Matematický časopis

Zdena Riečanová

О регулярности меры

Matematický časopis, Vol. 17 (1967), No. 1, 38--47

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126920

Matematický časopis 17 (1967), No. 1

О РЕГУЛЯРНОСТИ МЕРЫ

ЗДЕНА РИЕЧАНОВА (ZDENA RIEČANOVÁ), Братислава

В настоящей работе исследуется регулярность мер в абстрактном пространстве. При определении регулярности мы исходим из пары систем подмножеств пространства X, удовлетворяющих некоторым условиям. Мы определяем регулярность по отношению к мере, заданной на σ-кольце, порожденном одной из этих систем. Работа возникла путем обобщения теории борелевских и беровских мер в локально компактном хаусдорфовом топологическом пространстве ([1], § 52). В конце работы приводятся примеры пространств и регулярных мер, причем и другие нежели те, обобщением которых возникла эта работа.

1. Определение регулярной меры в абстрактном пространстве

Пусть X — произвольное непустое множество элементов. Пусть $\mathbf{C}$ и $\mathbf{U}$ — произвольные системы подмножеств X со следующими свойствами:

V_1. $\emptyset \in \mathbf{C}$, $\emptyset \in \mathbf{U}$.

V_2. Если $U_i \in \mathbf{U}$ для $i = 1, 2, \ldots$, то и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i \in \mathbf{U}$.

V_3. Если $C_1, C_2 \in \mathbf{C}$, то $C_1 \cup C_2 \in \mathbf{C}$.

V_4. Для всяких двух множеств U и C таких, что $U \in \mathbf{U}$, $C \in \mathbf{C}$, справедливо $U - C \in \mathbf{U}$, $C - U \in \mathbf{C}$.

V_5. Для всякого множества $C \in \mathbf{C}$ существуют множества $U \in \mathbf{U}$, $C_1 \in \mathbf{C}$ такие, что $C \subset U \subset C_1$.

V_6. Для произвольного множества $U \in \mathbf{U}$ справедливо $U \in \mathbf{S}$, где $\mathbf{S}$ — наименьшее σ-кольцо, содержащее систему $\mathbf{C}$.

Лемма 1. *Для произвольной последовательности множеств $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что $C_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2, \ldots$, справедливо $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathbf{C}$.*

Доказательство. Пусть $C_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2, \ldots$ Согласно свойству V_5 существует множество $D \in \mathbf{C}$ и множества $U, V \in \mathbf{U}$ такие, что имеет место $C_1 \subset V \subset D \subset U$. Следовательно, имеет место также $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i \subset V \subset$ $\subset D \subset U$. Из свойства V_4 вытекает $U - C_i \in \mathbf{U}$ для $i = 1, 2, \ldots$ и согласно V_2 имеем $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (U - C_i) \in \mathbf{U}$.

Из соотношений

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (U - C_i) = U - \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i$, $D - (U - \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ и свойства V_4 получаем $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathbf{C}$.

Примечание. Утверждение леммы 1 вытекает уже из самих свойств V_2, V_4 и V_5.

Предположим теперь, что $\mathbf{U}$ и $\mathbf{C}$ обладают свойствами V_1 — V_6, $\mathbf{S}$ — наименьшее σ-кольцо, содержащее систему $\mathbf{C}$ и μ — мера, определенная на $\mathbf{S}$ и конечная на $\mathbf{C}$.

Введем еще следующие определения.

Определение 1. *Множество $E \in \mathbf{S}$ будем называть внешне регулярным по μ, если*

$$\mu(E) = \inf \{\mu(U) : E \subset U \in \mathbf{U}\}.$$

Определение 2. *Множество $E \in \mathbf{S}$ будем называть внутренне регулярным по μ, если*

$$\mu(E) = \sup \{\mu(C) : E \supset C \in \mathbf{C}\}.$$

Определение 3. *Множество $E \in \mathbf{S}$ будем называть регулярным по μ, если оно внешне и внутренне регулярно по μ.*

