Matematicko-fyzikálny časopis

Mária Barnovská

Асимптотическое представление спектральной матрицы дифференциального оператора четвертого порядка

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 16 (1966), No. 2, 105--127

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126912`

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 2, 1966

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

МАРИЯ БАРНОВСКА (MÁRIA BARNOVSKÁ), Братислава

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе находится спектральная матрица дифференциального оператора четвертого порядка L на полуоси $(0, \infty)$. Определение спектральной матрицы дифференциального оператора можно найти, например, в книге [1] (стр. 287). Оператор L определен дифференциальным выражением

$$l(x) = x^{\mathrm{IV}} + q(t)x \tag{1}$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} &x(0) \sin \alpha_1 + x'''(0) \cos \alpha_1 = 0, \\ &x'(0) \sin \alpha_2 + x''(0) \cos \alpha_2 = 0, \\ &\left(q(t) \geqslant 0, \int_0^\infty q(t) \mathrm{d}t < \infty\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Очевидно, здесь идет речь о оператор, где 0 — регулярный, а ∞ — сингулярный конец интервала $(0, \infty)$. Оператор L является расширением дифференциального оператора L_0, определенного дифференциальным выражением (1) и нулевыми краевыми условиями. Областью определения D_L оператора L является множество таких функций $x(t)$ из $L_2(0, \infty)$, которые имеют вторую производную в $L_2(0, \infty)$ и удовлетворяют условиям (2). По теореме 3 ([2], § 23, стр. 262) индекс дефекта оператора L_0 есть $(2, 2)$.

Если обозначим через $u_1(t, \lambda)$ и $u_2(t, \lambda)$ какие-нибудь линейно независимые решения уравнения $l(x) = \lambda x$, являющиеся целыми аналитическими функциями параметра λ и удовлетворяющие условиям (2), то в силу теоремы 2' ([2], § 21, стр. 213) существует спектральная матрица $\sigma(\lambda) = \|\sigma_{ij}\|$, $i, j = 1, 2$ такая, что формулы

$$\varphi_j(\lambda) = \int\limits_0^\infty f(t) u_j(t, \lambda) \mathrm{d}t, \qquad j = 1, 2;$$

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{2} \varphi_j(\lambda) u_k(t, \lambda) \mathrm{d}\sigma_{jk}(\lambda)$$

устанавливают изометрическое изображение $L_2(0, \infty)$ на L_σ^2 и наоборот, а при этом оператор L переходит в оператор A_σ. В силу следствия теоремы 3 ([2]), § 21, в конце страницы 217) эта спектральная матрица σ определена однозначно (с точностью до аддитивной постоянной).

Теперь рассмотрим краевую задачу, данную дифференциальным уравнением

(3) $$l(x) = \lambda x,$$

краевыми условиями (2) и условиями

(4) $$\begin{aligned} x(l) \sin \beta_1 + x'''(l) \cos \beta_1 &= 0, \\ x'(l) \sin \beta_2 + x''(l) \cos \beta_2 &= 0 \end{aligned}$$

на интервале $(0, l)$.

При определенных β_1, β_2 можно граничным переходом (в общем случае посредством подходяще выбранной последовательности l_i, $l_i \to \infty$) вывести спектральную матрицу $\varrho = \|\varrho_{ij}\|$, $i, j = 1, 2$ такую, что имеет место равенство Парсеваля

(5) $$\int\limits_0^\infty |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{j,k=1}^{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_j(\lambda) \psi_j(\lambda) \mathrm{d}\varrho_{jk}(\lambda),$$

где

(6) $$\psi_j(\lambda) = \int\limits_0^\infty u_j(t, \lambda) f(t) \mathrm{d}t, \qquad j = 1, 2;$$

(7) $$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{2} \psi_j(\lambda) u_k(t, \lambda) \mathrm{d}\varrho_{jk}(\lambda).$$

Из (5) вытекает, что формулы (6) и (7) устанавливают изометрическое изображение пространства $L_2(0, \infty)$ на L_ϱ^2 и наоборот, и легко показать, что оператор L переходит в оператор A_ϱ. Ввиду однозначности спектральной матрицы отсюда следует, что $\varrho(\lambda) = \sigma(\lambda) + \text{const}$. А это означает, что спектральная матрица, выведена описанным граничным переходом, в нашем случае не зависит ни от краевых условий (4), ни от выбора подпоследовательности при переходе к сходяйщейся последовательности.

Поставленная задача решается методом, изложенным в работе [3].

Сначала находятся частные линейно независимые решения уравнения (3), а также собственные значения и собственные функции граничной задачи (3) — (2) — (4). Затем находятся асимптотические формулы для элементов спектральной матрицы данной краевой задачи в случае конечного интервала $(0, l)$. Из них путем предельного перехода при условии, что $l \to \infty$, находятся асимптотические формулы выше упомянутого расширения L дифференциального оператора L_0 на полуоси $(0, \infty)$.

§ 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим краевую задачу (3) — (2) — (4) на конечном интервале $(0, l)$. Предполагаем, что $q(t)$ — действительная суммируемая функция на $(0, \infty)$ и, кроме того, $q(t) \geq 0$. α_k, β_k — произвольные действительные числа, λ — большой параметр.

Положим $\operatorname{ctg} \alpha_1 = -h_1$, $\operatorname{ctg} \alpha_2 = -h_2$, $\operatorname{ctg} \beta_1 = H_1$, $\operatorname{ctg} \beta_2 = H_2$. Тогда граничные условия (2) — (4) перепишутся в виде:

$$
\begin{aligned}
x(0) &- h_1 x'''(0) = 0, \\
x'(0) &- h_2 x''(0) = 0, \\
x(l) &+ H_1 x'''(l) = 0, \\
x'(l) &+ H_2 x''(l) = 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Ввиду известных признаков [4], [5], данная граничная задача самосопряженная и положительно определенная (в предположении, что $h_1 < 0$, $H_1 < 0$, $h_2 > 0$, $H_2 > 0$). Известно, что такая задача имеет действительные собственные значения. Легко доказать, что эти собственные значения положительны. Поэтому ограничимся рассмотрением собственных значений на интервале $(0, \infty)$. Для этой задачи существует полная ортонормированная система собственных функций, соответствующих упомянутым собственным значениям (см. [1], стр. 286).

Прежде чем перейти к установлению асимптотических формул для собственных значений и собственных функций, найдем линейно независимые решения данного уравнения. При этом по существу используем метод И. М. Рапопорта [6], который состоит в замене дифференциального уравнения (3) эквивалентной ему системой дифференциальных уравнений первого порядка, которую приводим к L-диагональному виду.

Вводя в рассмотрение параметр

$$
s = \sqrt[4]{\lambda}, \quad \lambda > 0 \tag{9}
$$

и полагая

$$(10)\qquad \begin{gathered} x = x_1, \quad \dot{x} = s x_2, \\ \ddot{x} = s^2 x_3, \quad \dddot{x} = s^3 x_4, \\ \ddddot{x} = [\lambda - q(t)] x_1, \end{gathered}$$

дифференциальное уравнение (3) заменим следующей эквивалентной системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$(11)\qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= s x_2, \\ \dot{x}_2 &= s x_3, \\ \dot{x}_3 &= s x_4, \\ \dot{x}_4 &= \left[-\frac{q(t)}{s^3} + s \right] x_1, \quad t > 0, \ s > 0. \end{aligned}$$

Матрицу коэффициентов полученной системы можно переписать в виде суммы таких матриц:

$$(12)\qquad \mathbf{A}_0(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{q(t)}{s^3} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{A} = s \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Покажем, что подстановка

$$(13)\qquad \mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{Y},$$

где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — векторы четырехмерного пространства, а $\mathbf{T}$ — матрица вида

$$(14)\qquad \mathbf{T} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i \end{Vmatrix}$$

приводит систему (11) к виду

$$\frac{dy_i}{dt} = \omega_i(t, s) y_i + \sum_{j=1}^{4} c_{ij}(t, s) y_j, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

причем $c_{ij}(t,s)$ — функции, суммируемые в интервале (t_0, ∞).

