathrm{const}$.

(11) Эта теорема в обобщенном толковании остается в силе и в том случае, если z_i — не вещественные, а вообще абстрактные, в частности, комплексные переменные.

$$(3.3)\qquad \underset{3}{x_1} = \begin{vmatrix} F_{z_1z_2} F_{z_3^2z_1z_2} F_{z_3^3z_1z_2} \\ F_{z_1^2z_2^2} F_{z_3^2z_1^2z_2^2} F_{z_3^3z_1z_2} \\ F_{z_1^3z_2^3} F_{z_3^2z_1^2z_2^2} F_{z_3^3z_1z_2} \end{vmatrix}, \quad \underset{3}{x_2} = \begin{vmatrix} F_{z_3^3z_1z_2} F_{z_3z_1z_2} F_{z_1z_2} \\ F_{z_3^3z_1^2z_2^2} F_{z_3z_1^2z_2^2} F_{z_1^2z_2^2} \\ F_{z_3^3z_1^2z_2^2} F_{z_3z_1^3z_2^3} F_{z_1^3z_2^3} \end{vmatrix}, \quad \underset{3}{x_3} = \begin{vmatrix} F_{z_1z_2} F_{z_3z_1z_2} F_{z_3^2z_1z_2} \\ F_{z_1^2z_2^2} F_{z_3z_1^2z_2^2} F_{z_3^2z_1^2z_2^2} \\ F_{z_1^3z_2^3} F_{z_3z_1^3z_2^3} F_{z_3^2z_1^3z_2^3} \end{vmatrix}.$$

Формулы (3.3) вытекают из (2.2). Правые же части (3.1) и (3.2) соответственно адъюнкты элементов последних строк определителей в равенствях (2.5) и (2.6), выражающих очевидное необходимое условие анаморфозируемости: — что вектор-функция $F_{z_3}\bar{i} + F_{z_3^2}\bar{j} + F_{z_3^3}\bar{k}$ для $z_1 = \text{const}$ (соответственно $z_2 = \text{const}$) при изменении $z_2(z_1)$ остается в одной плоскости $z_1 = \text{const}$ ($z_2 = \text{const}$); ниже эта роль условий (2.5) и (2.6) строго доказана равенством (3.21) и ему аналогичным.

Приведем пример: Для левой части уравнения четвертого номографического порядка Коши $F \equiv f_1f_3 + f_2g_3 + h_3 = 0$, ($A$) вычисляя, найдем, что $\underset{3}{A}^{z_3} \equiv 0, \quad \underset{(1)}{A}^{z_3} \equiv 0, \quad \underset{(2)}{A}^{z_3} \equiv 0,$

$$(3.4)\qquad \underset{3}{A}{}_{11}^{z_3} \equiv \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & 1 \\ f_1'' & f_2'' & 1 \\ f_1''' & f_2''' & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_3' & g_3' & 1 \\ f_3'' & g_3'' & 1 \\ f_3''' & g_3''' & 1 \end{vmatrix} \equiv w(f_1'; f_2'; 1)w'(f_3; g_3; h_3) \not\equiv 0,$$

так как первый сомножитель является ,,вронскианом'' функций $f_1', f_2', 1$ двух переменных z_1 и z_2, а второй — ,,вронскианом'' функций f_3', g_3', h_3' одной переменной z_3, которые отличны от нуля [3]. Уравнения шкал с помощью (3.1), (3.2), (3.3) читатель легко найдет.

Для формы Кларка $F \equiv f_1f_2f_3 + (f_1 + f_2)g_3 + h_3 = 0$, ($B$) вычисляя, легко найдем

$$(3.5)\qquad \underset{3}{A}{}_{11}^{z_3} \equiv \begin{vmatrix} f_3 & g_3 & h_3 \\ f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1f_2 & f_1 + f_2 & 1 \\ f_1'f_2' & f_1' + f_2' & 1 \\ f_1''f_2'' & f_1'' + f_2'' & 1 \end{vmatrix} \equiv w_3(f_3; g_3; h_3)\, w(f_1f_2; f_1 + f_2; 1),$$

т. е. имеем произведение двух ,,вронскианов'', которые не могут тождественно равняться нулю, если только форма Кларка не вырождается в уравнение 3 порядка. В противном случае имели бы место соответственно или одновременно равенства $\lambda f_3 + \mu g_3 + \nu h_3 \equiv 0$ и $\lambda_1 f_1 f_2 + \mu_1(f_1 + f_2) + \nu_1 \equiv 0$, где $\lambda, \mu, \nu, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ — постоянные.

Выразив одну из функций f_3, g_3, h_3 через 2 другие или, соответсвенно, одну из функций f_1f_2 и $f_1 + f_2$ через другую, после подстановки в уравнение $F = 0$, пришли бы к уравнению третьего порядка. Мы можем, таким образом, считать, что $\underset{3}{A}{}_{11}^{z_3}$ для невырождающихся форм Коши и Кларка не равно нулю, что всегда можно получить, надлежащим образом ,,дифференцируя'' в равенстве (2.1), если только $\underset{3}{A}{}_{11}^{z_3} \not\equiv 0$.

Совершенно аналогично пройдет рассмотрение общих уравнений 4-го и 6-го порядков.

Предложим читателю следующую задачу.

Пусть

$$(3.6)\qquad F_{(23)i} \equiv A_i\varphi_2\varphi_3 + B_i\psi_2\psi_3 + C_i\varphi_2\psi_3 + D_i\psi_2\varphi_3 + E_i\varphi_2\xi_3 + \\ + F_i\psi_2\xi_3 + G_i\xi_2\varphi_3 + H_i\xi_2\psi_3 + K_i\xi_2\xi_3, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Пусть φ_i, ψ_i, ξ_i — функции переменной z_i. Исследовать номографируемость функции 8 номографического порядка

$$(3.7)\qquad \Phi \equiv \varphi_1 F_{(23)1} + \psi_1 F_{(23)2} + \xi_1 F_{(23)3}.$$

Рассмотреть частный случай 6 номографического порядка

$$(3.7^1)\qquad \Phi \equiv A\varphi_1\varphi_2\varphi_3 + B\psi_1\psi_2\psi_3 + C\xi_1\xi_2\xi_3.$$

Мы предлагаем найти, пользуясь данными критериями, соотношения, которым должны удовлетворять постоянные A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i, K_i, A, B, C для того, чтобы функции (3.7) и (3.7^1) были номографируемы. Так как условие (2.1) автоматически выполняется, то достаточно проверить условия (2.5) и (2.6); выполнение условий (2.5) и (2.6) сверх условия (2.1) гарантирует, что поле или шкала переменной $z_i(x_{i1};\ x_{i2})$ $(i = 1, 2)$ будет зависеть только от переменной z_i (т. е. от x_{i1}, x_{i2}). Доказательство того, что при выполнении условий (2.1), (2.5) и (2.6) формулы (3.1)—(3.3) дают решение, основано на методе условного дифференцирования.

Проведем это доказательство основной теоремы 3.

Формулы (3.1), (3.2), (3.3) позволяют записать определитель Массо в виде

$$(3.8)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \underset{1}{x_1} & \underset{1}{x_2} & \underset{1}{x_3} \\ \underset{2}{x_1} & \underset{2}{x_2} & \underset{2}{x_3} \\ \underset{3}{x_1} & \underset{3}{x_2} & \underset{3}{x_3} \end{vmatrix}.$$

Положим

$$(3.9)\qquad \begin{array}{lllll} F_{z_3^3} = a, & F_{z_3} = b, & F_{z_3^2} = e & F_{z_3^2 z_2^2} = r, & F_{z_3^3 z_2^2} = p, \\ F_{z_3^3 z_2} = c, & F_{z_3 z_2} = d, & F_{z_3^2 z_2} = k, & F_{z_3 z_2^2} = \tau, & F_{z_3 z_1^2} = \lambda, \\ F_{z_3^3 z_1} = m, & F_{z_3 z_1} = n, & F_{z_3^2 z_1} = s & F_{z_3^2 z_1^2} = \mu, & F_{z_3^3 z_1^2} = \nu, \end{array}$$

Используя таблицу (3.9), найдем после небольших вычислений

$$(3.10)\qquad \Delta_{31} = b \begin{vmatrix} a & c & m \\ b & d & n \\ e & k & s \end{vmatrix}, \quad \Delta_{32} = e \begin{vmatrix} a & c & m \\ b & d & n \\ e & k & s \end{vmatrix}, \quad \Delta_{33} = a \begin{vmatrix} a & c & m \\ b & d & n \\ e & k & s \end{vmatrix},$$

$$(3.11)\qquad \begin{vmatrix} a & c & m \\ b & d & n \\ e & k & s \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} F_{z_3} & F_{z_3^2} & F_{z_3^3} \\ F_{z_3 z_1} & F_{z_3^2 z_1} & F_{z_3^3 z_1} \\ F_{z_3 z_2} & F_{z_3 z_2} & F_{z_3^3 z_2} \end{vmatrix} = -B_{z_3} \equiv -\bar{B},$$

где через B и $\bar{B}$ обозначены определители (1.15) и (1.14):

$$(3.12)\qquad B \equiv \begin{vmatrix} F & F_{z_3} & F_{z_3^2} \\ F_{z_1} & F_{z_3 z_1} & F_{z_3^2 z_1} \\ F_{z_2} & F_{z_3 z_2} & F_{z_3^3 z_1} \end{vmatrix}, \qquad \bar{B} \equiv \begin{vmatrix} F_{z_3} & F_{z_3^2} & F_{z_3^3} \\ F_{z_3 z_1} & F_{z_3^2 z_1} & F_{z_3^3 z_1} \\ F_{z_3 z_2} & F_{z_3^2 z_2} & F_{z_3^3 z_2} \end{vmatrix}.$$

Равенство (3.8), принимая во внимание (3.3), (2.1) и (3.9), если разложить по элементам последней строки, примет вид в силу (2.2):

$$(3.13)\qquad \Delta = -(\underset{3}{A}{}_{12}^{z_3} F_{z_3} + \underset{3}{A}{}_{13}^{z_3} F_{z_3^2} + \underset{3}{A}{}_{14}^{z_3} F_{z_3^3}) B_{z_3} = B_{z_3} \underset{3}{A}{}_{11}^{z_3} F$$

что дает выражение анаморфозирующего множителя (см. ниже (3.17))

$$(3.14)\qquad \sigma = B_{z_3} \underset{3}{A}{}_{11}^{z_3} \equiv \bar{B} \underset{3}{A}{}^{z_3},$$

по умножении на который данная функция принимает вид определителя Массо (3.8).

Докажем теперь непосредственной проверкой, что определенные равенствами (3.1), (3.2), (3.3) однородные координаты точек номограммы $\underset{i}{x_j}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ определяют однопараметрические шкалы переменных z_i(12). Для этого достаточно показать, что отношения

$$(3.15)\qquad \underset{i}{x_1} : \underset{i}{x_2} : \underset{i}{x_3} \quad (i = 1, 2, 3),$$

зависят только от переменной z_i $(i = 1, 2, 3)$.