Определение 4. *Меру μ, определенную на $\mathbf{S}$, будем называть регулярной мерой, если всякое множество $E \in \mathbf{S}$ регулярно по μ.*

Определение 5. *Множество $A \subset X$ будем называть $\mathbf{C}$-ограниченным, если существует множество $C \in \mathbf{C}$ такое, что $A \subset C$.*

Лемма 2. *Всякое множество из $\mathbf{S}$ можно записать в виде суммы возрастающей последовательности $\mathbf{C}$-ограниченных множеств из $\mathbf{S}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{M}$ систему всех подмножеств X, которые можно представить в виде суммы возрастающей последовательности $\mathbf{C}$-ограниченных множеств из $\mathbf{S}$. Покажем, что $\mathbf{M}$ является σ-кольцом, содержащим систему $\mathbf{C}$.

Пусть $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность множеств из $\mathbf{M}$. Тогда для $i = 1, 2, \ldots$ имеет место

$$M_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^i,\ A_k^i \in \mathbf{S},\ A_k^i \subset A_{k+1}^i,\ A_k^i \subset C_k^i \in \mathbf{C},\ k = 1, 2, \ldots$$

Отсюда получаем

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^i,$$

т. е. $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ есть сумма счетного числа $\mathbf{C}$-ограниченных множеств из $\mathbf{S}$.

Обозначим $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$. Согласно предыдущему $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, где $B_n \in \mathbf{S}$, $B_n \subset C_n \in \mathbf{C}$. Согласно свойству V_3

$$M = \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{p} B_n, \quad \bigcup_{n=1}^{p} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{p} C_n, \quad \bigcup_{n=1}^{p} C_n \in \mathbf{C},$$

следовательно, $M \in \mathbf{M}$.

Пусть $N_1, N_2 \in \mathbf{M}$. Тогда из определения $\mathbf{M}$ вытекает

$$N_1 - N_2 = (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) - N_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k - N_2),$$

где $A_k \in \mathbf{S}$, $A_k \subset A_{k+1}$, $A_k \subset C_k \in \mathbf{C}$, $k = 1, 2, \ldots$ Далее отсюда получаем

$$A_k - N_2 \subset A_{k+1} - N_2, \quad A_k - N_2 \in \mathbf{S}, \quad A_k - N_2 \subset C_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

следовательно, $N_1 - N_2 \in \mathbf{M}$.

Справедливость соотношения $\mathbf{C} \subset \mathbf{M}$ очевидна, и так как, как мы только что показали, $\mathbf{M}$ есть σ-кольцо и $\mathbf{S}$ есть наименьшее σ-кольцо, содержащее систему $\mathbf{C}$, то справедливо $\mathbf{S} \subset \mathbf{M}$, откуда вытекает утверждение леммы.

Лемма 3. *Для всякого множества $E \in \mathbf{S}$ существует множество $U \in \mathbf{U}$ такое, что $E \subset U$.*

Доказательство. Пусть $E \in \mathbf{S}$ — произвольное множество. Тогда, согласно лемме 2,

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_k \subset C_k \in \mathbf{C}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Согласно V_5 для каждого $k = 1, 2, \ldots$ существует множество $U_k \in \mathbf{U}$ такое, что $C_k \subset U_k$. Следовательно, $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ и согласно V_2 имеем $\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k \in \mathbf{U}$.

2. Свойства регулярных множеств

Теорема 1. *Объединение произвольной последовательности внешне регулярных множеств есть внешне регулярное множество.*

Теорема 2. *Пересечение произвольной последовательности внутренне регулярных множеств конечной меры есть внутренне регулярное множество.*

Теорема 3. *Объединение возрастающей последовательности внутренне регулярных множеств есть внутренне регулярное множество.*

Теорема 4. *Пересечение убывающей последовательности внешне регулярных множеств конечной меры есть внешне регулярное множество.*

Доказательства теорем 1—4 формально совпадают с доказательствами теорем 3 и 4 из книги [1], гл. X, стр. 220—221, поэтому мы их не приводим.

