Ján Chrapan

Explicitné riešenie pohybu sférického kyvadla pomôcou Jacobiho transcendent

*Matematicko-fyzikálny časopis*, Vol. 4 (1954), No. 2, 55--69

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126901

# EXPLICITNÉ RIEŠENIE POHYBU SFÉRICKÉHO KYVADLA POMOCOU JACOBIHO TRANSCENDENT

J. CHRAPAN

## 1. ROVNICE POHYBU

Pohyb hmotného bodu viazaného na hladkú guľovú plochu v homogénnom silovom poli predstavuje sférické kyvadlo. V cylindrických súradniciach ($r$; $\varphi$; $z$) je rovnica väzby

$$r = \sqrt{l^2 - z^2} \equiv f(z). \tag{1}$$

kde $l$ je polomer guľovej plochy.

Polohu hmotného bodu určujú vzťahy:

$$\begin{aligned} x &= f(z) \,.\, \cos \varphi; \\ y &= f(z) \,.\, \sin \varphi; \\ z &= z. \end{aligned} \tag{2}$$

Pohyb má dva stupne voľnosti, dané aplikátou $z$ a polárnym uhlom $\varphi$. Ak os $z$ orientujeme proti intenzite $\bar{g}$ silového poľa, kinetický potenciál $L$ hmotného bodu hmoty $m$ je:

$$L = \tfrac{1}{2} m \{[1 + f'(z)^2] \,.\, \dot{z}^2 + f(z)^2 \,.\, \dot{\varphi}^2\} - mgz,$$

kde je:

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}; \quad \dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}; \quad \varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

Homogénne silové pole je konzervatívne, preto prvý integrál Lagrangeových pohybových rovníc pre sférické kyvadlo je integrál energie

$$\frac{1}{2} m \{[1 + f'(z)^2] \,.\, \dot{z}^2 + f(z)^2 \,.\, \varphi^2\} + mgz = c_1'. \tag{3}$$

Druhý integrál týchto rovníc vychádza vzhľadom na to, že súradnica $\varphi$ je cyklická, v tvare:

$$m \,.\, f(z)^2 \,.\, \dot{\varphi} = c_2'. \tag{4}$$

## 2. DIFERENCIÁLNA ROVNICA APLIKÁTY

Zo vzťahov (3), (4) a (1) dostávame diferenciálnu rovnicu:

$$\dot{z}^2 = \frac{2g}{l^2}\left[(l^2 - z^2)\cdot\left(\frac{c_1}{g} - z\right) - \frac{c_2^2}{2g}\right], \tag{5}$$

v ktorej je:

$$c_1 = \frac{c_1'}{m}; \qquad c_2 = \frac{c_2'}{m}.$$

Na pravej strane rovnice (5) je kubický polynóm; jeho nulové body udávajú abscisy priesečníkov kubickej paraboly

$$y = (l^2 - z^2)\left(\frac{c_1}{g} - z\right)$$

s priamkou

$$y = \frac{c_2^2}{2g}.$$

Označme ich

$$z_2 < z_1 < z_3.$$

Takto môžeme písať:

$$\dot{z}^2 = \frac{2g}{l^2}(z_1 - z)(z - z_2)(z_3 - z). \tag{6}$$

## 3. ROZBOR KUBICKEJ ROVNICE POHYBU

Pretože pre reálny pohyb musí byť:

$$\dot{z}^2 \geqq 0,$$

hodnoty aplikáty $z$ ležia v intervale

$$z_2 \leqq z \leqq z_1.$$

Nulové body kubickej paraboly

$$y = (l^2 - z^2)\left(\frac{c_1}{g} - z\right)$$

sú totiž

$$-l < \frac{c_1}{g} < l;$$

súčasne je:

$$z_3 > l.$$

Pre jej priebeh dostaneme:

$$y' = 3z^2 - \frac{2c_1 z}{g} - l^2 = 0,$$

z čoho pre extrémne hodnoty musí byť:

$$(z_e)_{12} = \frac{c_1 \pm \sqrt{c_1^2 + 3g^2l^2}}{3g}.$$

Ďalej máme:

$$[y'']_{z=z_e} = 6z_e - \frac{2c_1}{g} = \pm \frac{2\sqrt{c_1^2 + 3g^2l^2}}{g}.$$