Для этого запишем формулы (3.1), (3.2), 3.3) через адъюнкты определителя $\bar{B}$. Имеем, принимая во внимание также (2.5), (2.6) и (3.12)

$$(3.16)\qquad \underset{1}{x_1} = -\bar{B}_{21} \equiv \underset{(2)}{A}{}_{31}^{z_3}, \quad \underset{1}{x_2} = -\bar{B}_{22} \equiv \underset{(2)}{A}{}_{32}^{z_3}, \quad \underset{1}{x_3} = -\bar{B}_{23} \equiv \underset{(2)}{A}{}_{33}^{z_3},$$

$$(3.17)\qquad \underset{2}{x_1} = \bar{B}_{31} \equiv \underset{(1)}{A}{}_{31}^{z_3}, \quad \underset{2}{x_2} = \bar{B}_{32} \equiv \underset{(1)}{A}{}_{32}^{z_3}, \quad \underset{2}{x_3} = \bar{B}_{33} \equiv \underset{(1)}{A}{}_{33}^{z_3},$$

$$(3.18)\qquad \underset{3}{x_1} = -\underset{3}{A}{}_{12}^{z_3}, \quad \underset{3}{x_2} = -\underset{3}{A}{}_{13}^{z_3}, \quad \underset{3}{x_3} = -\underset{3}{A}{}_{14}^{z_3}.$$

Докажем теперь сделанное уже утверждение о том, что направление вектора $\underset{i}{\bar{a}}$ зависит лишь от z_i или, что то же, что отношение определителей каждой из строк определителя Δ, определенного равенством (3.8), зависит лишь от z_i, где i — номер строки.

---

(12) И, конечно, двухпараметрические шкалы пар переменных x_{i1}, x_{i2} $(i = 1, 2, 3)$, которые (шкалы) могут быть, вообще говоря, бинарными полями.

Покажем, например, что

$$\frac{\underset{(2)}{A}{}^{z_3}_{31}}{\underset{(2)}{A}{}^{z_3}_{33}} = \left(\frac{\underset{(2)}{A}{}^{z_3}_{31}}{\underset{(2)}{A}{}^{z_3}_{33}}\right)_{z_2} \tag{3.19}$$

или

$$\frac{\begin{vmatrix} F_{z_3^2} & F_{z_3^3} \\ F_{z_3^2 z_2} & F_{z_3^3 z_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{z_3} & F_{z_3^2} \\ F_{z_3 z_2} & F_{z_3^2 z_2} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} F_{z_3^2 z_2} & F_{z_3^3 z_3} \\ F_{z_3^2 z_2^2} & F_{z_3^3 z_2^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{z_3 z_2} & F_{z_3^2 z_2} \\ F_{z_3 z_2^2} & F_{z_3^2 z_2^2} \end{vmatrix}}. \tag{3.20}$$

Принимая во внимание таблицу (3.9), равенство (3.20) перепишем в виде

$$\frac{\begin{vmatrix} e & a \\ k & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & c \\ d & k \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} k & c \\ r & p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d & k \\ \tau & r \end{vmatrix}}. \tag{3.20¹}$$

Числитель разности между левой и правой частью равенства (3.20¹), как легко проверить, после небольших вычислений примет вид:

$$-k \begin{vmatrix} b & e & a \\ d & k & c \\ \tau & r & p \end{vmatrix} \equiv -F_{z_3^2 z_2} \underset{(2)}{A}{}^{z_3} \equiv 0 \tag{3.21}$$

в силу (2.5), что и доказывает наше утверждение.

Так будет и со второй строкой определителя Δ.

Что же касается третьей строки, то она по построению не зависит ни от z_1, ни от z_2.

Интересно отметить и подчеркнуть, что последнее доказательство прямо вовсе не опирается на равенство (2.1). Поэтому, если дана функция в виде

$$f_3 f_{12} + g_3 g_{12} + h_3 h_{12}, \tag{3.22}$$

то ее анаморфозируемость проверяется лишь двумя условиями (2.5) и (2.6), геометрический смысл которых, очевидно, заключается в том, что бинарное поле, заданное однородными координатами

$$\underset{12}{x_1} = f_{12}, \quad \underset{12}{x_2} = g_{12}, \quad \underset{12}{x_3} = h_{12}(^{13}) \tag{3.23}$$

есть поле прямолинейное.

Действительно, подставив (3.22) в (2.5) и (2.6) и принимая во внимание, что

$$w'(f_3;\, g_3;\, h_3) = \begin{vmatrix} f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix} \not\equiv 0, \tag{3.24}$$

получим, деля обе части равенства (2.5) и (2.6) на этот множитель, равенства

$$(3.25)\qquad \begin{vmatrix} f_{12} & g_{12} & h_{12} \\ f_{12'} & g_{12'} & h_{12'} \\ f_{12''} & g_{12''} & h_{12''} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} f_{12} & g_{12} & h_{12} \\ f_{1'2} & g_{1'2} & h_{1'2} \\ f_{1''2} & g_{1''2} & h_{1''2} \end{vmatrix} = 0,$$

выражающие, очевидно, соответственно условия прямолинейности линий поля $z_1 = \text{const}$ и $z_2 = \text{const}$.

Мы приведем еще два тождества, находящих применения при определении анаморфозирующего множителя для функции F, номограмма которой строится по несколько измененным формулам, по сравнению с (3.16), скажем, по формулам, получаемым для билинейно заданной функции F, после упрощения однородных координат точек шкал путем отбрасывания общего сомножителя и проективного преобразования, упрощающего выражения координат (см. ниже §9 и §10):

$$(3.26)\qquad \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & e \\ d_1 & f_1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \equiv b \begin{vmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ c_1 & d_1 & f_1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & f \\ b & e \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ a & b \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d_1 & f_1 \\ b & e \end{vmatrix} \end{vmatrix} \equiv b \begin{vmatrix} c & d & f \\ c_1 & d_1 & f_1 \\ a & b & e \end{vmatrix},$$

которыми мы пользовались при получении равенств (3.10) и (3.21).

Обобщение всех приведенных тождеств на N-мерное пространство важно для N-мерной номографии.

Тождества (3.26) удобно также записать так:

$$(3.27)\qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f & k \\ c & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & e \\ c & g \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f & h \\ c & d \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a & b & e \\ f & h & k \\ c & d & g \end{vmatrix}.$$

Имеет место проверяемое простым вычислением обеих частей, как и (3.27), тождество

$$(3.28)\qquad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{42} & a_{43} & a_{41} \\ b_{42} & b_{43} & b_{41} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ b_{42} & b_{43} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

---

(13) Само собой разумеется, что функции f_{12}, g_{12}, h_{12} должны быть однородными. Либо надо в правые части (3.23) ввести неопределенный множитель ϱ.

т. е. разность такого рода произведений определителей 3 порядка является линейной комбинацией определителей четвертого порядка.

Пользуясь этим тождеством, получаем двоякое тождественное представление следующей разности произведений, встречающейся в бесквадратурной номографии, связывающей две четверки четырехмерных векторов $(\underset{1}{\bar{a}}, \underset{2}{\bar{a}}, \underset{3}{\bar{a}}, \underset{4}{\bar{a}})$ и $(\underset{1}{\bar{\alpha}}, \underset{2}{\bar{\alpha}}, \underset{3}{\bar{\alpha}}, \underset{4}{\bar{\alpha}})$:

$$(3.29)\qquad \begin{vmatrix} \underset{1}{a_4} & \underset{1}{a_1} & \underset{1}{a_3} \\ \underset{3}{a_4} & \underset{3}{a_1} & \underset{3}{a_3} \\ \underset{2}{a_4} & \underset{2}{a_1} & \underset{2}{a_3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underset{3}{a_4} & \underset{3}{a_1} & \underset{3}{a_2} \\ \underset{1}{\alpha_4} & \underset{1}{\alpha_1} & \underset{1}{\alpha_2} \\ \underset{2}{\alpha_4} & \underset{2}{\alpha_1} & \underset{2}{\alpha_2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \underset{1}{a_4} & \underset{1}{a_1} & \underset{1}{a_2} \\ \underset{3}{a_4} & \underset{3}{a_1} & \underset{3}{a_2} \\ \underset{2}{a_4} & \underset{2}{a_1} & \underset{2}{a_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underset{3}{a_4} & \underset{3}{a_1} & \underset{3}{a_3} \\ \underset{1}{\alpha_4} & \underset{1}{\alpha_1} & \underset{1}{\alpha_3} \\ \underset{2}{\alpha_4} & \underset{2}{\alpha_1} & \underset{2}{\alpha_3} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \underset{3}{a_4} & \underset{3}{a_1} \\ \underset{1}{\alpha_4} & \underset{1}{\alpha_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underset{1}{a_1} & \underset{1}{a_2} & \underset{1}{a_3} & \underset{1}{a_4} \\ \underset{3}{a_1} & \underset{3}{a_2} & \underset{3}{a_3} & \underset{3}{a_4} \\ \underset{2}{a_1} & \underset{2}{a_2} & \underset{2}{a_3} & \underset{2}{a_4} \\ \underset{2}{\alpha_1} & \underset{2}{\alpha_2} & \underset{2}{\alpha_3} & \underset{2}{\alpha_4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \underset{3}{a_4} & \underset{3}{a_1} \\ \underset{2}{\alpha_4} & \underset{2}{\alpha_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underset{1}{a_1} & \underset{1}{a_2} & \underset{1}{a_3} & \underset{1}{a_4} \\ \underset{3}{a_1} & \underset{3}{a_2} & \underset{3}{a_3} & \underset{3}{a_4} \\ \underset{2}{a_1} & \underset{2}{a_2} & \underset{2}{a_3} & \underset{2}{a_4} \\ \underset{1}{\alpha_1} & \underset{1}{\alpha_2} & \underset{1}{\alpha_3} & \underset{1}{\alpha_4} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \underset{3}{a_4} & \underset{3}{a_1} \\ \underset{1}{a_1} & \underset{1}{a_4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underset{1}{\alpha_1} & \underset{1}{\alpha_2} & \underset{1}{\alpha_3} & \underset{1}{\alpha_4} \\ \underset{3}{a_1} & \underset{3}{a_2} & \underset{3}{a_3} & \underset{3}{a_4} \\ \underset{2}{\alpha_1} & \underset{2}{\alpha_2} & \underset{2}{\alpha_3} & \underset{2}{\alpha_4} \\ \underset{3}{\alpha_1} & \underset{3}{\alpha_2} & \underset{3}{\alpha_3} & \underset{3}{\alpha_4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \underset{3}{a_4} & \underset{3}{a_1} \\ \underset{2}{a_4} & \underset{2}{a_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underset{1}{\alpha_1} & \underset{1}{\alpha_2} & \underset{1}{\alpha_3} & \underset{1}{\alpha_4} \\ \underset{3}{a_1} & \underset{3}{a_2} & \underset{3}{a_3} & \underset{3}{a_4} \\ \underset{2}{\alpha_1} & \underset{2}{\alpha_2} & \underset{2}{\alpha_3} & \underset{2}{\alpha_4} \\ \underset{1}{a_1} & \underset{1}{a_2} & \underset{1}{a_3} & \underset{1}{a_4} \end{vmatrix} .$$

§4. Решим задачу об условиях совпадения шкал z_1 и z_2(14) (бинарная симметрия) (аналогично будет решаться более интересный вопрос совпадения трех шкал (тернарная симметрия), на котором мы здесь останавливаться не будем).