Теорема 5. *Разность двух регулярных множеств конечной меры есть регулярное множество.*

Доказательство. Пусть E_1, E_2 — регулярные множества конечной меры. Покажем сначала, что E_1—E_2 — внешне регулярное множество. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда существуют множества $U \in \mathbf{U}$, $C \in \mathbf{C}$ такие, что

$$U \supset E_1,\ \mu(U) < \mu(E_1) - \varepsilon/2,$$
$$C \subset E_2,\ \mu(C) > \mu(E_2) - \varepsilon/2.$$

В силу свойства V_4 имеем $U - C \in \mathbf{U}$ и в силу последнего $U - C \supset E_1$—E_2. Далее, имеет место

$$\mu(U - C) - \mu(E_1 - E_2) = \mu[(U - C) - (E_1 - E_2)] \leqq$$
$$< \mu\ [(U - E_1) \cup (E_2 - C)] \leqq \mu(U - E_1) + \mu(E_2 - C) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Покажем дальше, что $E_1 - E_2$ — также внутренне регулярное множество. Выберем опять произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда существуют множества $V \in \mathbf{U}$, $D \in \mathbf{C}$ такие, что

$$V \supset E_2,\quad \mu(V) < \mu(E_2) + \varepsilon/2,\quad D \subset E_1,\quad \mu(D) > \mu(E_1) - \varepsilon/2.$$

В силу свойства V_4 имеем $D - V \in \mathbf{C}$ и выполняется

$$D - V \subset E_1 - E_2, \mu(E_1 - E_2) - \mu(D - V) = \mu[(E_1 - E_2) - (D - V)] \leqq$$
$$< \mu[(E_1 - D) \cup (V - E_2)] \leqq \mu(E_1 - D) + \mu(V - E_2) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Теорема 6. *Объединение двух регулярных множеств конечной меры есть регулярное множество.*

Доказательство. Пусть E_1, E_2 — регулярные множества конечной меры. В силу теоремы 1 и свойства V_1 $E_1 \cup E_2$ является внешне регулярным множеством.

Покажем, что $E_1 \cup E_2$ является также внутренне регулярным множеством. По теореме 5 $E_1 - E_2$ является внутренне регулярным множеством. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда существуют множества C_1, $C_2 \in \mathbf{C}$ такие, что

$$C_1 \subset E_1 - E_2,\ \mu(E_1 - E_2) < \mu(C_1) + \varepsilon/2,$$
$$C_2 \subset E_2,\ \mu(E_2) < \mu(C_2) + \varepsilon/2.$$

Отсюда получаем

$$C_1 \cup C_2 \in \mathbf{C},\ C_1 \cup C_2 \subset E_1 \cup E_2,$$
$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1 - E_2) + \mu(E_2) < \mu(C_1) + \varepsilon/2 +$$
$$+ \mu(C_2) + \varepsilon/2 = \mu(C_1 \cup C_2) + \varepsilon.$$

Следовательно, $E_1 \cup E_2$ является внутренне регулярным множеством.

3. Необходимые и достаточные условия для регулярности меры

Пусть X — непустое множество элементов. Пусть $\mathbf{C}$ и $\mathbf{U}$ — произвольные системы подмножеств X, обладающие свойствами V_1 — V_6. Пусть $\mathbf{S}$ — наименьшее σ-кольцо, содержащее систему $\mathbf{C}$. Пусть μ — мера, определенная на $\mathbf{S}$ и конечная на $\mathbf{C}$. Необходимые и достаточные условия для регулярности меры μ даются теоремой 8. Для ее доказательства нам понадобится еще следующая теорема.