Pre maximum platí záporné znamienko, kedy hodnota aplikáty je

$$z_{\max} = \frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 + 3g^2l^2}}{3g} < 0,$$

takže maximum leží v intervale

$$-l < z_{\max} < \frac{c_1}{g}.$$

Keďže poradnice priamky

$$y = \frac{c_2^2}{2g}$$

sú kladné, maximum výrazu (5) leží medzi $z_2$ a $z_1$, v dôsledku čoho sa pre reálny pohyb menia hodnoty súradnice $z$ v intervale

$$z_2 \leqq z \leqq z_1,$$

v ktorom je:

$$z_2 < 0. \tag{7}$$

Základné symetrické funkcie koreňov kubickej rovnice $\mathfrak{z}^2 = 0$ sú:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= \frac{c_1}{g}; \\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 &= -l^2; \\ z_1z_2z_3 &= \frac{c_2^2}{2g} - l^2\frac{c_1}{g}. \end{aligned} \tag{8}$$

Z nich dostávame vzťahy:

$$\begin{aligned} (l + z_1)(l + z_2)(l + z_3) = (l - z_1)(l - z_2)(z_3 - l) = \frac{c_2^2}{2g} = \\ = -(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)(z_2 + z_3); \\ (l + z_1)(l + z_2) = -(z_1 + z_2)(z_3 - l); \\ (l - z_1)(l - z_2) = -(z_1 + z_2)(z_3 + l); \\ (l^2 - z_1^2)(l^2 - z_2^2) = [-(z_1 + z_2)]^2 (z_3^2 - l^2). \end{aligned} \tag{9}$$

Z druhej relácie (8) vychádza:

$$z_3 = -\frac{z_1z_2 + l^2}{z_1 + z_2}. \tag{10}$$

Pretože je:

$$z_3 > l,$$

podľa (10) musí byť:

$$z_1 + z_2 < 0,$$

resp.

$$z_1 < -z_2.$$

Vzhľadom na reláciu

$$z_1 > z_2$$

máme:

$$z_2 < z_1 < - z_2,$$

t. j.

$$|z_1| < |z_2|. \tag{11}$$

### 4. RIEŠENIE DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE APLIKÁTY

Do diferenciálnej rovnice (6) zaveďme substitúciu

$$z_1 - z = (z_1 - z_2) \,.\, \xi^2. \tag{12}$$

Pre $\xi = 0$ je $z = z_1$; pre $\xi = 1$ je $z = z_2$. Pomocou (12) utvorme výrazy:

$$z - z_2 = (z_1 - z_2) - (z_1 - z) = (z_1 - z_2) - (z_1 - z_2) \,.\, \xi^2 =$$
$$= (z_1 - z_2)\,(1 - \xi^2)\,;$$

$$z_3 - z = (z_3 - z_1) + (z_1 - z) = (z_3 - z_1) + (z_1 - z_2) \,.\, \xi^2 =$$
$$= (z_3 - z_1) \,.\left[1 + \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_1} \,.\, \xi^2\right].$$

Na základe nich je rovnica (6) s použitím (12)

$$\dot{z}^2 = \frac{2g}{l^2}\,(z_1 - z_2)^2 \,.\, (z_3 - z_1) \,.\, \xi^2 \,.\, (1 - \xi^2) \,.\left(1 + \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_1} \cdot \xi^2\right).$$

Derivovaním výrazu (12) vychádza:

$$- \dot{z} = (z_1 - z_2) \,.\, 2 \,.\, \xi \,.\, \dot{\xi}.$$

Podľa odvodených výsledkov je:

$$\dot{\xi}^2 = \frac{g}{2l^2}\,(z_3 - z_1)(1 - \xi^2)(1 - \varkappa^2\xi^2),$$

keď sme zaviedli označenie:

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_1} = - \varkappa^2.$$

Ďalšou úpravou máme:

$$\frac{1}{l}\sqrt{\frac{g}{2}\,(z_3 - z_1)} \cdot \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - \varkappa^2\xi^2)}}\,.$$

Tento výraz je Legendreov eliptický diferenciál, z ktorého vyplýva:

$$\xi = sn\left[\frac{1}{l}\sqrt{\frac{g}{2}\,(z_3 - z_1)} \,.\, t;\ \varkappa\right].$$