Условие согласно (3.1) и (3.2) запишется так:

$$(4.1)\qquad \frac{\underset{1}{x_1}}{\underset{2}{x_1}} = \frac{\underset{1}{x_2}}{\underset{2}{x_2}} = \frac{\underset{1}{x_3}}{\underset{2}{x_3}} .$$

Для сокращения положим

$$(4.2)\qquad \begin{array}{lll} a = F_{z_3^2}, & b = F_{z_3^3}, & m = F_{z_3}, \\ c = F_{z_3^2 z_2}, & d = F_{z_3^3 z_2}, & q = F_{z_3 z_2}, \\ e = F_{z_3^2 z_1}, & f = F_{z_3^3 z_1}, & s = F_{z_3 z_1} . \end{array}$$

С помощью (3.1) и (3.2), (4.2) равенство (4.1) примет вид:

---

(14) На z_i следует смотреть как на точку с координатами x_{i1}, x_{i2} в некотором двумерном пространстве, либо, если угодно, как на некоторое комплексное число.

Более того, z_i — это любая последовательность чисел-координат точки z_i в любом пространстве. Если угодно, это даже абстрактная переменная.

СИНОПСИСЫ

Вильнер И. А., *Бесквадратурная номография. Алгебраическая номография и проблема анаморфозы функций в двухмерной плоскости при n = 6 переменных*, Mat. časop. *17* (1967), 169—205. (Русск.)

В настоящей работе дается систематическое изложение бесквадратурного метода решения проблемы анаморфозы функций для случая плоскости.

Грмова Р., *Обобщенные идеалы в полугруппах*, Mat. časop. *17* (1967), 206—223. (Англ.)

В статье определяется понятие (B_1, B_2)-идеала полугруппы S (B_1, B_2 — некоторые подмножества S), которое является обобщением всех до сих пор определенных идеалов полугруппы. При некоторых предположениях описаны минимальные (B_1, B_2)-идеалы и (B_1, B_2)-цоколь в S. Определяется понятие главного (B_1, B_2)-идеала и обобщенных соотношений Грина. Приведены некоторые применения.

Хвал В., *К теории пространственных определителей*, Mat. časop. *17* (1967), 224—233. (Словацк.; рез. русск.)

В этой статье дано новое, более ,,геометрическое'' определение определителя пространственной матрицы и доказаны теоремы, характеризующие его как полилинейную форму.

Зелинка Б., *Разложение полного графа по заданной группе*, Mat. časop. *17* (1967), 234—239. (Чешск., рез. англ.)

Пусть задан полный граф $\langle n \rangle$ с n вершинами и подгруппа H его группы автоморфизмов. Разложение $\mathscr{R}$ графа $\langle n \rangle$ в изоморфные друг другу подграфы без общих ребер каждый из которых содержит все вершины графа $\langle n \rangle$, называется простым разложением графа $\langle n \rangle$ по группе H тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначное отображение элементов α из H на графы $G(\alpha)$ разложения $\mathscr{R}$ такое, что для каждых $\alpha \in H$, $\beta \in H$ граф $G(\alpha)$ отображен в отображении β на граф $G(\beta\alpha)$. Статья содержит теорему о разложении по фактор-группе, теоремы существования для разложений по заданной абелевой группе (когда заданы число вершин графа и порядок группы) и теорему о неподвижной вершине.

Знам Ш., *Эквивалентность одной задачи из теории чисел с задачей из теории графов*, Mat. časop. *17* (1967), 240—241. (Англ.)

Роса А., *О разложениях полного графа на 4k-угольники*, Mat. časop. *17* (1967), 242—246. (Русск.)

В статье дается положительный ответ на один вопрос, поставленный А. Коцигом. Далее сформулированы и решены две смежные задачи, касающиеся разложений полных графов на $4k$-угольники.

SYNOPSES

Viĺner I. A., *Quadratureless nomography. Algebraic nomography and the problem of the anamorphosis of functions in the two-dimensional plane with $n = 6$ arguments,* Mat. časop. *17* (1967), 169—205. (Russian.)

The paper gives a systematic presentation of a solution of the problem of anamorphosis of functions for the case of a two-dimensional plane by means of an algebraic method.

Hrmová R., *Relative ideals in semigroups,* Mat. časop. *17* (1967), 206—223. (English.)

The paper deals with the notion of a (B_1, B_2)-ideal of a semigroup S (B_1, B_2 are subsets of S), which is a generalization of all up to now introduced kinds of ideals of semigroups. Under some conditions minimal (B_1, B_2)-ideals and the (B_1, B_2)-socle of S are described. The notion of a principal (B_1, B_2)-ideal and the notion of generalized Green's relations are introduced. In the last section some applications are given.

Chvál V., *A contribution to theory of space determinants,* Mat. časop. *17* (1967), 224—233. (Slovak, Russian summary.)

In this paper a new, more „geometric" definition of determinant of a space matrix is given and various theorems characterising the space determinant as a polylinear form are proved.

Zelinka B., *Decomposition of the complete graph according to a given group,* Mat. časop. *17* (1967), 234—239. (Czech, English summary.)

Let the complete graph $\langle n \rangle$ with n vertices and a subgroup H of its group of automorphisms be given. A decomposition $\mathscr{A}$ of the graph $\langle n \rangle$ into subgraphs which are isomorphic and edge-disjoint with one another and each of which contains all vertices of $\langle n \rangle$ is called a simple decomposition of the graph $\langle n \rangle$ according to the group H, if and only if there exists a one-to-one mapping of elements α of H on the graphs $G(\alpha)$ of $\mathscr{A}$ such that for each $\alpha \in H$, $\beta \in H$ the graph $G(\alpha)$ is mapped by the automorphism β onto $G(\beta\alpha)$.

The paper contains a theorem on the decomposition according to a factor group of a given group, existence theorems for the decomposition according to an Abelian group (when the number of vertices of the graph and the order of the group are given) and a theorem on a fixed vertex.

Znám Š., *Equivalence of a number-theoretical problem with a problem from the graph theory,* Mat. časop. *17* (1967), 240—241. (English.)

Rosa A., *Concerning decompositions of complete graphs into 4k-gons,* Mat. časop. *17* (1967), 242—246. (Russian.)

The paper gives an affirmative answer to a question of A. Kotzig. Further two related problems concerning the decompositions of complete graphs into $4k$-gons are formulated and solved.

$$\text{(4.3)}\qquad \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & b \\ s & f \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} m & a \\ q & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & a \\ s & e \end{vmatrix}}.$$

Равенство первых двух отношений, равенство второго и третьего отношений, равенство первого и третьего отношениий в силу тождеств (3.26), (3.27) соответственно примут вид:

$$\text{(4.4)}\qquad b\begin{vmatrix} a & b & m \\ c & d & q \\ e & f & s \end{vmatrix} = 0, \quad m\begin{vmatrix} b & m & a \\ d & q & c \\ f & s & e \end{vmatrix} = 0, \quad a\begin{vmatrix} b & a & m \\ d & c & q \\ f & e & s \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, поскольку a, b и m не равны нулю одновременно, то

$$\text{(4.5)}\qquad \begin{vmatrix} a & b & m \\ c & d & q \\ e & f & s \end{vmatrix} = 0.$$

Из формул (4.5), (4.2) и (3.18) немедленно вытекает (см. выше определение B и $\bar{B}$ равенствами (3.12) и (3.11)), что

$$\text{(4.6)}\qquad \bar{B} \equiv \begin{vmatrix} F_{z_3} & F_{z_3^2} & F_{z_3^3} \\ F_{z_3 z_1} & F_{z_3^2 z_1} & F_{z_3^3 z_1} \\ F_{z_3 z_2} & F_{z_3^2 z_2} & F_{z_3^3 z_2} \end{vmatrix} = 0.^{(15)}$$

Это и есть условие бинарной симметрии шкал z_1 и z_2.

Легко видеть, что *тождественное обращение* $\bar{B}$ *в нуль исключается*, так как означало бы тривиальный случай вырождения обеих шкал z_1 и z_2 в одну точку.

Как мы увидим, это условие необходимо, но не достаточно. Оно будет и достаточным в том случае, если при наличии зависимости (4.6), выражения x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} при $i = 1$ или 2 одновременно не обращаются в нуль.

Это условие устанавливает зависимость между z_1 и z_2 в совпадающих пометках, так как, если и выполняется, то нетождественно.

Применим это условие к уравнению Коши. Получим легко

---

(15) Если (4.6) влечет одновременное обращение в нуль всех $x_{1,2,3}$ при каком-нибудь i, то вопрос останется открытым и потребеут удаления из $\underset{i}{x}_1$, $\underset{i}{x}_2$, $\underset{i}{x}_3$ соответствующего множителя, обращающегося в нуль, поскольку $|\underset{i}{x}_1| + |\underset{i}{x}_2| + |\underset{i}{x}_3| \neq 0$ при $i = 1$ или 2. Ясно, что $B = 0$; это можно предполагать, т. к. тогда и подавно ${}_3A^{z_3}_{11} \equiv 0$ (см. (2.1), (3.12), (3.17), (3.18)).

$$(4.7)\qquad \bar{B} \equiv \begin{vmatrix} f_1 f_3' + f_2 g_3' + h_3', \ldots \\ f_1' f_3' + f_2 g_3' + h_3', \ldots \\ f_1 f_3' + f_2' g_3' + h_3', \ldots \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix} \begin{matrix} f_1 & f_2 & 1 \\ f_1' & f_2 & 1 \\ f_1 & f_2' & 1 \end{matrix} \equiv$$

$$\equiv w'(f_3;\, g_3;\, h_3)\,(f_1' - f_1)\,(f_2' - f_2) \neq 0.(^{16})$$

Первый множитель не должен равняться нулю, так как тогда бы $\bar{B}$ тождественно равнялось нулю. Таким образом, здесь нет совпадения пометок. Возьмем форму Кларка. Аналогично найдем:

$$(4.8)\qquad \bar{B} \equiv \begin{vmatrix} f_3' f_1 f_2 + g_3'(f_1 + f_2) + h_3', \ldots \\ f_3' f_1' f_2 + g_3'(f_1' + f_2) + h_3', \ldots \\ f_3' f_1 f_2' + g_3'(f_1 + f_2') + h_3', \ldots \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} f_3', & g_3', & h_3' \\ f_3'', & g_3'', & h_3'' \\ f_3''', & g_3''', & h_3''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 f_2, & f_1 + f_2, & 1 \\ f_1' f_2, & f_1' + f_2, & 1 \\ f_1 f_2', & f_1 + f_2', & 1 \end{vmatrix} \equiv w'(f_3;\, g_3;\, h_3)\,(f_1' - f_1)\,(f_2' - f_2)\,(f_2 - f_1).$$

Так как $w'(f_3;\, g_3;\, h_3) \neq 0$ и $(f_1' - f_1)\,(f_2' - f_2) \neq 0$, то уравнение

$$(4.9)\qquad f_2 - f_1 = 0$$

и устанавливает зависимость между z_1 и z_2 в точках совпадения пометок.