В силу подстановки (13), уравнения (11) перепишутся так:

$$(15)\qquad \frac{d}{dt}\mathbf{T}\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{Y} + \mathbf{A}_0\mathbf{T}\mathbf{Y}.$$

Операторы $\dfrac{d}{dt}$ и $\mathbf{T}$ перестановочные, поэтому

(16) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{T}\boldsymbol{Y} = \mathbf{T}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t} = (\mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{A}_0\mathbf{T})\boldsymbol{Y},$$

откуда в силу обратимости матрицы $\mathbf{T}$

(17) $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t} = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_0\mathbf{T})\boldsymbol{Y}.$$

Таким образом, $\omega_i(t,s)$ являются элементами матрицы $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, а $c_{ij}(t,s)$ элементами матрицы $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_0\mathbf{T}$. Чтобы матрица $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ была диагональной, то элементами j-ого столбца матрицы $\mathbf{T}$ должны быть составляющие вектора, соответствующего собственному числу $\omega_j(t,s)$ матрицы $\mathbf{A}(t)$.

Из (12) найдем, что

(18) $$\begin{aligned} &\omega_1(t, s) = s, \quad \omega_2(t, s) = -s,\\ &\omega_3(t, s) = \mathrm{i}s, \quad \omega_4(t, s) = -\mathrm{i}s, \end{aligned}$$

а

(19) $$\begin{aligned} c_{1j}(t, s) &= -\frac{1}{4s^3}\,q(t),\\ c_{2j}(t, s) &= \frac{1}{4s^3}\,q(t),\\ c_{3j}(t, s) &= -\frac{\mathrm{i}}{4s^3}\,q(t),\\ c_{4j}(t, s) &= \frac{\mathrm{i}}{4s^3}\,q(t), \qquad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Положим в уравнениях (17)

(20) $$y_i = \eta_i^{(j)}(t, s)e^{\omega_j(t, s)}, \qquad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Тогда относительно $\eta_i^{(j)}$ получим такую систему сингулярных интегральных уравнений:

(21) $$\begin{aligned} \eta_j^{(j)}(t, s) &= 1 + \int_0^t \sum_{k=1}^{4} c_{jk}(\tau, s)\eta_k^{(j)}(\tau, s)\mathrm{d}\tau,\\ \eta_i^{(j)}(t, s) &= \int_0^t e^{(\omega_i-\omega_j)(t-\tau)} \sum_{k=1}^{4} c_{ik}(\tau, s)\eta_k^{(j)}(\tau, s)\mathrm{d}\tau\\ &\text{при } \operatorname{Re}(\omega_i - \omega_j) \leq 0, \quad i \neq j;\\ \eta_i^{(j)}(t, s) &= \int_\infty^t e^{(\omega_i-\omega_j)(t-\tau)} \sum_{k=1}^{4} c_{ik}(\tau, s)\eta_k^{(j)}(\tau, s)\mathrm{d}\tau\\ &\text{при } \operatorname{Re}(\omega_i - \omega_j) > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Решив систему интегральных уравнений (21) методом последовательных приближений, приняв за нулевые приближения

$$\eta_{i,0}^{(j)}(t,s) = \begin{cases} 1 & \text{для } i = j, \\ 0 & \text{для } i \neq j, \quad i,j = 1,2,3,4, \end{cases}$$

согласно (20), (13) и (10) найдем асимптотические формулы для линейно независимых решений уравнения (3) и их первых трех производных в следующем виде:

$$x^{(1)}(t,s) = \left[1 - \frac{1}{4s^3}\int_0^t q(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{4s^3}\int_0^t e^{-2s(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau + \right. \tag{22}$$

$$\left. + \frac{1}{2s^3}\int_0^t e^{-s(t-\tau)}\sin s(t-\tau)\, q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^5}\right)\right]e^{st};$$

$$\dot{x}^{(1)}(t,s) = s\left[1 - \frac{1}{4s^3}\int_0^t q(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{4s^3}\int_0^t e^{-2s(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2s^3}\int_0^t e^{-s(t-\tau)}\cos s(t-\tau)\, q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^5}\right)\right]e^{st};$$

$$\ddot{x}^{(1)}(t,s) = s^2\left[1 - \frac{1}{4s^3}\int_0^t q(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{4s^3}\int_0^t e^{-2s(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2s^3}\int_0^t e^{-s(t-\tau)}\sin s(t-\tau)\, q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^5}\right)\right]e^{st};$$

$$\dddot{x}^{(1)}(t,s) = s^3\left[1 - \frac{1}{4s^3}\int_0^t q(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{4s^3}\int_0^t e^{-2s(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2s^3}\int_0^t e^{-s(t-\tau)}\cos s(t-\tau)\, q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^5}\right)\right]e^{st};$$

$$x^{(2)}(t,s) = \left[1 + \frac{1}{4s^3}\int_0^t q(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{4s^3}\int_\infty^t e^{2s(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2s^3}\int_\infty^t e^{s(t-\tau)}\sin s(t-\tau)\, q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^5}\right)\right]e^{-st};$$

$$\dot{x}^{(2)}(t, s) = s\Bigg[-1 - \frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t q(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{4s^3}\int\limits_\infty^t e^{2s(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2s^3}\int\limits_\infty^t e^{s(t-\tau)}\cos s(t-\tau)\, q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^5}\right)\Bigg]e^{-st};$$

$$\ddot{x}^{(2)}(t, s) = s^2\Bigg[1 + \frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t q(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{4s^3}\int\limits_\infty^t e^{2s(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2s^3}\int\limits_\infty^t e^{s(t-\tau)}\sin s(t-\tau)\, q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^5}\right)\Bigg]e^{-st};$$

$$\dddot{x}^{(2)}(t, s) = s^3\Bigg[-1 - \frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t q(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{4s^3}\int\limits_\infty^t e^{2s(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2s^3}\int\limits_\infty^t e^{s(t-\tau)}\cos s(t-\tau)\, q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^5}\right)\Bigg]e^{-st};$$

$$x^{(3)}(t, s) = \Bigg[1 - \frac{\mathrm{i}}{4s^3}\int\limits_0^t q(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{\mathrm{i}}{4s^3}\int\limits_0^t e^{-2\mathrm{i}s(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{4s^3}\int\limits_\infty^t e^{s(1-\mathrm{i})(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t e^{-s(1+\mathrm{i})(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^5}\right)\Bigg]e^{\mathrm{i}st};$$

$$\dot{x}^{(3)}(t, s) = s\Bigg[\mathrm{i} + \frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t q(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t e^{-2\mathrm{i}s(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{4s^3}\int\limits_\infty^t e^{s(1-\mathrm{i})(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t e^{-s(1+\mathrm{i})(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^5}\right)\Bigg]e^{\mathrm{i}st};$$

$$\ddot{x}^{(3)}(t, s) = s^2\Bigg[-1 + \frac{\mathrm{i}}{4s^3}\int\limits_0^t q(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{\mathrm{i}}{4s^3}\int\limits_0^t e^{-2\mathrm{i}s(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{4s^3}\int\limits_\infty^t e^{s(1-\mathrm{i})(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t e^{-s(1+\mathrm{i})(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^5}\right)\Bigg]e^{\mathrm{i}st};$$

$$\dddot{x}^{(3)}(t,s)=s^3\Bigg[-\mathrm{i}-\frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t q(\tau)\mathrm{d}\tau-\frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t e^{-2\mathrm{i}s(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau+$$