Modul $\varkappa$ je imaginárny

$$\varkappa = i\,\frac{\sqrt{z_1 - z_2}}{\sqrt{z_3 - z_1}}\,. \tag{13}$$

Na základe substitúcie (12) je:

$$z = z_1 - (z_1 - z_2) \cdot sn^2\left[\frac{1}{l}\sqrt{\frac{g}{2}(z_3 - z_1)} \cdot t;\ \varkappa\right].$$

Preveďme transformáciu imaginárneho modulu (13) $\varkappa = i\bar{k}$ na modul reálny

$$k = \frac{\bar{k}}{\sqrt{1 + \bar{k}^2}} = \frac{\sqrt{z_1 - z_2}}{\sqrt{z_3 - z_2}} < 1, \tag{14}$$

po malej úprave dostaneme:

$$z = z_3 - (z_3 - z_1)\, nd^2\left[\frac{1}{l}\sqrt{\frac{g}{2}(z_3 - z_2)} \cdot t;\ k\right]. \tag{15}$$

Komplementárny modul $k'$ má hodnotu

$$k' = \frac{\sqrt{z_3 - z_1}}{\sqrt{z_3 - z_2}} < 1.$$

## 5. PERIÓDA OSCILÁCIÍ APLIKÁTY

Rovnica (15) definuje okamžité hodnoty aplikáty hmotného bodu. Ich priebeh je daný eliptickou funkciou času. Pre $t = 0$ je $z = z_1$; ak sa argument funkcie v (15) rovná hodnote konštanty periódy $K$ Jacobiho eliptických funkcií, aplikáta je $z = z_2$. Z tejto podmienky

$$\frac{1}{l}\sqrt{\frac{g}{2}(z_3 - z_2)} \cdot t_1 = K$$

pre čas $t_1$ vychádza:

$$t_1 = \frac{Kl\sqrt{2}}{\sqrt{g(z_3 - z_2)}}.$$

Súradnica $z$ osciluje medzi krajnými hodnotami, ktoré na základe (15); (7) a (11) sú:

$$[z]_{t=0} = z_1; \qquad [z]_{t=t_1} = z_2 < 0;$$

$$z_1 > z_2; \quad |z_1| < |z_2|.$$

Perióda týchto oscilácií je:

$$T = 2t_1 = \frac{2Kl\sqrt{2}}{\sqrt{g(z_3 - z_2)}}. \tag{16}$$

Hmotný bod je na guľovej ploche v najvyššej polohe, keď je $z = z_1$; vtedy musí byť $t = 0$, takže čas meriame od okamihu, v ktorom je hmotný bod najvyššie. Do najnižšej polohy, pre ktorú je $z = z_2 < 0$, prejde za polovicu periódy $t_1 = \frac{T}{2}$. Po uplynutí celej periódy $T$ hmotný bod je v svojej pôvodnej výške. V polohách $z = z_1$; $z = z_2$ hmotný bod prestáva stúpať, príp. klesať; jeho rýchlosť v smere osi $z$ je nulová

$$[\dot{z}]_{z=z_1} = [\dot{z}]_{z=z_2} = 0.$$

## 6. DIFERENCIÁLNA ROVNICA POLÁRNEHO UHLA

Druhá súradnica, polárny uhol $\varphi$ hmotného bodu, viazaného na guľovú plochu, je cyklická. Z druhej Lagrangeovej pohybovej rovnice sme dostali reláciu (4), z ktorej vzhľadom na (1) vychádza:

$$\dot{\varphi} = \frac{c_2}{l^2 - z^2}. \tag{17}$$

Rozkladom na parciálne zlomky máme:

$$\dot{\varphi} = \frac{c_2}{2l}\left[\frac{1}{l+z} + \frac{1}{l-z}\right].$$

Pre menovateľov môžeme vzhľadom na (12) písať:

$$l + z = (l + z_1) - (z_1 - z) = (l + z_1) - (z_1 - z_2) \,.\, \xi^2 =$$
$$= (l + z_1) \,.\left[1 - \frac{z_1 - z_2}{l + z_1} \cdot \xi^2\right];$$
$$l - z = (l - z_1) + (z_1 - z) = (l - z_1) + (z_1 - z_2) \,.\, \xi^2 =$$
$$= (l - z_1) \,.\left[1 + \frac{z_1 - z_2}{l - z_1} \cdot \xi^2\right].$$