Возьмем общее номографируемое уравнение 6-го номографического порядка:

$$(4.10)\qquad F \equiv \begin{vmatrix} f_3 & g_3 & h_3 \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix} \equiv f_3 A_{11} + g_3 A_{12} + h_3 A_{13},$$

где A_{1i} ($i = 1, 2, 3$) суть адъюнкты. „Производные" от f_3, g_3, h_3 будем указывать как обычно, а производные первого порядка от адъюнкт A_{1i} по z_k ($k = 1, 2$) будем обозначать через $A_{1i}^{(k)}$ (если бы оказалось нужным брать производные порядка s по z_k, мы бы это указали так: $A_{1i}^{(k^s)}$).

Лемма. *Имеет место тождество:*

$$(4.11)\qquad \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.(17)$$

Нам понадобится частный случай этого тождества, когда $\delta_{ij} = \mu_{ij}$. Другое тождество(18), которое нам будет полезно в §5, запишется так:

$$(4.12) \qquad \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

С помощью (4.6), (4.10) и (4.11) найдем, припоминая принятое выше обозначение производных от адъюнкт,

(4.13)

$$\bar{B} \equiv \begin{vmatrix} f_3'A_{11}+g_3'A_{12}+h_3'A_{13} & f_3''A_{11}+g_3''A_{12}+h_3''A_{13} & f_3'''A_{11}+g_3'''A_{12}+h_3'''A_{13} \\ f_3'A_{11}^{(1)}+g_3'A_{12}^{(1)}+h_3'A_{13}^{(1)} & f_3''A_{11}^{(1)}+g_3''A_{12}^{(1)}+h_3''A_{13}^{(1)} & f_3'''A_{11}^{(1)}+g_3'''A_{12}^{(1)}+h_3'''A_{13}^{(1)} \\ f_3'A_{11}^{(2)}+g_3'A_{12}^{(2)}+h_3'A_{13}^{(3)} & f_3''A_{11}^{(2)}+g_3''A_{12}^{(2)}+h_3''A_{13}^{(2)} & f_3'''A_{11}^{(2)}+g_3'''A_{12}^{(2)}+h_3'''A_{13}^{(2)} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1' & g_1' & h_1' \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_2' & g_2' & h_2' \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix} \equiv w'(f_3; g_3; h_3) \begin{vmatrix} f_1' & g_1' & h_1' \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_2' & g_2' & h_2' \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Первый сомножитель есть отличный от нуля „вронскиан". Обращение в нуль одного, хотя бы из двух других, обеспечит бинарную симметрию, если только одновременно не исчезают $\underset{i}{x_1}$, $\underset{i}{x_2}$, $\underset{i}{x_3}$ для $i = 1$ или $i = 2$ (или даже одновременно).

---

(16) Обращение B в нуль возможно лишь за счет первого сомножителя, что не влечет бинарной симметрии, т. к. не устанавливается никакой зависимости между z_1 и z_2. Поэтому следует считать, что $w'(f_3; g_3; h_3) \neq 0$.

(17) Это тождество легче всего доказывается средствами векторной алгебры или непосредственной проверкой, которую легче всего выполнить справа налево. Этого замечания достаточно, чтобы читатель его воспроизвел.

(18) Интересующийся читатель может ознакомиться и с некоторыми другими тождествами по работе [5]. Обобщение тождества типа (4.11) и (4.12) на определители N-порядка готовится к печати автором в связи с более интересными детерминантными тождествами, обобщающими тождества (5.2) и (5.3) (см. ниже). Но сами по себе тождества (4.11), (4.12) известны из векторной алгебры (см. например, [10]).

§5. В виде примера применения выведенных выражений для $\underset{i}{x_1}$, $\underset{i}{x_2}$, $\underset{i}{x_3}$ найдем уравнения шкал для уравнения (4.10) с помощью метода условного дифференцирования.

Лемма. *Пусть*

$$(5.1)\quad A \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A^{(1)} \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A^{(2)} \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 & a_{33}^1 \end{vmatrix}.$$

Тогда для A *и* $A^{(2)}$ *справедливо тождество*

$$(5.2)\qquad \begin{vmatrix} A_{1i} & A_{1j} \\ A_{1i}^{(2)} & A_{1j}^{(2)} \end{vmatrix} \equiv \pm a_{2k} \begin{vmatrix} a_{31}^1 & a_{32}^1 & a_{33}^1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

где $k \neq i$, $k \neq j$.

Аналогичные тождества получим для A и $A^{(1)}$.

Доказательство получается прямым вычислением:

$$(5.3)\quad \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{12}^{(2)} & A_{13}^{(2)} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31}^1 & a_{33}^1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv a_{21} \begin{vmatrix} a_{31}^1 & a_{32}^1 & a_{33}^1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{11}^{(2)} & A_{13}^{(2)} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32}^1 & a_{33}^1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \equiv -a_{22} \begin{vmatrix} a_{31}^1 & a_{32}^1 & a_{33}^1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32}^1 & a_{33}^1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31}^1 & a_{33}^1 \end{vmatrix} \equiv a_{23} \begin{vmatrix} a_{31}^1 & a_{32}^1 & a_{33}^1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

С помощью (5.3), опираясь при вычислении $\underset{1}{x_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ на (3.1) и соответственно при вычислении $\underset{2}{x_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ на (3.2), имея в виду (4.10), найдем:

$$(5.4)\quad \underset{1}{x_1} = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_2' & g_2' & h_2' \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}, \qquad \underset{1}{x_2} = - \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_2' & g_2' & h_2' \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix},$$

$$\underset{1}{x_3} = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_2' & g_2' & h_2' \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix},$$

$$(5.5)\quad \underset{2}{x_1} = \begin{vmatrix} f_2 & g_2 & h_2 \\ f_2'' & g_3'' & h_3'' \\ f_2''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1' & g_1' & h_1' \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}, \qquad \underset{2}{x_2} = - \begin{vmatrix} f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_2' & g_2' & h_2' \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix},$$

$$\underset{2}{x_3} = \begin{vmatrix} f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_2' & g_2' & h_2' \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}.$$

С помощью (4.10) легко переписать (3.3) так:

$$(5.6)\quad \underset{3}{x_1} = -\begin{vmatrix} f_3 & g_3 & h_3 \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11}^{(1,2)} & A_{12}^{(1,2)} & A_{13}^{(1,2)} \\ A_{21}^{(1,2)} & A_{22}^{(1,2)} & A_{23}^{(1,2)} \\ A_{31}^{(1,2)} & A_{32}^{(1,2)} & A_{33}^{(1,2)} \end{vmatrix}, \quad \underset{3}{x_2} = \begin{vmatrix} f_3 & g_3 & h_3 \\ f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11}^{(1,2)} & A_{12}^{(1,2)} & A_{13}^{(1,2)} \\ A_{21}^{(1,2)} & A_{22}^{(1,2)} & A_{23}^{(1,2)} \\ A_{31}^{(1,2)} & A_{32}^{(1,2)} & A_{33}^{(1,2)} \end{vmatrix},$$

$$\underset{3}{x_3} = -\begin{vmatrix} f_3 & g_3 & h_3 \\ f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11}^{(1,2)} & A_{12}^{(1,2)} & A_{13}^{(1,2)} \\ A_{21}^{(1,2)} & A_{22}^{(1,2)} & A_{23}^{(1,2)} \\ A_{31}^{(1,2)} & A_{32}^{(1,2)} & A_{33}^{(1,2)} \end{vmatrix},$$

где верхний индекс (1,2) означает совокупную ,,производную'' по z_1 и z_2. Из (5.4) и (5.5) видим, что обращение в нуль $\bar{B}$ в равенстве (4.13) при отличном от нуля вронскиане $w'(f_3,\ g_3,\ h_3)$ (вронксиан обозначается через $w'(f_3; g_3; h_3)$, но мы имеем $w(f_3',\ g_3',\ h_3')$, что мы сокращенно обозначаем через $w'(f_3,\ g_3, h_3)$), не дает бинарной симметрии, вообще говоря, так как либо все $\underset{1}{x_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ обащаютрся в нуль, либо все $\underset{2}{x_i}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Однородные координаты номограммы, согласно (5.4), (5.5) и (5.6), мы можем, отбрасывая множители, переписать так:

$$(5.7)\quad \underset{1}{x_1} = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix}, \quad \underset{1}{x_2} = -\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix}, \quad \underset{1}{x_3} = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \end{vmatrix},$$

$$\underset{2}{x_1} = \begin{vmatrix} f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix}, \quad \underset{2}{x_2} = -\begin{vmatrix} f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix}, \quad \underset{2}{x_3} = \begin{vmatrix} f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \end{vmatrix},$$

$$\underset{3}{x_1} = \begin{vmatrix} f_3 & g_3 & h_2 \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix}, \quad \underset{3}{x_2} = -\begin{vmatrix} f_3 & g_3 & h_3 \\ f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix}, \quad \underset{3}{x_3} = \begin{vmatrix} f_3 & g_3 & h_3 \\ f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \end{vmatrix}.$$

При этом, если понимать производные в смысле обычного дифференциального исчисления, после дифференцирования надо вместо z_3 подставить произвольное постоянное z_{30}, изменение которого будет проективно преобразовывать номограмму, зависящую в силу (5.7) от 8 существенных произвольных постоянных, соответственно восьмичленной группе проективных преобразований.