$$-\frac{1}{4s^3}\int\limits_\infty^t e^{s(1-\mathrm{i})(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau-\frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t e^{-s(1+\mathrm{i})(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau+o\left(\frac{1}{s^5}\right)\Bigg]e^{\mathrm{i}st};$$

$$x^{(4)}(t,s)=\Bigg[1+\frac{\mathrm{i}}{4s^3}\int\limits_0^t q(\tau)\mathrm{d}\tau-\frac{\mathrm{i}}{4s^3}\int\limits_0^t e^{2\mathrm{i}s(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau-$$

$$-\frac{1}{4s^3}\int\limits_\infty^t e^{s(1+\mathrm{i})(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t e^{-s(1-\mathrm{i})(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau+o\left(\frac{1}{s^5}\right)\Bigg]e^{-\mathrm{i}st};$$

$$\dot{x}^{(4)}(t,s)=s\Bigg[-\mathrm{i}+\frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t q(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t e^{2\mathrm{i}s(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$-\frac{1}{4s^3}\int\limits_\infty^t e^{s(1+\mathrm{i})(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau-\frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t e^{-s(1-\mathrm{i})(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau+o\left(\frac{1}{s^5}\right)\Bigg]e^{-\mathrm{i}st};$$

$$\ddot{x}^{(4)}(t,s)=s^2\Bigg[-1-\frac{\mathrm{i}}{4s^3}\int\limits_0^t q(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{\mathrm{i}}{4s^3}\int\limits_0^t e^{2\mathrm{i}s(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau-$$

$$-\frac{1}{4s^3}\int\limits_\infty^t e^{s(1+\mathrm{i})(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t e^{-s(1-\mathrm{i})(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau+o\left(\frac{1}{s^5}\right)\Bigg]e^{-\mathrm{i}st};$$

$$\dddot{x}^{(4)}(t,s)=s^3\Bigg[\mathrm{i}-\frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t q(\tau)\mathrm{d}\tau-\frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t e^{2\mathrm{i}s(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau-$$

$$-\frac{1}{4s^3}\int\limits_\infty^t e^{s(1+\mathrm{i})(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau-\frac{1}{4s^3}\int\limits_0^t e^{-s(1-\mathrm{i})(t-\tau)}q(\tau)\mathrm{d}\tau+o\left(\frac{1}{s^5}\right)\Bigg]e^{-\mathrm{i}st}.$$

Обозначим через $W_1(t,s)$ и $W_2(t,s)$ решения уравнения (3), удовлетворяющие соответственно начальным условиям:

(23) $\quad W_1(0,s)=h_1,\quad W_1'(0,s)=0,\quad W_1''(0,s)=0,\quad W_1'''(0,s)=1;$

(24) $\quad W_2(0,s)=0,\quad W_2'(0,s)=h_2,\quad W_2''(0,s)=1,\quad W_2'''(0,s)=0.$

Зная частные линейно независимые решения $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ дифференциального уравнения (3), мы можем записать его общее решение в таком виде

$$W(t, s) = ax^{(1)}(t, s) + bx^{(2)}(t, s) + cx^{(3)}(t, s) + dx^{(4)}(t, s), \tag{25}$$

где a, b, c, d — произвольные постоянные. А чтобы найти решения $W_1(t, s)$ и $W_2(t, s)$, нужно найти коэффициенты a, b, c, d, соответствующие начальным условиям (23), (24).

Для нахождения a_1, b_1, c_1, d_1, соответствующих начальным уловиям (23), получим такую систему алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned}
&a_1x^{(1)}(0, s) + b_1x^{(2)}(0, s) + c_1x^{(3)}(0, s) + d_1x^{(4)}(0, s) = h_1,\\
&a_1\dot{x}^{(1)}(0, s) + b_1\dot{x}^{(2)}(0, s) + c_1\dot{x}^{(3)}(0, s) + d_1\dot{x}^{(4)}(0, s) = 0,\\
&a_1\ddot{x}^{(1)}(0, s) + b_1\ddot{x}^{(2)}(0, s) + c_1\ddot{x}^{(3)}(0, s) + d_1\ddot{x}^{(4)}(0, s) = 0,\\
&a_1\dddot{x}^{(1)}(0, s) + b_1\dddot{x}^{(2)}(0, s) + c_1\dddot{x}^{(3)}(0, s) + d_1\dddot{x}^{(4)}(0, s) = 1.
\end{aligned} \tag{26}$$

Использовав начальные условия (24), получим аналогичную систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_2, b_2, c_2, d_2:

$$\begin{aligned}
&a_2x^{(1)}(0, s) + b_2x^{(2)}(0, s) + c_2x^{(3)}(0, s) + d_2x^{(4)}(0, s) = 0,\\
&a_2\dot{x}^{(1)}(0, s) + b_2\dot{x}^{(2)}(0, s) + c_2\dot{x}^{(3)}(0, s) + d_2\dot{x}^{(4)}(0, s) = h_2,\\
&a_2\ddot{x}^{(1)}(0, s) + b_2\ddot{x}^{(2)}(0, s) + c_2\ddot{x}^{(3)}(0, s) + d_2\ddot{x}^{(4)}(0, s) = 1,\\
&a_2\dddot{x}^{(1)}(0, s) + b_2\dddot{x}^{(2)}(0, s) + c_2\dddot{x}^{(3)}(0, s) + d_2\dddot{x}^{(4)}(0, s) = 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Теперь подставим в уравнения (26) и (27) асимптотические формулы (22) при $t = 0$. Тогда из системы (26) найдем, что

$$\begin{aligned}
a_1 &= h_1\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{16s^3}\int\limits_0^\infty e^{-2s\tau}q(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{8s^3}\int\limits_0^\infty e^{-s\tau}q(\tau)\sin s\tau\mathrm{d}\tau\right] +\\
&\qquad + \frac{1}{4s^3} + o\left(\frac{1}{s^5}\right);
\end{aligned} \tag{28}$$

$$b_1 = \frac{1}{4}h_1 - \frac{1}{4s^3} + o\left(\frac{1}{s^5}\right);$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= h_1\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{16s^3}\int\limits_0^\infty e^{-s\tau}q(\tau)\sin s\tau\mathrm{d}\tau - \frac{\mathrm{i}}{16s^3}\int\limits_0^\infty e^{-s\tau}q(\tau)\cos s\tau\mathrm{d}\tau\right] +\\
&\qquad + \frac{\mathrm{i}}{4s^3} + o\left(\frac{1}{s^5}\right);
\end{aligned}$$

$$d_1 = h_1\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{16s^3}\int_0^\infty e^{-s\tau} q(\tau)\sin s\tau d\tau + \frac{i}{16s^3}\int_0^\infty e^{-s\tau} q(\tau)\cos s\tau d\tau\right] -$$

$$- \frac{i}{4s^3} + o\left(\frac{1}{s^5}\right).$$

Аналогично из системы (27) мы определим коэффициенты для нахождения $W_2(t,s)$, т.е.:

$$(29) \qquad a_2 = h_2\left[\frac{1}{4s} - \frac{1}{8s^4}\int_0^\infty e^{-s\tau} q(\tau)\sin s\tau d\tau + \frac{1}{16s^4}\int_0^\infty e^{-2s\tau} q(\tau)d\tau\right] +$$

$$+ \frac{1}{4s^2} + \frac{1}{8s^5}\int_0^\infty e^{-s\tau} q(\tau)\cos s\tau d\tau - \frac{1}{16s^5}\int_0^\infty e^{-2s\tau} q(\tau)d\tau + o\left(\frac{1}{s^5}\right);$$