Теорема 7. *Все множества из* $\mathbf{C}$ *внешне регулярны тогда и только тогда, когда все* $\mathbf{C}$*-ограниченные множества из* $\mathbf{U}$ *внутренне регулярны.*

Доказательство. Пусть все множества из $\mathbf{C}$ внешне регулярны. Пусть U — произвольное $\mathbf{C}$-ограниченное множество из $\mathbf{U}$, т. е. для него существует такое множество $C \in \mathbf{C}$, что $C \supset U$. По свойству V_4 имеем $C - U \in \mathbf{C}$ и согласно предположению $C - U$ является внешне регулярным множеством. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует, следовалельно, множество $V \in \mathbf{U}$ такое, что

$$C - U \subset V,\ \mu(C - U) + \varepsilon > \mu(V).$$

Согласно свойству V_4 имеем $C - V \in \mathbf{C}$ и выполняется

$$C - V \subset U,\ \mu(U) - \mu(C - V) = \mu\,[U - (C - V)] =$$
$$= \mu(U \cap V) \leqq \mu\,[V - (C - U)] = \mu(V) - \mu(C - U) < \varepsilon.$$

Пусть теперь все $\mathbf{C}$-ограниченные множества из $\mathbf{U}$ внутренне регулярны. Пусть $C \in \mathbf{C}$ — произвольное множество. Согласно свойству V_5 существуют множества $U \in \mathbf{U}$, $C_1 \in \mathbf{C}$ такие, что $C \subset U \subset C_1$. Очевидно, $U - C \subset C_1$, и согласно свойству V_4 $U - C \in \mathbf{U}$, т. е. $U - C$ является $\mathbf{C}$-ограниченным множеством из $\mathbf{U}$, следовательно, оно внутренне регулярно и $\mu(U - C) < < \infty$.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует множество $C_2 \in \mathbf{C}$ такое, что $C_2 \subset U - C$, $\mu(U - C) - \varepsilon < \mu(C_2)$. Отсюда для множества C далее получим

$$C = U - (U - C) \subset U - C_2,\ \mu(U - C_2) - \mu(C) = \\ = \mu\,[(U - C_2) - C] = \mu\,[(U - C) - C_2] = \\ = \mu(U - C) - \mu(C_2) < \varepsilon,$$

т. е. C является внешне регулярным множеством.

Теорема 8. *Для того, чтобы мера μ была регулярной, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий:*

A. *Все множества из $\mathbf{C}$ внешне регулярны.*

B. *Все $\mathbf{C}$-ограниченные множества из $\mathbf{U}$ внутренне регулярны.*

Доказательство. Необходимость условий A и B для регулярности меры μ очевидна. Нужно еще показать, что каждое из условий A и B является также достаточным для того, чтобы мера μ была регулярной. Вследствие теоремы 7 достаточно доказать, например, что A является достаточным условием для регулярности меры μ.

Итак, предположим, что все множества из $\mathbf{C}$ внешне регулярны по μ. По лемме 2 всякое множество из $\mathbf{S}$ можно записать в виде объединения возрастающей последовательности $\mathbf{C}$-ограниченных множеств из $\mathbf{S}$. Согласно теоремам 1 и 3 объединение возрастающей последовательности регулярных множеств есть регулярное множество. Следовательно, достаточно показать, что произвольное $\mathbf{C}$-ограниченное множество регулярно.

Пусть $E \in \mathbf{S}$ — произвольное $\mathbf{C}$-ограниченное множество, т. е. существует множество $C \in \mathbf{C}$ такое, что $E \subset C$. Обозначим через $\mathbf{N}$ систему всех регулярных множеств из $\mathbf{S}$, являющихся подмножествами множества C, т. е.

$$\mathbf{N} = \{A : A \in \mathbf{S},\ A \subset C,\ A \text{ — регулярное множество}\}.$$

Тогда все множества из $\mathbf{C}$, очевидно, внутренне регулярны, а согласно предположению также внешне регулярны, значит, $\mathbf{C} \cap C \subset \mathbf{N}$. Через $\mathbf{C} \cap C$ мы обозначили систему всех множеств A таких, что для них существуют множества $B \in \mathbf{C}$ такие, что $A = B \cap C$.