Если теперь из (5.7) образовать определитель

$$(5.8)\quad \begin{vmatrix} \underset{1}{x_1} & \underset{1}{x_2} & \underset{1}{x_3} \\ \underset{2}{x_1} & \underset{2}{x_2} & \underset{2}{x_3} \\ \underset{3}{x_1} & \underset{3}{x_2} & \underset{3}{x_3} \end{vmatrix},$$

предварительно переставив в $\underset{1}{x_3}, \underset{2}{x_3}, \underset{3}{x_3}$ вторую и третью строки, то получим определитель, стоящий слева в тождестве (4.11), в частном случае $\delta_{ij} = \mu_{(i+1)j}$, причем

$$(5.9)\qquad \begin{array}{lll} \varkappa_{11} = f_1, & \varkappa_{12} = g_1, & \varkappa_{13} = h_1, \\ a_{21} = f''_3, & a_{22} = g''_3, & a_{23} = h''_3, \\ a_{31} = f'''_3, & a_{32} = g'''_3, & a_{33} = h'''_3, \\ \delta_{21} = \mu_{31} = f'_3, & \delta_{22} = \mu_{32} = g'_3, & \delta_{23} = \mu_{33} = h'_3, \\ \beta_{11} = f_2, & \beta_{12} = g_2, & \beta_{13} = h_2, \\ \gamma_{11} = f_3, & \gamma_{12} = g_3, & \gamma_{13} = h_3. \end{array}$$

Тождество (4.11) тогда даст для определителя (5.8) значение

$$(5.10)\qquad \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f'_3 & g'_3 & h'_3 \\ f''_3 & g''_3 & h''_3 \\ f'''_3 & g'''_3 & h'''_3 \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Это доказывает, в применении к рассматриваемому частному случаю, теорему об игнорировании критериев, так как квадрат вронскиана отличен от нуля, и получаем уравнение Массо. В частности, координаты (5.7) определяют номограмму из выравненных точек с двумя бинарными полями (z_1; z_3), (z_2; z_3) и шкалой z_3, если захотим толковать дифференцирование обычным образом и оставим в производных f'_3, g'_3, h'_3, f''_3, $\ldots$, и т. д. переменную z_3. Однако, из (5.7) видно, что однопараметрическим (параметр z_3) семейством коллинеаций можно преобразовать эту номограмму с 2 полями (z_1; z_3) и (z_2; z_3) и со шкалой z_3 (см. (5.7)) в шкальную номограмму из выравненных точек, если f_1, g_1, h_1 зависят только от z_1, а f_2, g_2, h_2 — только от z_2.(19)

Заметим, что при этом, изменяя z_3, будем одновременно проективно (!) передвигать шкалы z_1 и z_2, что и дает бинарные поля, между тем как шкала z_3 будет деформироваться непроективно. Если же вместо z_3 в условные производные в (5.7) подставить параметр z_{30}, то с его изменением будем получать однопараметрическое семейство проективных номограмм.

Разберемся теперь в вопросе бинарной симметрии для номограмм (4.10).

Заменяя равенства (4.4) одним равенством (4.5), мы по существу незаконно отбросили множители, которые в рассматриваемом случае (4.10) имеют вид:

$$(5.11)\qquad b = \begin{vmatrix} f'''_3 & g'''_3 & h'''_3 \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} f'_3 & g'_3 & h'_3 \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}, \quad a = \begin{vmatrix} f''_3 & g''_3 & h''_3 \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}.$$

---

(19) Если f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, h_2 — функции z_1 и z_2, то и при условном толковании производных получим номограмму с двумя бинарными одноименными полями z_1 и z_2, определяемую формулами (5.7).

Поэтому условие бинарной симметрии $\bar{B} = 0$ (см. (4.6) и (4.3)) не дает полного ответа на вопрос, так как возможно, что одновременно

$$(5.12) \qquad b = 0, \quad m = 0, \quad a = 0,$$

что и есть в рассматриваемом случае, так как последние два множителя в (4.13) не могут в силу (5.4) и (5.5) обращаться в нуль, а первый множитель — в силу (5.6). Но это, т. е. (5.12), немедленно (в силу (5.11) (так как $w'(f_3; g_3; h_3) \neq 0$) дает

$$(5.13) \qquad \frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Если эти три уравнения совметсны при переменных z_1 и z_2, то имеет место бинарная симметрия. ([20]) К этим же условиям (5.12) мы можем прийти и непостредственно, составив три условия бинарной симметрии

$$(5.14) \qquad \frac{\underset{1}{x_1}}{\underset{2}{x_1}} = \frac{\underset{1}{x_2}}{\underset{2}{x_2}} = \frac{\underset{1}{x_3}}{\underset{2}{x_3}}$$

с помощью (5.7), что проще всего. Покажем это.

Выражение

$$(5.15) \quad \underset{1}{x_1}\underset{2}{x_2} - \underset{1}{x_2}\underset{2}{x_1} \equiv \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix}$$

если переставить две последние строки всех определителей, легко отождествляется с левой частью (4.12), если положить:

$$(5.16) \qquad \begin{aligned} a_{11} &= f_1, & a_{12} &= g_1, & a_{13} &= h_1, \\ a_{21} &= f_3''', & a_{22} &= g_3''', & a_{23} &= h_3''', \\ a_{31} &= f_3'', & a_{32} &= g_3'', & a_{33} &= h_3'', \\ \alpha_{11} &= f_2, & \alpha_{12} &= g_2, & \alpha_{13} &= h_2, \\ b_{31} &= f_3', & b_{32} &= g_3', & b_{33} &= h_3'. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$(5.17) \qquad \underset{1}{x_1}\underset{2}{x_2} - \underset{1}{x_2}\underset{2}{x_1} = \begin{vmatrix} f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_3''' & g_3''' & h_3''' \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix} = 0,$$

и аналогично в двух других случаях.

Опять, следовательно, приходим к равенству (5.12) и, наконец, к (5.13).

([20]) Уравнения (5.13) вообще определяют критические точки номограммы, т. е. точки пересечения шкал z_1 и z_2.

§6. В этом параграфе мы, прежде всего, коснемся вопроса анаморфозирующего множителя. Если функция F требует анаморфозирующего множителя(21) вида $\sigma = \sigma_3(z_3)\sigma_{12}(z_1;\, z_2) \equiv \sigma_3\sigma_{12}$, то его незачем определять: формулы (3.1), (3.2), (3.3) все равно дают номограмму из выравненных точек, автоматически минуя отыскание такого множителя. В виде примера укажем на форму Кларка

$$F \equiv f_3 f_1 f_2 + g_3(f_1 + f_2) + h_3, \tag{6.1}$$

требующую, как известно, множителя вида $\sigma \equiv (f_1 - f_2)$.

По указанным формулам (3.1) — (3.3) без труда найдем, не заботясь об анаморфозирующем множителе, сразу в восьмичленной группе коллинеаций

$$\underset{i}{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & -f_i & f_i^2 \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix} (f_{i\pm1} - f'_{i\pm1}), \quad \underset{i}{x_2} = \begin{vmatrix} f_3' & g_3' & h_3' \\ 1 & -f_i & f_i^2 \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix} (f_{i\pm1} - f'_{i\pm1}), \tag{6.2}$$

$$\underset{i}{x_3} = \begin{vmatrix} f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \\ 1 & -f_i & f_i^2 \end{vmatrix} (f_{i\pm1} - f'_{i\pm1}), \qquad i = 1,\, 2(^{22}).$$

Множитель $(f_{i\pm1} - f'_{i\pm1})$, разумеется, может быть отброшен.

Если функция требует анаморфозирующего множителя $\sigma = \sigma_{123}$, не разложенного на множители, то придется в уравнения (2.1), (2.5) и (2.6) подставить σF и решать получившуюся систему функционально-,,дифференциальных'' уравнений с неизвестной функцией σ.

Этим же путем можно найти анаморфозирующую функцию $\Phi(u)$, если таковая существует, такую, что $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(F)$ удовлетворяет уравнениям (2.1), (2.5) и (2.6) (при $\underset{3}{A}{}^{z_3}_{11} \neq 0$).(23) Можно в силу принципа инвариантности решать эти системы, если угодно, в классе обычных дифференцируемых функций, толкуя в этом случае ,,производные'' как обычные производные. Но если речь идет о рассмотрении функций F, обладающих патологией, рассматриваемых обычно в теории функций многих действительных переменных, то анаморфозирующий множитель придется искать в классе непрерывных, а то и просто однозначных функций. Шкалы и поля

---

(21) Говорят, что функция $F \equiv F_{123} \equiv F(z_1;\; z_2;\; z_3)$ требует анаморфозирующего множителя $\sigma \equiv \sigma_{123} \equiv \sigma(z_1;\; z_2;\; z_3)$, если σF равно определителю Массо Δ, причем уравнение $F = 0$ влечет за собой уравнение $\Delta = 0$.

(22) Формулы для $\underset{3}{x_1}$, $\underset{3}{x_2}$, $\underset{3}{x_3}$ даются равенствами (5.6) или (5.7). Формулы (6.2) можно получить и из (5.7), но это не доказывало наше утверждение, что (3.1) — (3.3) автоматически учитывают анаморфозирующий множитель указанного вида.

(23) Строго говоря, при $B \not\equiv 0$.

будут в этом случае множествами точек, являющимися соответсвенно также предметом изучения в теории множеств и функций многих переменных. Такие номограммы представляют в настоящее время пока лишь теоретический интерес, но не исключена возможность практических применений номографии в теории функций действительного переменного в будущем и обратно, образуя ветвь теории функций — теорию номографируемых тем или иным методом суперпозиций.

В связи с этим мы сформулируем то определение номографии, которое играло роль методологической установки, направляющей всю работу автора, и к которому он пришел в процессе осуществления этой работы.

Номография есть отрасль математики, изучающая теорию и методы точного и приближенного, с заданной точностью, представления функций и систем функций любой природы (вообще, абстрактных функций (операторов) от абстрактных аргументов), определенных теми или иными условиями (конечными, дифференциальными, разностными, функциональными, интегральными и т. п. уравнениями) в виде заданной суперпозиции функций меньшего числа аргументов и теорию соответствующих этим представлениям номографических интерпретаций, моделирующих данные зависимости или системы зависимостей.

Итак, номография — это теория суперпозиций и соответствующих им геометрических интерпретаций.

Возвращаясь к функциям, требующим анаморфозирующего множителя общего вида, рассмотрим пример, который автор привел в работе [2]. Мы увидим, что формулы (3.1) —(3.3) не дают нам шкальную номограмму, хотя принцип игнорирования критериев все равно дает номограмму из выравненных точек. Итак, пусть

$$F \equiv f_1f_2 + f_2f_3 + f_3f_1 + \frac{1}{f_1f_2} + \frac{1}{f_2f_3} + \frac{1}{f_3f_1}. \tag{6.3}$$

Этот пример требует множителя более общего вида [2], чем $\sigma = \sigma_3\sigma_{12}$, а именно вида $\sigma = \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31}$(²⁴)

$$\sigma = \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} = (f_1 - f_2)\,(f_2 - f_3)\,(f_3 - f_1), \tag{6.3$_1$}$$

как это мы показали в этой работе. Имеем:

$$F \equiv f_3(f_1 + f_2) + \frac{1}{f_3}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) + \left(f_1f_2 + \frac{1}{f_1f_2}\right). \tag{6.4}$$

---

(24) Общий случай такого множителя рассмотрен в §5 нашей работы [7].