$$b_2 = -\frac{1}{4s} h_2 + \frac{1}{4s^2} + o\left(\frac{1}{s^5}\right);$$

$$c_2 = h_2\left[-\frac{i}{4s} + \frac{1}{16s^4}\int_0^\infty e^{-s\tau} q(\tau)\sin s\tau d\tau + \frac{i}{16s^4}\int_0^\infty e^{-s\tau} q(\tau)\cos s\tau d\tau\right] -$$

$$- \frac{1}{4s^2} - \frac{1}{16s^5}\int_0^\infty e^{-s\tau} q(\tau)\sin s\tau d\tau - \frac{i}{16s^5}\int_0^\infty e^{-s\tau} q(\tau)\cos s\tau d\tau + o\left(\frac{1}{s^5}\right);$$

$$d_2 = h_2\left[\frac{i}{4s} + \frac{1}{16s^4}\int_0^\infty e^{-s\tau} q(\tau)\sin s\tau d\tau - \frac{i}{16s^4}\int_0^\infty e^{-s\tau} q(\tau)\cos s\tau d\tau\right] -$$

$$- \frac{1}{4s^2} - \frac{1}{16s^5}\int_0^\infty e^{-s\tau} q(\tau)\sin s\tau d\tau + \frac{i}{16s^5}\int_0^\infty e^{-s\tau} q(\tau)\cos s\tau d\tau + o\left(\frac{1}{s^5}\right).$$

Согласно (25), взяв во внимание асимптотические формулы (22), (28) и (29), мы получим асимитотические формулы для решений $W_1(t,s)$ и $W_2(t, s)$ дифференциального уравнения (3) и их первых трех производных в таком виде:

$$(30) \qquad W_1(t, s) = \frac{1}{2} h_1(\operatorname{ch} st + \cos st) + \frac{1}{2s^3}(\operatorname{sh} st - \sin st) + o\left(\frac{e^{st}}{s^3}\right);$$

$$W_1'(t,s)=\frac{1}{2}h_1s(\operatorname{sh}st-\sin st)+\frac{1}{2s^2}(\operatorname{ch}st-\cos st)+o\left(\frac{e^{st}}{s^2}\right);$$

$$W_1''(t,s)=\frac{1}{2}h_1s^2(\operatorname{ch}st-\cos st)+\frac{1}{2s}(\operatorname{sh}st+\sin st)+o\left(\frac{e^{st}}{s}\right);$$

$$W_1'''(t,s)=\frac{1}{2}h_1s^3(\operatorname{sh}st+\sin st)+\frac{1}{2}(\operatorname{ch}st+\cos st)+o(e^{st});$$

$$W_2(t,s)=\frac{1}{2s}h_2(\operatorname{sh}st+\sin st)+\frac{1}{2s^2}(\operatorname{ch}st-\cos st)+o\left(\frac{e^{st}}{s^4}\right);$$

$$W_2'(t,s)=\frac{1}{2}h_2(\operatorname{ch}st+\cos st)+\frac{1}{2s}(\operatorname{sh}st+\sin st)+o\left(\frac{e^{st}}{s^3}\right);$$

$$W_2''(t,s)=\frac{1}{2}sh_2(\operatorname{sh}st-\sin st)+\frac{1}{2}(\operatorname{ch}st+\cos st)+o\left(\frac{e^{st}}{s^2}\right);$$

$$W_2'''(t,s)=\frac{1}{2}s^2h_2(\operatorname{ch}st-\cos st)+\frac{1}{2}s(\operatorname{sh}st-\sin st)+o\left(\frac{e^{st}}{s}\right).$$

Теперь мы имеем в наличии все, чтобы приступить к нахождению асимптотических формул для собственных значений и собственных функций краевой задачи (3) — (2) — (4). При выводе этих формул будем пользоваться методом, использованным Б. М. Левитаном в своей работе [3]. В этой же работе можно найти и определение собственного значения и собственной функции дифференциального уравнения (глава I), которым будем пользоваться при их нахождении.

Очевидно, линейная комбинация $C_1W_1(t,s)+C_2W_2(t,s)$ решений $W_1(t,s)$ и $W_2(t,s)$ дифференцального уравнения (3) удовлетворяет первым двум из граничных условий (2). Будем требовать, чтобы она удовлетворяла и граничным условиям (4) в конце рассматриваемого интервала. При этом получим систему линейных однородных алгебраических уравнений с двумя неизвестными C_1 и C_2:

$$C_1[W_1(l,s)+H_1W_1'''(l,s)]+C_2[W_2(l,s)+H_1W_2'''(l,s)]=0,$$
$$C_1[W_1'(l,s)+H_2W_2''(l,s)]+C_2[W_2'(l,s)+H_2W_2''(l,s)]=0.$$

Из курса высшей алгебры известно, что такая система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель системы равен 0, т. е.:

$$(31)\qquad \begin{vmatrix} W_1(l,s)+H_1W_1'''(l,s) & W_2(l,s)+H_1W_2'''(l,s) \\ W_1'(l,s)+H_2W_2''(l,s) & W_2'(l,s)+H_2W_2''(l,s) \end{vmatrix}=0.$$

Раскрыв определитель (31) и подставив асимптотические формулы (30) при $t = l$, мы получим такое трансцендентное уравнение для определения собственных значений:

$$(32)\qquad \left(p_1 + \frac{p_2}{s}\right)\cos sl + \left(\frac{p_2}{s} + \frac{g_1}{s^2}\right)\sin sl + o\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0,$$

где

$$(33)\qquad p_1 = H_1H_2h_1h_2,\quad p_2 = H_1h_1(H_2 + h_2),\quad g_1 = 2H_1h_1.$$

Очевидно, для больших s уравнение (32) имеет корни, которые лежат вблизи чисел $\frac{(2n+1)\pi}{2}$. Отсюда уже следует существование бесчисленного множества собственных значений. Покажем, что начиная с некоторого достаточно большого n вблизи каждого $\frac{(2n+1)\pi}{2}$ лежит только один простой корень уравнения (32). Для этого запишем уравнение (32) в таком виде:

$$p_1 \cos sl + \psi(s) = 0,$$

где

$$(A)\qquad \psi(s) = \frac{p_2}{s}\cos sl + \left(\frac{p_2}{s} + \frac{g_1}{s^2}\right)\sin sl + o\left(\frac{1}{s^2}\right),$$

а p_1, p_2, g_1 — обозначения (33).

Чтобы показать, что вблизи чисел $\frac{(2n+1)\pi}{2}$ при достаточно большом n находится только один простой корень выше написанного уравнения, нужно доказать, что для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует такое достаточно большое s_0, что для каждого $s > s_0$ будет справедливо неравенство $|\psi'(s)| < \varepsilon$.

Доказательство последнего проведем следующим образом. Обозначим определитель, стоящий в левой части равенства (31), через $\Phi(s)$. Но левую часть уравнения (32) мы и получили, собственно говоря, раскрвы определитель $\Phi(s)$ и поделив его на некоторую отличную от нуля функцию. В нашем случае этой функцией является функция $\frac{1}{4}s^4e^{sl}$. Поэтому определитель $\Phi(s)$ можем записать следующим образом:

$$\Phi(s) = \tfrac{1}{4}\, s^4e^{sl}[p_1 \cos sl + \psi(s)].$$

Продифференцировав это соотношение по s, получим

$$\Phi'(s) = \frac{1}{4}\, s^4e^{sl}\left[\frac{4}{s}\,(p_1\cos sl + \psi(s)) + l(p_1\cos sl + \psi(s)) - p_1\sin sl - \psi'(s)\right].$$

откуда

$$(\mathrm{B}) \qquad \psi'(s) = \frac{4e^{-sl}\Phi'(s)}{s^4} - \left[\frac{4}{s}\left(p_1 \cos sl + \psi(s) + l(p_1 \cos sl + \psi(s)\right) - p_1 l \sin sl\right].$$

Значит, задача упирается в нахождение производной $\Phi'(s)$, а это сводится к нахождению производных $\dfrac{\partial \mathrm{D}_k W_i(t,s)}{\partial s}$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3;\ i = 1,\ 2)$, где $\mathrm{D}_k W_i(t,s) = \dfrac{d^k W_i(t,s)}{dt^k}$, $\mathrm{D}_0 W_i(t,s) = W_i(t,s)$.