Из теорем 5 и 6 следует, что $\mathbf{N}$ — кольцо. Из теорем 1 — 4 следует, что $\mathbf{N}$ — монотонная система. По теореме 1, [1], стр. 31, $\mathbf{N}$ есть σ-кольцо, содержащее систему $\mathbf{C} \cap C$. Но отсюда вытекает, что $\mathbf{N}$ содержит наименьшее σ-кольцо над системой $\mathbf{C} \cap C$, но последняя в силу теоремы 5, [1], стр. 30 равна системе $\mathbf{S} \cap C$. Следовательно, $\mathbf{S} \cap C \subset \mathbf{N}$.

Но так как $E \in \mathbf{S}$, $E \subset C$, то $E \in \mathbf{S} \cap C$, т. е. E является регулярным множеством.

Следствие 1. *Если для произвольного* **C***-ограниченного множества* $U \in \mathbf{U}$ *существует такая последовательность множетсв* $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$, $C_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2, \ldots$, *что* $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, *то мера* μ *является регулярной мерой на* **S**.

Доказательство. Пусть U — произвольное **C**-ограниченное множество из **U**. Тогда по предположению $\mu(U) < \infty$, и существует последовательность множеств $C_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2, \ldots$ такая, что

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{i} C_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,$$

где $D_n = \bigcup_{k=1}^{n} C_k \in \mathbf{C}$, $D_n \subset D_{n+1}$ для $i = 1, 2, \ldots$ Следовательно, имеет место $\mu(U) = \lim_{n\to\infty} \mu(D_n)$, т. е. для произвольного $\varepsilon > 0$ существует натуральное число n_0 такое, что

$$D_{n_0} \subset U, \ D_{n_0} \in \mathbf{C}, \ \mu(U) - \varepsilon < \mu(D_{n_0}).$$

Тем самым доказано, что все **C**-ограниченные множества из **U** внутренне регулярны и следовательно, согласно теореме 8 μ есть регулярная мера.

Примечание. Смотри примеры 3 и 5.

Следствие 2. *Если для систем* **C** *и* **U** *выполняется* $\mathbf{C} \subset \mathbf{U}$ *или* $\mathbf{U} \subset \mathbf{C}$, *то мера* μ *на* **S** *регулярна.*

Доказательство. Утверждение очевидно, так как все множества из **C**, очевидно, внутренне регулярны и все множества из **U** внешне регулярны.

Определение 6. *Будем говорить, что* μ *— регулярная мера на* σ*-кольце* $\mathbf{S}_1 \subset \mathbf{S}$, *если всякое множество* $E \in \mathbf{S}_1$ *регулярно по* μ.

Теорема 9. *Пусть* μ *— конечная мера на* **S**. *Пусть*

$$\mathbf{A} = \{A : A \in \mathbf{U}, \ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \ C_n \in \mathbf{C}, \ n = 1, 2, \ldots\}.$$

Тогда μ *есть регулярная мера на наименьшем* σ*-кольце* $\mathbf{S}(\mathbf{A})$ *над* **A**.

Доказательство. Очевидно, $\mathbf{S}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{S}$. Пусть $A \in \mathbf{A}$, тогда, так как $A \in \mathbf{U}$, A есть внешне регулярное множество. Далее, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{n} C_k$, $C_n \in \mathbf{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, следовательно, по свойству V_3 и теореме 3 A является также внутренне регулярным множеством.

Пусть **N** — система всех регулярных множеств. Тогда по теоремам 5 и 6 **N** есть кольцо и по теоремам 1—4 **N** есть монотонная система, следовательно, **N** есть σ—кольцо. Поскольку $\mathbf{A} \subset \mathbf{N}$, то и $\mathbf{S}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{N}$.

4. Примеры

Покажем теперь несколько примеров пространств X и в них систем $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{U}$ со свойствами V_1 — V_6.

Пример 1. Пусть X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство. Пусть $\boldsymbol{C}$ — система всех компактных подмножеств пространства X, $\boldsymbol{U}$ — система всех открытых множеств, принадлежащих наименьшему σ—кольцу, содержащему систему $\boldsymbol{C}$ (обозначим его через $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{C})$). Покажем, что системы $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{U}$ обладают свойствами V_1 — V_6.