Уравнения (3.3) дают сразу уравнения шкалы z_3

$$(6.5)\qquad \underset{3}{x_1} = \begin{vmatrix} f_3 & \frac{1}{f_3} & 1 \\ f''_3 & \frac{1}{f''_3} & 1 \\ f'''_3 & \frac{1}{f'''_3} & 1 \end{vmatrix}, \quad \underset{3}{x_2} = -\begin{vmatrix} f_3 & \frac{1}{f_3} & 1 \\ f'_3 & \frac{1}{f'_3} & 1 \\ f'''_3 & \frac{1}{f'''_3} & 1 \end{vmatrix}, \quad \underset{3}{x_3} = \begin{vmatrix} f_3 & \frac{1}{f_3} & 1 \\ f'_3 & \frac{1}{f'_3} & 1 \\ f''_3 & \frac{1}{f''_3} & 1 \end{vmatrix} \cdot$$

Таким образом, шкала z_3 будет второй степени. Найдем тепер $\underset{1}{x_1}$, $\underset{1}{x_2}$, $\underset{1}{x_3}$. $\underset{1}{x_1}$ равно

$$\begin{vmatrix} f''_3(f_1 + f_2) + \frac{1}{f''_3}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) + \left(f_1 f_2 + \frac{1}{f_1 f_2}\right), \\ f'''_3(f_1 + f_2) + \frac{1}{f'''_3}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) + \left(f_1 f_2 + \frac{1}{f_1 f_2}\right) \\ f''_3(f_1 + f'_2) + \frac{1}{f''_3}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f'_2}\right) + \left(f_1 f'_2 + \frac{1}{f_1 f'_2}\right), \\ f'''_3(f_1 + f'_2) + \frac{1}{f'''_3}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f'_2}\right) + \left(f_1 f'_2 + \frac{1}{f_1 f'_2}\right) \end{vmatrix} \cdot$$

Или, после некоторых упрощений,

$$\underset{1}{x_1} = \frac{f''_3 - f'''_3}{f''_3 f'''_3}(f_2 - f'_2)\left[\frac{(f_1 + f_2)(f_1 + f'_2)}{f_1 f_2 f'_2} + f''_3 f'''_3\left(\frac{f_1 + f_2 + f'_2}{f_1 f_2 f_3} - f_1^2\right) + \right.$$

$$(6.6)\qquad \left. + f_1\left(\frac{1}{f_1 f_2 f'_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f'_2}\right)\right].$$

Чтобы получить $\underset{1}{x_2}$ и $\underset{1}{x_3}$, надо в (6.6) (дифференцирование по z_3) заменить соответственно вторые производные третьими, а третьи первыми; вторые производные первыми и третьи вторыми; а чтобы затем получить $\underset{2}{x_1}$, $\underset{2}{x_2}$, $\underset{2}{x_3}$, достаточно в полученных формулах для $\underset{1}{x_1}$, $\underset{1}{x_2}$, $\underset{1}{x_3}$ заменить нижние индексы 1 и 2 на соответственно 2 и 1. Мы это делать не будем, так как уже видно, что получим номограмму с двумя бинарными полями (z_1; z_2) и (z_2; z_1)

и со шкалой z_3. Изучением этой номограммы мы заниматься здесь не будем. Мы привели это как пример того, что с точки зрения принципа игнорирования критериев любая функция анаморфозируема. В методе бинарных полей, который автор разработал в 1944 г. (см. работу [15], стр. 134) достигалось это же. Новым здесь является принцип инвариантности и то, что в случае анаморфозируемости функции построение ее номограммы по готовым раз навсегда выведенным формулам (2.1), (2.5) и (2.6) (см. также для любого N работы [1] [3] [4] [5] [6] [7] [8]) приводит автоматически к идеальной номограмме из выравненных точек без повторения переменных. Заметим, что если в формулах (2.1), (2.5) и (2.6) толковать производные в обычном смысле, бинарные поля, определяемые этими уравнениями будут инвариантными бинарными полями, введенными автором в метод бинарных полей (см. [15], стр. 134, где указаны другие работы автора), а номограмма сделается тангенциальной.

§7. Применим наши критерии в случае $N = 3$ к исследованию общего уравнения 6-го номографического порядка.

Пусть(25)

$$(7.1)\quad \begin{aligned} F \equiv{} & (A_1 f_2 + L_1 g_2 + P_1) f_3 + (A_1^1 f_2 + L_1^1 g_2 + P_1^1) g_3 + \\ & + (A_1^2 f_2 + L_1^2 g_2 + P_1^2) h_3 = 0 \end{aligned}$$

или, что то же,

$$(7.2)\quad \begin{aligned} F \equiv{} & (A_2 f_1 + B_2 g_1 + C_2) f_3 + (A_2^1 f_1 + B_2^1 g_1 + C_2^1) g_3 + \\ & + (A_2^2 f_1 + B_2^2 g_1 + C_2^2) h_3 = 0, \end{aligned}$$

где

$$(7.3)\qquad \begin{aligned} A_1^i &= a^i f_1 + b^i g_1 + c^i, & A_2^i &= a^i f_2 + l^i g_2 + p^i, \\ L_1^i &= l^i f_1 + m^i g_1 + n^i, & B_2^i &= b^i f_2 + m^i g_2 + q^i, \\ P_1^i &= p^i f_1 + q^i g_1 + r^i, & C_2^i &= c^i f_2 + n^i g_2 + r^i, \end{aligned}$$

i — 0, 1, 2, причем индекс ,,0“ вверху мы опускаем.

Получим $\underset{3}{A}^{z_3} \equiv 0$, так как разложение F a priori дано в билинейной форме. Поэтому и $\underset{3}{A}^{z_2} = 0$ и $\underset{3}{A}^{z_1} = 0$. Вычислим теперь $\underset{(2)}{A}^{z_3}$ и $\underset{(1)}{A}^{z_3}$. После преобразований найдем

$$(7.4)\qquad \underset{(2)}{A}^{z_3} \equiv \begin{vmatrix} A_1 & L_1 & P_1 \\ A_1^1 & L_1^1 & P_1^1 \\ A_1^2 & L_1^2 & P_1^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_2 & g_2 & 1 \\ f_2' & g_2' & 1 \\ f_2'' & g_2'' & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix},$$

(25) см. также выше §3 равенства (3.6), (3.7) и (3.7^1).

$$(7.5)\qquad \underset{(1)}{A}^{z_3} \equiv \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_2^1 & B_2^1 & C_2^1 \\ A_2^2 & B_2^2 & C_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_1' & g_1' & h_1' \\ f_1'' & g_1'' & h_1'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix}.$$

Далее, имеем ограничение:

$$(7.6)\qquad \underset{3}{A}{}_{11}^{z_3} \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_{z_1 z_2} & \beta_{z_1 z_2} & \gamma_{z_1 z_2} \\ \alpha_{z_1^2 z_2^2} & \beta_{z_1^2 z_2^2} & \gamma_{z_1^2 z_2^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_3' & g_3' & h_3' \\ f_3'' & g_3'' & h_3'' \\ f_3''' & g_3''' & h_3''' \end{vmatrix} \not\equiv 0,$$

где через α, β, γ мы обозначили слева направо коэффициенты при f_3, g_3 и h_3 в данном уравнении (7.1) или (7.2). Условие (7.6) соблюдено, если f_3, g_3, h_3 с одной стороны, и α, β, γ с другой стороны, линейно независимы. В противном случае будем иметь, очевидно, уравнение ниже чем шестого номографического порядка. Легко видеть, что определители, стоящие слева в (7.6) суть значения ,,вронскианов'' автора, отличие которых от нуля необходимо и достаточно для отсутствия линейной зависимости между функциями любого числа переменных, в частности, рассматриваемых здесь. Итак, условие $\underset{3}{A}{}_{11}^{z_3} \neq 0$ означает непонижение порядка данного уравнения ниже шестого.

,,Вронскианы'' функций f_2, g_2, 1 и f_1, g_1, h_1 также должны быть отличны от нуля, если уравнение — 6-го порядка, и мы получаем в силу (2.5) и (2.6), что условие, необходимое и достаточное для анаморфозируемости функции 6-го номографического порядка примет вид:

$$(7.7)\qquad \begin{vmatrix} A_1 & L_1 & P_1 \\ A_1^1 & L_1^1 & P_1^1 \\ A_1^2 & L_1^2 & P_1^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_2^1 & B_2^1 & C_2^1 \\ A_2^2 & B_2^2 & C_2^2 \end{vmatrix} = 0,$$

где $\dfrac{f_1}{h_1}$, $\dfrac{g_1}{h_1}$ и $\dfrac{f_2}{h_2}$, $\dfrac{g_2}{h_2}$ имеют произвольные значения.

Если же f_1, g_1, h_1 и f_2, g_2, h_2 линейно связаны, то критерии (7.7_1) и (7.7_2) удовлетворяются, но тогда имеем уравнение четвертого порядка, которое, как мы попутно таким образом выяснили, всегда, как известно, анаморфозируемо.

Каждое из уравнений (7.7_1) и (7.7_2) в общем случае будет 3-й степени, связывающей два произвольных аргумента $\dfrac{f_1}{h_1}$ и $\dfrac{g_1}{h_1}$ или $\dfrac{f_2}{h_2}$ и $\dfrac{g_2}{h_2}$. Получаем, однако, тоько 10 условий на 27 коэффициентов, так как окажется, что условия, выражаемые равенствами нулю определителей (7.7_1) и (7.7_2) совпадают.

Пусть теперь линейно зависимы, скажем, f_2, g_2, h_2 так, что „вронскиан" этих функций

$$(7.8)\qquad \begin{vmatrix} f_2 & g_2 & h_2 \\ f_2' & g_2' & h_2' \\ f_2'' & g_2'' & h_2'' \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Тогда из (7.8) видим, что уравнение (7.4), точнее $\underset{(2)}{A}^{z_3} = 0$, отпадает, так как соответствующее условие (7.4) автоматически удовлетворяется.

Остается условие (7.5) или, что то же, условие (7.7_2) при наличии линейной связи между f_2, g_2 и h_2 в силу (7.8).

Уравнение (7.7) будет уже уравнением 3-й степени относительно не двух, а одной произвольной функции $\dfrac{f_2}{h_2}$ и, следовательно, будем иметь 4 уравнения (по числу коэффициентов уравнения 3-й степени), связывающих коэффициенты данного уравнения. Но данное уравнение при условии (7.8), как уравнение 5 порядка, будет зависеть лишь, как видно из (7.3), от 18 существенных коеффициентов. Эти 4 условия, связывающие 18 коэффициентов, и будут условиями анаморфозируемости уравнения 5-го порядка.(26) Эти последние условия известны [12].