Беря во внимание равенство (25), мы должны найти производные по s от $\mathrm{D}_k x^{(i)}(t,s)$ $(i = 1, 2, 3, 4;\ k = 0, 1, 2, 3)$. Поскольку мы находили $x^{(i)}(t,s)$ как линейную комбинацию y_i, а y_i выражается через $\eta_i^{(j)}(t,s)$ (соотношение (20)), то нужно сначала найти производную по s от $\eta_i^{(j)}(t,s)$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$. Для этого продифференцируем интегральные уравнения (21) по s и решим полученные интегральные уравнения относительно функции $\dfrac{\partial \eta_i^{(j)}(t,s)}{\partial s}$ методом последовательных приближений. Тогда получим такие асимптотические формулы:

$$\frac{\partial \eta_1^{(1)}(t,s)}{\partial s} = \frac{3}{4s^4}\int_0^t q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^6}\right);$$

$$\frac{\partial \eta_2^{(1)}(t,s)}{\partial s} = -\frac{1}{2s^3}\int_0^t e^{-2s(t-\tau)}\left[(t-\tau) + \frac{3}{2s}\right] q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^6}\right);$$

$$\frac{\partial \eta_3^{(1)}(t,s)}{\partial s} = \frac{1}{4s^3}\int_0^t e^{-(1-\mathrm{i})(t-\tau)s}\left[(1-\mathrm{i})(t-\tau) + \frac{3\mathrm{i}}{s}\right] q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^6}\right);$$

$$\frac{\partial \eta_4^{(1)}(t,s)}{\partial s} = \frac{1}{4s^3}\int_0^t e^{-s(1+\mathrm{i})(t-\tau)}\left[(1+\mathrm{i})(t-\tau) - \frac{3\mathrm{i}}{s}\right] q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^6}\right);$$

$$\frac{\partial \eta_1^{(2)}(t,s)}{\partial s} = -\frac{1}{2s^3}\int_0^t e^{2s(t-\tau)}\left[(t-\tau) - \frac{3}{2s}\right] q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^6}\right);$$

$$\frac{\partial \eta_2^{(2)}(t,s)}{\partial s} = -\frac{3}{4s^4}\int_0^t q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^6}\right);$$

$$\frac{\partial \eta_3^{(2)}(t, s)}{\partial s} = \frac{1}{4s^3} \int\limits_{\infty}^{t} e^{s(1+\mathrm{i})(t-\tau)} \left[(1-\mathrm{i})(t-\tau) + \frac{3\mathrm{i}}{s} \right] q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^6}\right);$$

$$\frac{\partial \eta_4^{(2)}(t, s)}{\partial s} = -\frac{1}{4s^3} \int\limits_{\infty}^{t} e^{s(1-\mathrm{i})(t-\tau)} \left[(1+\mathrm{i})(t-\tau) - \frac{3\mathrm{i}}{s} \right] q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^6}\right);$$

$$\frac{\partial \eta_1^{(3)}(t, s)}{\partial s} = -\frac{1}{4s^3} \int\limits_{\infty}^{t} e^{s(1-\mathrm{i})(t-\tau)} \left[(1-\mathrm{i})(t-\tau) - \frac{3}{s} \right] q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^6}\right);$$

$$\frac{\partial \eta_2^{(3)}(t, s)}{\partial s} = -\frac{1}{4s^3} \int\limits_{0}^{t} e^{-s(1+\mathrm{i})(t-\tau)} \left[(1+\mathrm{i})(t-\tau) + \frac{3}{s} \right] q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^6}\right);$$

$$\frac{\partial \eta_3^{(3)}(t, s)}{\partial s} = \frac{3\mathrm{i}}{4s^4} \int\limits_{0}^{t} q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^6}\right);$$

$$\frac{\partial \eta_4^{(3)}(t, s)}{\partial s} = -\frac{1}{2s^3} \int\limits_{0}^{t} e^{-2\mathrm{i}s(t-\tau)} \left[(t-\tau) + \frac{3\mathrm{i}}{2s} \right] q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^6}\right);$$

$$\frac{\partial \eta_1^{(4)}(t, s)}{\partial s} = -\frac{1}{4s^3} \int\limits_{\infty}^{t} e^{s(1+\mathrm{i})(t-\tau)} \left[(1+\mathrm{i})(t-\tau) + \frac{3}{s} \right] q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^6}\right);$$

$$\frac{\partial \eta_2^{(4)}(t, s)}{\partial s} = -\frac{1}{4s^3} \int\limits_{0}^{t} e^{-s(1-\mathrm{i})(t-\tau)} \left[(-1+\mathrm{i}) - \frac{3}{s} \right] q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^6}\right);$$

$$\frac{\partial \eta_3^{(4)}(t, s)}{\partial s} = \frac{1}{2s} \int\limits_{0}^{t} e^{2\mathrm{i}s(t-\tau)} \left[(t-\tau) + \frac{3\mathrm{i}}{2s} \right] q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^6}\right);$$

$$\frac{\partial \eta_4^{(4)}(t, s)}{\partial s} = -\frac{3\mathrm{i}}{4s^4} \int\limits_{0}^{t} q(\tau)\mathrm{d}\tau + o\left(\frac{1}{s^6}\right), \quad s = \sqrt[4]{\lambda}.$$

Использовав продифференцированные по s соотношения (13) и (20), предположение (10), а также найденные производные $\dfrac{\partial \eta_i^{(j)}(t, s)}{\partial s}$, найдем асимптотические формулы для $\dfrac{\partial \mathrm{D}_k x^{(i)}(t, s)}{\partial s}$ $(i = 1, 2, 3, 4;\ k = 0, 1, 2, 3)$. Следовательно, асимптотические формулы для производных по s от $\mathrm{D}_k W_i(t, s)$

получим, когда в продифференцированное сначала по t, а потом по s равенство (25) подставим найденные $\frac{\partial D_k x^{(i)}(t, s)}{\partial s}$, уже известные $D_k x^{(i)}(t, s)$, a_j, b_j, c_j, d_j ($j = 1, 2$), которые выражаются асимптотическими формулами (22), (28) и (29), а также производные по s от коэффициентов a_j, b_j, c_j, d_j, определяемые из продифференцированных по s уравнений (26) и (27).

Подставим таким образом полученные асимптотические формулы для $\frac{\partial D_k W_i(t, s)}{\partial s}$ ($k = 0, 1, 2, 3$; $i = 1, 2$) и асимптотические формулы (30) для $D_k W_i(t, s)$ при $t = l$ в продифференцированный по s определитель $\Phi(s)$. После всех элементарных преобразований будем иметь

$$\text{(C)} \qquad \Phi'(s) = \frac{1}{4} s^4 e^{sl} \left[\left(p_1 l + \frac{4p_1 + 2p_2 l}{s} + \frac{3p_2 + g_1 l}{s^2}\right] \cos sl - \right.$$
$$\left. - \left(p_1 l - \frac{3p_2 + g_1 l}{s^2}\right) \sin sl + o\left(\frac{1}{s^2}\right)\right],$$

где p_1, p_2, g_1 — обозначения (33).