Свойства V_1, V_2, V_3 и V_6 очевидны. Пусть $U \in \boldsymbol{U}$, $C \in \boldsymbol{C}$ — произвольные множества. Тогда, очевидно, C замкнуто, т. е. $U - C$ открыто, и так как $U \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{C})$, то $U - C \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{C})$. Далее, $C - U$ замкнуто, а поскольку $C - U \subset C$, то $C - U$ компактно, т. е. $C - U \in \boldsymbol{C}$. Значит, выполняется также свойство V_4. Свойство V_5 выполнено по теореме 4, [1], стр. 212. Итак, если μ — произвольная мера на $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{C})$, которая конечна на $\boldsymbol{C}$, то для нее можно применить теорему 8.

Пример 2. Пусть X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\boldsymbol{C}$ — система всех компактных G_δ подмножеств пространства X, $\boldsymbol{U}$ — система всех открытых множеств, принадлежащих наименьшему σ-кольцу $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{C})$ над системой $\boldsymbol{C}$.

Покажем, что системы $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{U}$ обладают свойствами V_1 — V_6. Свойства V_1, V_2, V_3 и V_6 очевидны. Если $C \in \boldsymbol{C}$, $U \in \boldsymbol{U}$ — произвольные множества, то, очевидно, $U - C \in \boldsymbol{U}$, так как C замкнуто и $U \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{C})$. Далее, $C - U$ компактно и поскольку C и U — бэровские множества, то множество $C - U$ — также бэровское. Согласно теореме 4, [1], стр. 212, всякое компактное бэровское множество — типа G_δ и следовательно, $C - U \in \boldsymbol{C}$. Тем самым показано, что выполняется V_4. Свойство V_5 выполнено в силу теоремы 4, [1], стр. 212.

Итак, если μ — произвольная мера, определенная на $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{C})$ и конечная на $\boldsymbol{C}$ (т. е. согласно [1] μ есть бэровская мера), то для нее можно применить теорему 8.

Примечание. Примеры 1 и 2 являются, собственно говоря, двумя исследуемыми случаями из главы X, [1], стр. 211—223.

Пример 3. Пусть X — произвольное топологическое пространство. Пусть $\boldsymbol{C}$ — система всех замкнутых подмножеств X, $\boldsymbol{U}$ — система всех открытых подмножеств X, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{C})$ — наименьшее σ-кольцо над $\boldsymbol{C}$. Тогда, очевидно, $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{C}$ обладают свойствами V_1 — V_5. Покажем, что выполнено также свойство V_6.

Пусть $U \in \boldsymbol{U}$ — произвольное множество. Обозначим через $\mathscr{C}U$ дополнение множества U и через $\operatorname{Fr} U$ — границу множества U, т. е. $\mathscr{C}U = X - U$

$\mathrm{Fr}U = \overline{U} \cap (\overline{\mathscr{C}U})$. Тогда $U = \overline{U} - \mathrm{Fr}U$. Но так как $\overline{U}$, $\mathrm{Fr}U \in \mathbf{C}$, то $U \in \mathbf{S}(\mathbf{C})$, т. е. выполнено V_6.

Итак, если μ — произвольная вполне конечная мера на $\mathbf{S}(\mathbf{C})$, то для нее применима теорема 8.

Теорема 10. (1) *Пусть X — метрическое пространство, $\mathbf{C}$ — система всех замкнутых подмножеств X, $\mathbf{U}$ — система всех открытых подмножеств X, μ — мера, определенная на $\mathbf{S}(\mathbf{C})$ и конечная на $\mathbf{C}$.*

Тогда μ есть регулярная мера.

Доказательство. Пусть $U \in \mathbf{U}$ — произвольное множество. Тогда U — типа F_σ, т. е. $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, где $C_n \in \mathbf{C}$ для $n = 1, 2, \ldots$ Согласно следствию 1 теоремы 8 мера μ регулярна.