Условия (7.7_1) и (7.7_2), как мы уже отмечали, можно в общем случае заменить одним:

$$(7.9)\qquad \begin{vmatrix} ax + a^1y + a^2z & lx + l^1y + l^2z & px + p^1y + p^2z \\ bx + b^1y + b^2z & mx + m^1y + m^2z & qx + q^1y + q^2z \\ cx + c^1y + c^2z & nx + n^1y + n^2y & rx + r^1y + r^2z \end{vmatrix} \equiv 0,$$

которое 3-й степени и должно тождественно выполняться для анаморфозируемости уравнения строго 6-го порядка. Оно дает 10 зависимостей между 27 коэффициентами, о чем мы уже говорили. Мы получили условие F Будада, пришедшего к этому условию в специальных, этому условию посвященных работах [16] [17].

Заканчивая этот параграф, отметим, что Швердт в работе [11], излагая теоретически интересную, но неэффективную работу Дюпорка [18], пишет, что условия $\underset{3}{A}^{z_3} = 0$, $\underset{3}{A}^{z_2} = 0$ и $\underset{3}{A}^{z_1} = 0$, полученные Дюпорком (в других обозначениях), необходимы и достаточны для анаморфозы, что, как мы видим на примере уравнения 6-го порядка (7.1), для которого эти условия заведомо выполняются, вообще говоря, неправильно, так как оно анаморфозируемо только при выполнении условия (7.9).

---

(26) Здесь везде, конечно, речь идет об алгебраической анаморфозе функций шестого и т. д. порядков.

Мы показали выше, что в нашем практически эффективном критерии содержатся, как частные случаи, все ранее известные критерии анаморфозы функций.

§8. Критерии (2.1), (2.5), (2.6), (1.15) имеют инвариантную форму, т. е. выражают условия анаморфозы, как в терминах условных производных, так и в терминах обычных производных, пока z_i являются переменными из числового поля. Если же z_i — абстрактные переменные (например z_i есть совокупность переменных $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{it_i}$ из некоторого числового поля), то хотя инвариантность сохраняется, если записать условия в дифференциалах, тем не менее, условия становятся недостаточными при обычном толковании производных. Поэтому принцип инвариантности требует уточнения во избежание ошибок.

Чтобы условия оставались достаточными и при обычном толковании производных, введем условные дифференциалы (см. стр. 114, формула (3.1) работы автора [3]).

Тогда условие, например

$$(\bar{b}, \bar{b}_{z_i}, \bar{b}_{z_i}) \equiv 0, \quad i = 1, 2\text{(27)} \tag{8.1}$$

перепишется так:

$$(\bar{b}, (\bar{b}_{z_i} - \bar{b}), (\bar{b}_{z_i^2} - \bar{b}_{z_i})) \equiv 0 \tag{8.2}$$

или

$$(\bar{b}, (\bar{b}_{z_i} - \bar{b}), (\bar{b}_{z_i^2} - 2\bar{b}_{z_i} + \bar{b})) \equiv 0. \tag{8.3}$$

Обозначим конечные разности векторов

$$\bar{b}_{z_i} - \bar{b} \equiv \mathrm{d}_{z_i}\bar{b}, \quad \bar{b}_{z_i^2} - 2\bar{b}_{z_i} + \bar{b} \equiv \mathrm{d}^2_{z_i}\bar{b} \tag{8.4$_1$}$$

или, еще лучше (см. (20.12) продолжения настоящей работы), так

$$\bar{b}_{z_i} - \bar{b} = \mathrm{d}_{z_i}\bar{b}, \quad 2\,\frac{\bar{b}_{z_i^2}(z_i^1 - z_i) + \bar{b}_{z_i}(z_i - z_i^2) + \bar{b}(z_i^2 - z_i^1)}{z_i^2 - z_i^1} = \mathrm{d}^2_{z_i}\bar{b}. \tag{8.4$_2$}$$

Таким образом, за „дифференциалы" мы принимаем векторные конечные разности.(28) Тогда условия (2.5), (2.6), (1.15) примут вид

$$(\bar{b}, \mathrm{d}_{z_1}\bar{b}, \mathrm{d}^2_{z_1}\bar{b}) \equiv 0, \quad (\bar{b}, \mathrm{d}_{z_2}\bar{b}, \mathrm{d}^2_{z_2}\bar{b}) \equiv 0, \quad \bar{B} = (\bar{b}, \mathrm{d}_{z_1}\bar{b}, \mathrm{d}_{z_2}\bar{b}) \not\equiv 0. \tag{8.5}$$

---

(27) В круглых скобках — смешанное произведение трех векторов. Сомножители мы отделяем запятыми во избежание недоразумений, хотя такое отделение запятыми не принято делать.

(28) Общее определение „дифференциала" дано на стр. 114 работы автора [3]. Оно связано с (8.4$_1$). Однако, как выясняется ниже, с точки зрения принципа инвариантности целесообразнее определение (8.4$_2$).

Во всяком случае это есть критерий анаморфозы функции с распределенными абстрактными переменными z_1, z_2, z_3

$$F \equiv \bar{a}\bar{b} \equiv \bar{a}(z_3)\bar{b}(z_1; z_2). \tag{8.6}$$

При условном толковании производных эти критерии (при условии $\bar{B} \not\equiv 0$) необходимы и достаточны для анаморфозы функции с точностью до анаморфозирующего множителя от двух переменных, как и критерии (2.5) и (2.6). При обычном толковании производных эти критерии (8.5) по-прежнему необходимы, так как являются следствиями линейности и однородности соотношений, и должны вытекать из данных соотношений по той же схеме, по которой они вытекают и при условном толковании производных, т. к. здесь имеет место полный изоморфизм. При условном толковании приоизводных достаточность условий (8.5) в дифференциалах вытекает из того, что она вытекает и для условных производных, когда мы имеем право согласно §§1,2 писать представления (8.6) при условном толковании производных. Однако, при обычном(29) толковании производных (если это возможно, конечно) (8.1) уже недостаточно, т. к. необходимым следствием возможности представления (8.6) являются значительно более жесткие соотношения (8.5) не в ,,производных'', а в ,,дифференциалах'', причем эти соотношения сами подсказывают, что переменные z_1, z_2 должны образовывать группы переменных, принимающих значения из непрерывного числового поля(30), которые мы, в свою очередь, объединим в абстрактную переменную $\underset{\uparrow}{z_3}$ (стрелка означает все переменные, кроме входящих в z_3) а z_3 есть тоже абстрактный представитель какого угодно числа других переменных из числового непрерывного поля, в котором (поле) может быть при помощи предельного перехода определена линейная операция, как некое дифференцирование или интегрирование и т. п.; заметим, что мы говорим о предельном переходе, так как только тогда возникает проблема установления инвариантной формы решения задачи анаморфозы, т. е. формы одинаково пригодной при обычном и условном толковании, когда вместо критериев в условных дифференциалах можно пользоваться и критериями в обычных дифференциалах.

То, что при этом будут получаться одинаковые представления, как бы мы не истолковывали условные производные, переходя к обычным, как раз и гарантируется требованием, чтобы критерии в форме дифференциалов (при обычном толковании производных) удовлетворялись с одной стороны; а с другой стороны непротиворечивость различных форм построения

---

(29) Т. е. таком, когда производная определяется с помощью предельного перехода.

(30) Так, z_1 объединяет группу x_{11}, x_{12}, а z_2-группу x_{21}, x_{22}. Аналогично z_3 объединяет группу x_{31}, x_{32} (см. выше §3).

определителя Массо гарантируется тем, что конечные разности, которыми согласно нашему определению являются условные дифференциалы, в пределе превращаются в соответствующие частные дифференциалы.

Если функция $F \equiv F_{123}$ задана в общем виде, а не в форме (8.6), то критерий возможности представления (8.6) дается, как мы знаем, равенством (2.1).

Условие (2.1) в инвариантной форме запишется, очевидно, так (см. стр. 116 работы [3])(³¹):

$$(8.7)\qquad \left|\begin{array}{ccc:c} F, & \mathrm{d}_{z_3}F, & \mathrm{d}^2_{z_3}F, & \mathrm{d}^3_{z_3}F \\ \underset{\uparrow}{\mathrm{d}_{z_3}}F, & \underset{\uparrow}{\mathrm{d}_{z_3}}\mathrm{d}_{z_3}F, & \underset{\uparrow}{\mathrm{d}_{z_3}}\mathrm{d}^2_{z_3}F, & \underset{\uparrow}{\mathrm{d}_{z_3}}\mathrm{d}^3_{z_3}F \\ \underset{\uparrow}{\mathrm{d}^2_{z_3}}F, & \underset{\uparrow}{\mathrm{d}^2_{z_3}}\mathrm{d}_{z_3}F, & \underset{\uparrow}{\mathrm{d}^2_{z_3}}\mathrm{d}^2_{z_3}F, & \underset{\uparrow}{\mathrm{d}^2_{z_3}}\mathrm{d}^3_{z_3}F \\ \hdashline \underset{\uparrow}{\mathrm{d}^3_{z_3}}F, & \underset{\uparrow}{\mathrm{d}^3_{z_3}}\mathrm{d}_{z_3}F, & \underset{\uparrow}{\mathrm{d}^3_{z_3}}\mathrm{d}^2_{z_3}F, & \underset{\uparrow}{\mathrm{d}^3_{z_3}}\mathrm{d}^3_{z_3}F \end{array}\right| \equiv 0,$$

причем, если старшие дифференциалы определяются формулами вида (8.4_1), то переменные z_i могут быть и абстрактными, а если при помощи формул типа (8.4_2), то z_i — переменные из непрерывного числого поля.

Пример. В силу самого образования (8.7) из (2.1), в (8.7)

$$\underset{\uparrow}{\mathrm{d}_{z_3}}\mathrm{d}_{z_3}F \equiv F_{z_3z_1z_2} - F_{z_1z_2} - F_{z_3} + F.(^{32})$$

Если образовать вектор в четырехмерном аффинном пространстве

$$\bar{a} = \bar{e}F + \bar{e}_1F_{z_3} + \bar{e}_2F_{z_3^2} + \bar{e}_3F_{z_3^3}$$

и опять ввести условные дифференциалы, как разности типа (8.4_1), т. е. $\mathrm{d}_{\underset{\uparrow}{z_3}}\bar{a} = \bar{a}_{\underset{\uparrow}{z_3}} - \bar{a} \ldots$ и т. д., то условие (8.7), как смешанное произведение, запишется так:

$$(8.8)\qquad (\bar{a}\,\underset{\uparrow}{\mathrm{d}_{z_3}}\bar{a}\;\underset{\uparrow}{\mathrm{d}^2_{z_3}}\bar{a}\;\underset{\uparrow}{\mathrm{d}^3_{z_3}}\bar{a}) \equiv 0.$$

Так как вектор трехмерного пространства

$$(8.9)\qquad \bar{b} = \bar{e}F + \bar{e}_1F_{z_3} + \bar{e}_2F_{z_3^2},$$

(³¹) Для гарантии инвариантности достаточно наложить ограничения на условные дифференцирования в (8.4) и (8.7) вида $z^2 - z^1 = z^1 - z$, $z^3 - z^2 = z^2 - z^1 = z^1 - z, \ldots$ и т.д., тогда как при толковании (8.4_2) эти ограничения излишни.