После подстановки асимптотических формул (A) и (C) в (B) получим

$$\psi'(s) = \left[\frac{p_2 l}{s} + \frac{g_1 l - p_2}{s^2}\right] \cos sl + \left[-\frac{p_2 l}{s} - \frac{p_2}{s^2}\right] \sin sl + o\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

Отсюда видно, что при достаточно больших s правая часть последнего равенства будет по абсолютному значению достаточно мала, т. е. можно писать:

$$|\psi'(s)| < \varepsilon.$$

Поэтому мы можем сделать вывод, что сама функция $\psi(s)$ при достаточно больших s ведет себя почти как постоянная функция. Следовательно, ее поведение будет таким же и вблизи чисел $\frac{(2n + 1)\pi}{2}$ при достаточно больших n, потому что s растет с возростанием n. А это и доказывает, что начиная с некоторого большого n вблизи каждого $\frac{(2n + 1)\pi}{2}$ лежит только один простой корень уравнения (32).

Теперь приступим к решению уравнения (32).

Так как $\sin sl \neq 0$ (предполагаем, что $s \neq 0$), то уравнение (32) можно переписать еще так:

$$\text{(34)} \qquad \left(p_1 + \frac{p_2}{s}\right) \operatorname{ctg} sl + \frac{p_2}{s} + \frac{g_1}{s^2} + o\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0.$$

Поделим обе части уравнения (34) на коэффициент при $\operatorname{ctg} sl$:

$$\operatorname{ctg} sl + \frac{p_2}{p_1 s + p_2} + \frac{g_1}{s(p_1 s + p_2)} + o\left(\frac{1}{s^2}\right) \cdot \frac{s}{p_2 s + p_2} = 0. \tag{35}$$

Мы уже говорили, что корни $s_n l$ этого уравнения при достаточно больших n должны быть близки к числам $\frac{(2n+1)\pi}{2}$, и показали, что они просты. Положим

$$s_n l = \frac{(2n+1)\pi}{2} + \delta_n, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

тогда уравнение (35) перепишется в виде

$$-\operatorname{tg} \delta_n + \frac{p_2}{\frac{p_1}{l}\left[\frac{(2n+1)\pi}{2} + \delta_n\right] + p_2} +$$

$$+ \frac{g_1}{\frac{p_1 \pi^2 n^2}{l^2}\left[1 + \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2\delta_n}{\pi} + \frac{p_2 l}{p_1 \pi}\right) + \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{\delta_n^2}{\pi^2} + \frac{\delta_n}{\pi} + \frac{p_2 l}{2 p_1 \pi} + \frac{p_2 \delta_n l}{p_1 \pi^2}\right)\right]} +$$

$$+ o\left(\frac{l^2}{n^2}\right) = 0,$$

откуда, приняв во внимание, что $\operatorname{tg} \delta_n \approx \delta_n$ (для достаточно малых углов), и разложив остальные члены уравнения в геометрический ряд, найдем

$$\delta_n = \frac{p_2 l}{p_1 \pi n} + o\left(\frac{l}{n}\right),$$

а

$$s_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l} + \frac{p_2 l}{p_1 \pi n} + o\left(\frac{l}{n}\right) \cdot \frac{1}{l}. \tag{36}$$

Обозначим собственные функции граничной задачи (3) (2) —(4) через $W_n(t)$ ($W_n(t, s) = W(t, s_n)$). Искать их будем как линейную комбинацию функций $W_1(t, s_n)$ и $W_2(t, s_n)$, т. е.:

$$W_n(t) = C_1^* W_1(t, s_n) + C_2^* W_2(t, s_n), \tag{37}$$

где C_1^* и C_2^* — неопределенные коэффициенты, которые нужно определить. Поскольку $W_n(t)$ — собственные функции, то они по определению должны удовлетворять граничным условиям, кроме того, что они должны удовлетворять и самому дифференциальному уравнению. Подставив $W_n(t)$ во вторые граничные условия, получим такую систему линейных однородных уравнений, из которых определим C_1^* и C_2^*, вернее их отношение:

$$\begin{aligned} (38)\qquad & C_1^*[W_1(l, s_n) + H_1 W_2'''(l, s_n)] + C_2^*[W_2(l, s_n) + H_1 W_2'''(l, s_n)] = 0, \\ & C_1^*[W_1'(l, s_n) + H_2 W_1''(l, s_n)] + C_2^*[W_2'(l, s_n) + H_2 W_2''(l, s_n)] = 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения видно, что

$$(39)\qquad \frac{C_1^*}{C_2^*} = -\frac{W_2(l, s_n) + H_1 W_2'''(l, s_n)}{W_1(l, s_n) + H_1 W_1'''(l, s_n)}.$$

Если знаменатель $W_1(l, s_n) + H_1 W_1'''(l, s_n)$ обращается в нуль при некотором значении s_n, то отношение $\frac{C_1^*}{C_2^*}$ определяем из второго уравнения системы (38). В силу (30) при $t = l$, положив s_n вместо s, найдем:

$$(40)\qquad \frac{C_1^*}{C_2^*} = -\left[\frac{h_2}{h_1 s_n} + \frac{1}{h_1 s_n^2} + o\left(\frac{1}{s_n^2}\right)\right],$$

откуда

$$(41)\qquad C_1^* = -\left[\frac{h_2}{h_1 s_n} + \frac{1}{h_1 s_n^2} + o\left(\frac{1}{s_n^2}\right)\right] C_2^*.$$

Значит,

$$(42)\qquad W_n(t) = C_2^*\left[W_2(t, s_n) - \left(\frac{h_2}{h_1 s_n} + \frac{1}{h_1 s_n^2} + o\left(\frac{1}{s_n^2}\right)\right) W_1(t, s_n)\right].$$

Если подставим в выражение (42) асимптотические формулы для $W_1(t, s_n)$ и $W_2(t, s_n)$, то после всех преобразований получим

$$(43)\qquad W_n(t) = C\left[\frac{h_2}{s_n}(\cos s_n t - \sin s_n t) + \frac{2}{s_n^2}\cos s_n t + o\left(\frac{1}{s_n^2}\right)\right],$$

где

$$(44)\qquad C = -\tfrac{1}{2} C_2^*.$$

Покажем, что, действительно, собственные функции $W_n(t)$ краевой задачи (3) — (2) — (4) при достаточно больших s ограничены. Мы искали собственные функции как линейную комбинацию решений $W_1(t, s_n)$ и $W_2(t, s_n)$, т. е. в виде (37). Определив отношение $\frac{C_1^*}{C_2^*}$ из системы (38), мы можем записать $W_n(t)$ следующим образом:

$$W_n(t) = C_2^*\left[W_2(t, s_n) - \frac{W_2(l, s_n) + H_1 W_2'''(l, s_n)}{W_1(l, s_n) + H_1 W_1'''(l, s_n)} W_1(t, s_n)\right].$$

Рассмотрим выражение, стоящее в квадратных скобках. Распишем в нем $W_j(t, s_n)$ и $W_j(l, s_n)$ $(j = 1, 2)$ в виде (25) соответственно с коэффициентами a_j, b_j, c_j, d_j $(j = 1, 2)$:

$$
W_2(t, s_n) - \frac{W_2(l, s_n) + H_1 W_2'''(l, s_n)}{W_1(l, s_n) + H_1 W_1'''(l, s_n)} \cdot W_1(t, s_n) \tag{45}
$$

$$
= a_2 x^{(1)}(t, s_n) + b_2 x^{(2)}(t, s_n) + c_2 x^{(3)}(t, s_n) + d_2 x^{(4)}(t, s_n)
$$

$$
- \frac{a_2(x^{(1)} + H_1 \dddot{x}^{(1)}) + b_2(x^{(2)} + H_1 \dddot{x}^{(2)}) + c_2(x^{(3)} + H_1 \dddot{x}^{(3)}) + d_2(x^{(4)} + H_1 \dddot{x}^{(4)})}{a_1(x^{(1)} + H_1 \dddot{x}^{(1)}) + b_1(x^{(2)} + H_1 \dddot{x}^{(2)}) + c_1(x^{(3)} + H_1 \dddot{x}^{(3)}) + d_1(x^{(4)} + H_1 \dddot{x}^{(4)})} \cdot
$$

$$
\cdot (a_1 x^{(1)}(t, s_n) + b_1 x^{(2)}(t, s_n) + c_1 x^{(3)}(t, s_n) + d_1 x^{(4)}(t, s_n)),
$$

где в дроби правой части мы выпустили при $x^{(i)}$, $\dddot{x}^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ аргументы l и s_n (ввиду недостатка места).