Пример 4. Пусть X — произвольное топологическое пространство. Пусть $\mathbf{C}$ — такая система замкнутых подмножеств X, что выполняется

1. $\emptyset$, $X \in \mathbf{C}$.
2. Если $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность множеств из $\mathbf{C}$, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathbf{C}$.
3. Если $C_1, C_2 \in \mathbf{C}$, то $C_1 \cup C_2 \in \mathbf{C}$.

Пусть $\mathbf{U}$ — система всех дополнений множеств из $\mathbf{C}$.

Так как для произвольных множеств $C \in \mathbf{C}$, $U \in \mathbf{U}$ справедливо

$$C - U = C \cap \mathscr{C}U, \quad U - C = \mathscr{C}[(\mathscr{C}U) \cup C],$$
$$U = \mathscr{C}(\mathscr{C}U) = X - \mathscr{C}U \in \mathbf{S}(\mathbf{C}),$$

то $\mathbf{C}$ и $\mathbf{U}$ удовлетворяют свойствам V_1 — V_6.

Следовательно, если μ — мера, определенная на $\mathbf{S}(\mathbf{C})$ и конечная на $\mathbf{C}$, то для нее применима теорема 8.

Пример 5. Пусть X — метрическое пространство. Пусть $\mathbf{C}$ — система всех замкнутых ограниченных подмножеств пространства X. (Множество $E \subset X$ называется ограниченным, если существует точка $a \in X$ и число $r > 0$ такие, что $E \subset S(a, r)$, где $S(a, r) = \{x : x \in X,\ \varrho(a, x) < r\}$.) Пусть $\mathbf{U}$ — система всех открытых подмножеств X. Системы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{U}$ обладают, очевидно, свойствами V_1 — V_5. Покажем, что они обладают также свойством V_6.

Пусть A — произвольное замкнутое подмножество X. Тогда $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap C_n^x$, где $C_n^x = \{y : \varrho(x, y) \leqq n\}$, причем x — произвольный

(1) Утверждение теоремы 10 содержит в себе утверждение примера (3c) и (3d) из книги [1], § 43.

фиксированный элемент из X. Отсюда вытекает, что $A \cap C_n^x$ — замкнутое ограниченное множество и следовательно, $A \in \mathbf{S}(\mathbf{C})$.

Пусть теперь $U \in \mathbf{U}$ — произвольное множество. Тогда

$$U = \overline{U} - \mathrm{Fr}U = \overline{U} - [\overline{U} \cap (C\overline{U})],$$

т. е. $U \in \mathbf{S}(\mathbf{C})$.

Теорема 11. *Пусть X — метрическое пространство. Пусть $\mathbf{C}$ — система всех замкнутых ограниченных подмножеств X, $\mathbf{U}$ — система всех открытых подмножеств X, μ — мера, определенная на $\mathbf{S}(\mathbf{C})$ и конечная на $\mathbf{C}$.*

Тогда μ есть регулярная мера.

Доказательство. Пусть U — произвольное $\mathbf{C}$—ограниченное множество из $\mathbf{U}$. Так как U — типа F_σ, то $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, где $C_n \subset U \subset C \in \mathbf{C}$. Значит, $C_n \in \mathbf{C}$. Согласно следствию 1 теоремы 8 мера μ регулярна.

Пример 6. Пусть X — произвольное топологическое пространство, $\mathbf{C}$ — система всех замкнутых подмножеств X, $\mathbf{U}$ — система всех открытых подмножеств X. Пусть $\mathbf{A}$ — система всех открытых F_σ множеств. Пусть μ — конечная мера на $\mathbf{S}(\mathbf{C})$. Тогда по теореме 9 μ есть регулярная мера на наименьшем σ-кольце $\mathbf{S}(\mathbf{A})$ над $\mathbf{A}$.

Примечание. Утверждение, содержащееся в примере 6, совпадает с утверждением теоремы 1 из работы [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Халмош П. Р., *Теория меры*, Москва 1953.

[2] Tortrat A., *Mesures régulières et mesures parfaites*, C. R. Acad. Sci. Paris *258* (1964), 1135—1136.

Поступило 29. 11. 1965.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Elektrotechnickej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej,
Bratislava