(³²) Однако, если бы вычисляли $\mathrm{d}_{\underset{\uparrow}{z_3}}\mathrm{d}_{z_3}F$ при помощи независимого от образования (8.7) из (2.1) составления разностей, то получили бы иное определение $\mathrm{d}_{\underset{\uparrow}{z_3}}\mathrm{d}_{z_3}F = F_{z_3z_1z_2} - F_{z_3z_1} - F_{z_3z_2} + F_{z_1} + F_{z_2} + F_{z_3} - F$. Последствия и возможности, заключающиеся в этой неоднозначнности, рассматриваются в продолжающей данную работе автора, подготовляемой к печати.

как уже установили, должен удовлетворять уравнениям (8.5), то, при условии $\overline{B} \not\equiv 0$ (выражающем то, что окаймленный определитель 3 порядка в определителе (8.7) отличен от нуля), условия (8.5), (8.8) необходимы и достаточны для анаморфозы функции с точностью до анаморфозирующего множителя $\sigma_{12} \equiv \sigma_{12}(z_1; z_2)$ (аналогично пишутся условия и для множителей $\sigma_{31} \equiv \sigma_{31}(z_3;\ z_1)$ или $\sigma_{23} \equiv \sigma_{23}(z_2;\ z_3)$. Условия (8.5) и (8.8) имеют уже инвариантную форму и дают нам, в частности, условия того, что трижды непрерывно дифференцируемая в обычном смыле слова по каждому из шести аргументов (в том числе одновременно) функция шести переменных

$$z_1(x_{11};\, x_{12}),\quad z_2(x_{21};\, x_{22}),\quad z_3(x_{31};\, x_{32})$$

допускает номограмму с тремя бинарными полями (по z_1, по z_2, по z_3).

Для расшифровки условий (8.5), (8.8) следует вычислить по обычным правилам входящие в эти формулы обычные дифференциалы по указанным в них группам переменных x_{ij} $(i = 1, 2, 3, j = 1, 2)$.

Расшифруем например условия (8.5_2), перейдя от обычных дифференциалов к обычным производным, т. е. выразив дифференциалы через производные и дифференциалы аргументов.

Получим

$$(8.10)\quad \begin{aligned}&(\bar{b},\, \bar{b}_{x_{21}}\mathrm{d}x_{21} + \bar{b}_{x_{22}}\mathrm{d}x_{22},\, \bar{b}_{x^2_{21}} + 2\bar{b}_{x_{21}x_{22}}\mathrm{d}x_{21}\mathrm{d}x_{22} + \bar{b}_{x^2_{22}}\mathrm{d}x^2_{22}) =\\ &= (\bar{b}\bar{b}_{x_{21}}\bar{b}_{x^2_{21}})\mathrm{d}x^3_{21} + [2(\bar{b}\bar{b}_{x_{21}}\bar{b}_{x_{21}x_{22}}) + (\bar{b}\bar{b}_{x_{22}}\bar{b}_{x^2_{21}})]\mathrm{d}x^2_{21}\mathrm{d}x_{22} +\\ &+ [(\bar{b}\bar{b}_{x_{21}}\bar{b}_{x^2_{22}}) + 2(\bar{b}\bar{b}_{x_{22}}\bar{b}_{x_{21}x_{22}})]\mathrm{d}x_{21}\mathrm{d}x^2_{22} + (\bar{b}\bar{b}_{x_{22}}\bar{b}_{x^2_{22}})\mathrm{d}x^3_{22} = 0.\end{aligned}$$

Отсюда получаем в силу произвольности $\mathrm{d}x_{21}$ и $\mathrm{d}x_{22}$, что

$$(8.11)\quad \begin{gathered}(\bar{b}\bar{b}_{x_{21}}\bar{b}_{x^2_{21}}) = 0,\quad (\bar{b}\bar{b}_{x_{22}}\bar{b}_{x^2_{22}}) = 0,\\ 2(\bar{b}\bar{b}_{x_{21}}\bar{b}_{x_{21}x_{22}}) + (\bar{b}\bar{b}_{x_{22}}\bar{b}_{x^2_{21}}) = 0,\quad (\bar{b}\bar{b}_{x_{21}}\bar{b}_{x^2_{22}}) + 2(\bar{b}\bar{b}_{x_{22}}\bar{b}_{x_{21}x_{22}}) = 0.\end{gathered}$$

Но условия (8.5_2) должны выполняться и при установлении *произвольной* зависимости между x_{21} и x_{22} (аналогично между x_{11} и x_{12}).

Полагая,

$$(8.12)\quad x_{21} = x_{21}(t),\quad x_{22} = x_{22}(t),$$

где t — параметр, в силу инвариантности первого дифференциала будем по-прежнему иметь

$$(8.13)\quad \mathrm{d}_{z_2}\bar{b} = \bar{b}_{x_{21}}\mathrm{d}x_{21} + \bar{b}_{x_{22}}\mathrm{d}x_{22};$$

но второй дифференциал в (8.5_2) примет вид

$$(8.14)\quad \mathrm{d}^2_{z_2}\bar{b} = \bar{b}_{x^2_{21}}\mathrm{d}x^2_{21} + 2\bar{b}_{x_{21}x_{22}}\mathrm{d}x_{21}\mathrm{d}x_{22} + \bar{b}_{x^2_{22}}\mathrm{d}x^2_{22} + \bar{b}_{x_{21}}\mathrm{d}^2x_{21} + \bar{b}_{x_{22}}\mathrm{d}^2x_{22}.$$

Условие (8.5_2), принимая во внимание (8.11), приводит теперь еще к одному дополнительному к (8.11) соотношению

$$(\bar{b}\bar{b}_{x_{21}}\bar{b}_{x_{22}}) \equiv 0, \tag{8.15}$$

причем нетрудно показать, что равенства (8.11_3) и (8.11_4) являются следствиями (8.11_1), (8.11_2) и (8.15).(33) Таким образом, последние три условия необходимы и достаточны для выполнения равентства (8.5_2), как и аналогичные им три условия, получаемые заменой первого индекса 2 в (8.11_1), (8.11_2) и (8.15) на индекс 1, необходимы и достаточны для выполнения условия (8.5_1).

Представления в виде определителя Массо в векторной форме мы уже нашли (см. (1.10) и (1.12)). В инвариантной форме они запишутся, очевидно, так:

$$\underset{1}{\bar{a}} = [\bar{b}\mathrm{d}_{z_2}\bar{b}], \quad \underset{2}{\bar{a}} = [\bar{b}\mathrm{d}_{z_1}\bar{b}] \tag{8.16}$$

или, при выполнении условий (8.5) и (8.8), в терминах обычных производных, в виде

$$\underset{1}{\bar{a}}' = [\bar{b}\bar{b}_{x_{21}}], \quad \underset{2}{\bar{a}}' = [\bar{b}\bar{b}_{x_{11}}] \tag{8.17}$$

или, что по существу то же самое, в виде

$$\underset{1}{\bar{a}}'' = [\bar{b}\bar{b}_{x_{22}}], \quad \underset{2}{\bar{a}}'' = [\bar{b}\bar{b}_{x_{12}}] \tag{8.18}$$

(здесь и в (8.17) штрихи — это индексы, а не указатели производных), причем здесь в силу условий (8.5) и (8.8) нет противоречий.

Дейтсвительно,

$$\underset{1}{\bar{a}}'\mathrm{d}x_{21} = [\bar{b}\bar{b}_{x_{21}}\mathrm{d}x_{21}], \quad \underset{1}{\bar{a}}''\mathrm{d}x_{22} = [\bar{b}\bar{b}_{x_{22}}\mathrm{d}x_{22}], \tag{8.19}$$

$$\begin{aligned}[(\underset{1}{a}'\mathrm{d}x_{21})\,(\underset{1}{\bar{a}}''\mathrm{d}x_{22})] &= [[\bar{b}\bar{b}_{x_{21}}\mathrm{d}x_{21}]\,[\bar{b}\bar{b}_{x_{22}}\mathrm{d}x_{22}]] = \\ &= \bar{b}(\bar{b}\bar{b}_{x_{21}}\bar{b}_{x_{22}})\mathrm{d}x_{21}\mathrm{d}x_{22} \equiv 0\end{aligned} \tag{8.20}$$

в силу условия (8.15).

Отсюда следует, что $\underset{1}{\bar{a}}'\mathrm{d}x_{21}$ и $\underset{1}{\bar{a}}''\mathrm{d}x_{22}$ — коллинеарны, а, значит, формулы (8.17) и (8.18) одинаково определяют одно и то же поле (в частности шкалу). Складывая почленно равенства (8.19), получим для определения того же поля вектор

$$\underset{1}{\bar{a}}'\mathrm{d}x_{21} + \underset{1}{\bar{a}}''\mathrm{d}x_{22} = \bar{b}(\bar{b}_{x_{21}}\mathrm{d}x_{21} + \bar{b}_{x_{22}}\mathrm{d}x_{22})]. \tag{8.21}$$

---

(33) Вот доказательство, не задерживаясь на деталях: условия (8.11_1), (8.11_2) и (8.15) выражают компланарность $\bar{b}$, $\bar{b}_{x_{21}}$, $b_{x_{22}}$, $\bar{b}_{x^2_{21}}$, $\bar{b}_{x^2_{22}}$, откуда непосредственно следует исчезновение (8.11_3) и (8.11_4).

Но сумма

$$\bar{b}_{x_{21}}\mathrm{d}x_{21} + \bar{b}_{x_{22}}\mathrm{d}x_{22} = \mathrm{d}_{z_2}\bar{b} \tag{8.22}$$

и мы получаем для определения поля или, в частности, шкалы z_2 опять формулу (8.16_1), что и доказывает наше утверждение, что замена производных с точки зрения обычных производных более жестким требованием, касающимся дифференциалов, не ведет к противоречиям.

Таким образом, в наших условиях (8.5), (8.8) в частности заключены и условия анаморфозы функции

$$F \equiv F(x_{11}, x_{12};\, x_{21}, x_{22};\, x_{31}, x_{32}), \tag{8.23}$$

которые можно выразить в терминах обычных производных.

(Окончание статьи в следующем номере журнала.)

Поступило 10. 10. 1963

Кафедра математики

Всесоюзного заочного инженерно-строительного института
Москва