Коеффициенты a_j, b_j, c_j, d_j $(j = 1, 2)$, представленные асимптотическими формулами (28), (29), при достаточно больших s ограничены. Из асимптотических формул (22) видно, что решения $x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$ уравнения (3) при достаточно больших s также ограничены, а $x^{(1)}$ не ограничено. Следовательно, ограниченность собственных функций будет зависеть только от коэффициента при $x^{(1)}(t, s_n)$. Но мы докажем, что он равен $O(s_n^{\;3} e^{-s_n l})$. После преобразовани дроби, стоцей во втором члене правой части равенства (45), куда вместо $\mathrm{D}_k x^{(i)}(l, s_n)$ $(k = 0, 1, 2, 3;\ i = 1, 2, 3, 4)$ подставим формулы (22) при $t = l$ и вынесем e^{sl} за скобки, получим

$$
a_2 x^{(1)}(t, s_n) + b_2 x^{(2)}(t, s_n) + c_2 x^{(3)}(t, s_n) + d_2 x^{(4)}(t, s_n) -
$$

$$
- \frac{e^{sl} a_2 \left[H_1 (s_n^3 - \frac{1}{4} \int\limits_0^l q(\tau)\, \mathrm{d}\tau) + 1 + o(1)\right]}{e^{sl} a_1 \left[H_1 (s_n^3 - \frac{1}{4} \int\limits_0^l q(\tau)\, \mathrm{d}\tau) + 1 + o(1)\right]} \cdot
$$

$$
\cdot (a_1 x^{(1)}(t, s_n) + b_1 x^{(2)}(t, s_n) + c_1 x^{(3)}(t, s_n) + d_1 x^{(4)}(t, s_n)),
$$

откуда следует, что коэффициент при растущем члене $x^{(1)}(t, s_n)$ равняется $O(s_n^{\;3} e^{-s_n l})$. Этим самым мы доказали ограниченность собственых функций.

§ 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ СПЕКТРАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ НА ПОЛУОСИ $(0, \infty)$

Нами исследованную спектральную матрицу мы получим описанным в § 1 способом, если возьмем $u_j(t, \lambda) = W_j(t, \lambda)$, $j = 1, 2$, где функции W_1 и W_2 определены условиями (23) и (24).

Приняв во внимание сказанное в § 1, мы докажем следующую теорему о спектральной матрице дифференциального оператора четвертого порядка L.

Теорема. *Для спектральной матрицы $\varrho = \|\varrho_{ij}\|$, $i, j = 1, 2$ оператора L, определенного в § 1, имеют место такие асимптотические формулы*

$$\varrho_{11}(\bar s_2) - \varrho_{11}(\bar s_1) = \frac{4}{\pi h_1^2}(\bar s_2 - \bar s_1)\,(1 + o(1)),$$

$$\varrho_{11}(\bar s_2) - \varrho_{12}(\bar s_1) = \varrho_{21}(\bar s_2) - \varrho_{21}(\bar s_1) = \frac{-4}{\pi h_1 h_2}\left[\frac{\bar s_2^2 - \bar s_1^2}{2} - \frac{1}{h_2}(\bar s_2 - \bar s_1)(1 + o(1))\right],$$

$$\varrho_{22}(\bar s_2) - \varrho_{22}(\bar s_1) = \frac{4}{\pi h_2^2}\left[\frac{\bar s_2^3 - \bar s_1^3}{3} - \frac{\bar s_2^2 - \bar s_1^2}{h_2} + \frac{4}{h_2^2}(\bar s_2 - \bar s_1)\,(1 + o(1))\right].$$

Доказательство. Представим собственные функции дифференциального уравнения (3) как линейную комбинацию $W_1(t, \lambda_n)$ и $W_2(t, \lambda_n)$ с коэффициентами $\varrho(\lambda_n)$ и $\psi(\lambda_n)$:

$$W_n(t) = \varphi(\lambda_n) W_1(t, \lambda_n) + \psi(\lambda_n) W_2(t, \lambda_n) \tag{46}$$

или

$$C_1^* W_1(t, \lambda_n) + C_2^* W_2(t, \lambda_n) = \varphi(\lambda_n) W_1(t, \lambda_n) + \psi(\lambda_n) W_2(t, \lambda_n),$$

откуда

$$\varphi(\lambda_n) = C_1^*, \quad \psi(\tau_n) = C_2^*. \tag{47}$$

В § 2 мы уже определили отношение C_1^* и C_2^*, что показывает формула (40). Поэтому, определив один из коэффициентов C_1^*, C_2^*, легко определить и второй. Поскольку будем рассматривать ортонормированные собственные функции, то из условия нормированности найдем нормирующий множитель C, а потом согласно соотношению (44) и C_2^*.

Нормирующий множитель

$$C = \frac{1}{a_n},$$

где

$$a_n^2 = \int_0^l \tilde W_n^2(t)\,\mathrm{d}t. \tag{48}$$

Подинтегральную функцию $\tilde W_n(t)$ мы получим, если в асимптотической формуле (43) положим $C = 1$, т.е.:

$$\tilde{W}_n(t) = \frac{h_2}{s_n}(\cos s_n t - \sin s_n t) + \frac{2}{s_n^2}\cos s_n t + o\left(\frac{1}{s_n^2}\right). \tag{49}$$

После подстановки (49) в (48) мы получим асимптотическую формулу для нормирующего множителя

$$C = \frac{s_n}{h_2\sqrt{l}}\left[1 - \frac{1}{h_2 s_n} + \frac{3}{2h_2^2 s_n^2} + \frac{\sin^2 s_n l}{2l s_n} + \frac{3\sin^4 s_n l}{8l^2 s_n^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2h^2 s_n^2 l}(\sin 2s_n l + 2\sin^2 s_n l) + o\left(\frac{1}{s_n^2}\right)\right].$$

Значит, из (43) вытекает, что

$$C_2^* = -\frac{2s_n}{h_2\sqrt{l}}\left[1 - \frac{1}{h_2 s_n} + \frac{3}{2h_2^2 s_n^2} + \frac{\sin^2 s_n l}{2l\, s_n} + \right. \tag{50}$$

$$\left. + \frac{3\sin^4 s_n l}{8l^2 s_n^2} - \frac{1}{2h_2 l s_n^2}(\sin 2s_n l + 2\sin^2 s_n l) + o\left(\frac{1}{s_n^2}\right)\right].$$

В виду равенства (41)

$$C_1^* = \frac{2s_n}{h_1\sqrt{l}}\left[\frac{1}{s_n} + \frac{\sin^2 s_n l}{2l s_n^2} + o\left(\frac{1}{s_n^2}\right)\right]. \tag{51}$$

Тем самым в силу (47) мы определили входящие в равенство (46) коэффициенты $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$.

Как уже упоминалось, мы рассматриваем полную систему ортонормированных собственных функций. Поэтому для функции $f(t) \in L_2(0, \infty)$ можно написать обобщенное преобразование Фурье:

$$F(\lambda) = \int_0^{\xi} [\varphi(\lambda) W_1(t, \lambda) + \psi(\lambda) W_2(t, \lambda)] f(t)\, dt.$$

Тогда равенство Парсеваля для конечного интервала запишется в виде:

$$\sum_n \{\varphi^2(\lambda_n) F_1^2(\lambda_n) + 2\varphi(\lambda_n)\psi(\lambda_n) F_1(\lambda_n) F_2(\lambda_n) + \psi^2(\lambda_n) F_2^2(\lambda)_n\} = \int_0^{\xi} f^2(t)\, dt. \tag{52}$$

где

$$F_k(\lambda) = \int_0^{\xi} f(t) W_k(t, \lambda)\, dt, \quad k = 1, 2.$$

Если вместо $\varphi(\lambda_n)$ и $\psi(\lambda_n)$ в равенство (52) подставим их асимптотическое представление (50) и (51) (ввиду соотношений (47)), то получим:

$$(53)\qquad \sum_{\substack{n\\ s_1 < s_n \leq s_2}} \left\{ \frac{4}{h_1^2 l}[1+o(1)]F_1^2(\lambda_n) - \frac{4}{h_1 h_2 l}\left[s_n - \frac{1}{h_2} + o(1)\right]F_1(\lambda_n)F_2(\lambda_n) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{h_2^2 l}\left[s_n^2 - \frac{2s_n}{h_2} + \frac{4}{h_2^2} + o(1)\right]F_2^2(\lambda_n)\right\} = \int_0^l f^2(t)\, dt.$$

Из сравнения равенств (53) и (2.4) из работы [1] (стр. 286) следует, что

$$(54)\qquad \varrho_{11}^{(l)}(\lambda) = \sum_{\substack{n\\ s_1 < s_n \leq s_2}} \frac{4}{h_1^2 l}[1+o(1)],$$

$$\varrho_{12}^{(l)}(\lambda) = \varrho_{21}^{(l)}(\lambda) = - \sum_{\substack{n\\ s_1 < s_n \leq s_2}} \frac{4}{h_1 h_2 l}\left[s_n - \frac{1}{h_2} + o(1)\right],$$

$$\varrho_{22}^{(l)}(\lambda) = \sum_{\substack{n\\ s_1 < s_n \leq s_2}} \frac{4}{h_2^2 l}\left[s_n^2 - \frac{2s_n}{h_2} + \frac{5}{h_2^2} + o(1)\right].$$

где

$$s = \sqrt{\lambda}.$$

Это элементы спектральной матрицы в случае конечного интервала.

Умножим правые части равенств (54) на Δs_n и поделим на его значение — от этого равенства не нарушатся. Значение Δs_n найдем, если примем во внимание асимптотическую формулу (36) для s_n:

$$s_{n+1} - s_n = \Delta s_n = \frac{\pi}{l}[1+o(1)].$$

Таким образом, после умножения и деления на Δs_n равенства (54) перепишутся так:

$$(55)\qquad \varrho_{11}^{(l)}(s) = \sum_{\substack{n\\ s_1 < s_n \leq s_2}} \frac{4}{h_1^2 l}[1+o(1)]\cdot\frac{l}{\pi}[1+o(1)]\,\Delta s_n.$$

$$\varrho_{12}^{(l)}(s) = \varrho_{21}^{(l)}(s) = -\sum_{\substack{n\\ s_1 < s_n \le s_2}} \frac{4}{h_1 h_2 l}\left[s_n - \frac{1}{h_2} + o(1)\right]\cdot\frac{l}{\pi}\left[1 + o(1)\right]\Delta s_n,$$

$$\varrho_{22}^{(l)}(s) = \sum_{\substack{n\\ s_1 < s_n \le s_2}} \frac{4}{h_2^2 l}\left[s_n^2 - \frac{2s_n}{h_2} + \frac{4}{h_2^2} + o(1)\right]\cdot\frac{l}{\pi}\left[1 + o(1)\right],$$

где

$$s = \sqrt[4]{\lambda}.$$

Поскольку вариации функций $\varrho_{ij}^{(l)}$ равномерно ограничены (относительно l) на каждом ограниченном интервале, что вытекает из формул (54), то применима теорема 2.1 из [1] (стр. 287). Перейдя в равенствах (55) к пределу при условии, что $\Delta s_n \to 0$ (т.е. $l \to \infty$), мы получим интеграл Римана, потому что под знаком сумм стоят непрерывные функции аргумента s. Поэтому элементы спектральной матрицы на полуоси $(0, \infty)$ имеют вид:

$$\varrho_{11}(\bar{s}_2) - \varrho_{11}(\bar{s}_1) = \lim_{\Delta s_n \to 0} \sum_{\substack{n\\ s_1 < s_n \le s_2}} \frac{4}{\pi h_1^2}\left[1 + o(1)\right]\Delta s_n = \int_{s_1}^{s_2} \frac{4}{\pi h_1^2}\left[1 + o(1)\right] ds =$$

$$= \frac{4}{\pi h_1^2}(\bar{s}_2 - \bar{s}_1)(1 + o(1));$$

$$\varrho_{12}(\bar{s}_2) - \varrho_{12}(\bar{s}_1) = \varrho_{21}(\bar{s}_2) - \varrho_{21}(\bar{s}_1) = -\lim_{\Delta s_n \to 0} \sum_{\substack{n\\ s_1 < s_n \le s_2}} \frac{4}{\pi h^1 h^2}\left[s_n - \frac{1}{h_2} +\right.$$

$$\left. + o(1)\right]\left[1 + o(1)\right]\Delta s = -\int_{s_1}^{s_2} \frac{4}{\pi h_1 h_2}\left[s - \frac{1}{h_2}(1 + o(1))\right] ds =$$

$$= \frac{-4}{\pi h_1 h_2}\left[\frac{\bar{s}_2^2 - \bar{s}_1^2}{2} - \frac{1}{h_2}(\bar{s}_2 - \bar{s}_1)(1 + o(1))\right];$$

$$\varrho_{22}(\bar{s}_2) - \varrho_{22}(\bar{s}_1) = \lim_{\Delta s_n \to 0} \sum_{\substack{n\\ s_1 < s_n \le s_2}} \frac{4}{\pi h_2^2}\left[s_n^2 - \frac{2s_n}{h_2} + \frac{4}{h_2^2} + o(1)\right]\left[1 + o(1)\right]\Delta s_n =$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} \frac{4}{\pi h_2^2} \left[s^2 - \frac{2s}{h_2} + \frac{4}{h_2^2} (1 + o(1)) \right] \mathrm{d}s =$$

$$= \frac{4}{\pi h_2^2} \left[\frac{\bar{s}_2^3 - \bar{s}_1^3}{3} - \frac{\bar{s}_2^2 - \bar{s}_1^2}{h_2} + \frac{4}{h_2^2} (\bar{s}_2 - \bar{s}_1)(1 + o(1)) \right].$$

При выводе этих формул мы использовали также правила интегрирования асимптотических формул, которые можно найти в книге ([7], стр. 213).

Итак, мы теорему доказали. Мы нашли симметрическую спектральную матрицу, которая имеет уже известные нам из определения спектральной матрицы ([1], стр. 287) свойства. В данном случае мы предполагаем, что $h_1 \neq 0$, $h_2 \neq \infty$, $H_1 \neq 0$, $H_2 \neq \infty$.

Автор выражает глубокую благодарность Я. Курцвайлу и М. Швецу за ряд ценных советов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, Москва 1958.

[2] Наймарк М. А., *Линейные дифференциальные операторы*, Москва 1954.

[3] Левитан Б. М., *Разложение по собственным функциям дифференциального уравнения второго порядка*, Москва—Ленинград 1950.

[4] Collatz L., *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen*, Leipzig 1949.

[5] Камке Э., *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Москва 1961.

[6] Рапопорт И. М., *О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений*, Киев 1954.

[7] Беллман Р., *Теория устойчивости решений дифференциальных уранений*, Москва 1954.

Поступило 25. 1. 1965.

ČSAV, Matematický ústav
Slovenskej akadémie vied, Bratislava