Dosadením do výrazu pre $\dot{\varphi}$ bude:

$$\dot{\varphi} = \frac{c_2}{2l}\left\{\frac{1}{(l + z_1)\cdot\left[1 - \frac{z_1 - z_2}{l + z_1}\cdot \xi^2\right]} + \frac{1}{(l - z_1)\cdot\left[1 + \frac{z_1 - z_2}{l - z_1}\cdot \xi^2\right]}\right\}. \tag{18}$$

## 7. RIEŠENIE DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE POLÁRNEHO UHLA

**Substitúciami**

$$\xi = sn\left[\frac{1}{l}\sqrt{\frac{g}{2}(z_3 - z_1)} \,.\, t; \varkappa\right] = sn\,(\eta; \varkappa);$$

$$\eta = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{g}{2}(z_3 - z_1)} \,.\, t; \tag{19}$$

$$\frac{z_1 - z_2}{l + z_1} = \varkappa^2 \,.\, sn^2(\alpha_1; \varkappa);$$
$$\frac{z_1 - z_2}{l - z_1} = -\,\varkappa^2 \,.\, sn^2(\alpha_2; \varkappa) \tag{20}$$

prejde výraz (18) do tvaru:

$$\dot{\varphi} = \frac{c_2 \cdot \varkappa^2}{2l(z_1 - z_2)} \cdot \left\{ \frac{sn^2(\alpha_1; \varkappa)}{1 - \varkappa^2 sn^2(\alpha_1; \varkappa)\, sn^2(\eta; \varkappa)} - \right.$$
$$\left. - \frac{sn^2(\alpha_2; \varkappa)}{1 - \varkappa^2 sn^2(\alpha_2; \varkappa)\, sn^2(\eta; \varkappa)} \right\}.$$

Vzhľadom na diferenciál relácie (19) je:

$$d\varphi = \frac{c_2 \cdot d\eta}{(z_3 - z_1)\sqrt{2g(z_3 - z_1)}} \cdot \left\{ \frac{sn^2(\alpha_2; \varkappa)}{1 - \varkappa^2 sn^2(\alpha_2; \varkappa)\, sn^2(\eta; \varkappa)} - \right.$$
$$\left. - \frac{sn^2(\alpha_1; \varkappa)}{1 - \varkappa^2 sn^2(\alpha_1; \varkappa)\, sn^2(\eta; \varkappa)} \right\}.$$

Integrovaním vychádza:

$$\varphi = \frac{c_2}{(z_3 - z_1)\sqrt{2g(z_3 - z_1)}} \cdot \left\{ \int_0^\eta \frac{sn^2(\alpha_2; \varkappa)}{1 - \varkappa^2 sn^2(\alpha_2; \varkappa)\, sn^2(\eta; \varkappa)} d\eta - \right.$$
$$\left. - \int_0^\eta \frac{sn^2(\alpha_1; \varkappa)}{1 - \varkappa^2 sn^2(\alpha_1; \varkappa)\, sn^2(\eta; \varkappa)} d\eta \right\}. \qquad (21)$$

Podľa (13) a (20) je:

$$sn^2(\alpha_1; \varkappa) = -\frac{z_3 - z_1}{l + z_1};$$
$$cn^2(\alpha_1; \varkappa) = \frac{l + z_3}{l + z_1};$$
$$dn^2(\alpha_1; \varkappa) = \frac{l + z_2}{l + z_1};$$
$$sn^2(\alpha_2; \varkappa) = \frac{z_3 - z_1}{l - z_1};$$
$$cn^2(\alpha_2; \varkappa) = -\frac{z_3 - l}{l - z_1};$$
$$dn^2(\alpha_2; \varkappa) = \frac{l - z_2}{l - z_1}.$$

Ďalej podľa (9) máme:

$$\frac{sn^3(\alpha_1; \varkappa)}{cn(\alpha_1; \varkappa) \cdot dn(\alpha_1; \varkappa)} = \frac{sn^3(\alpha_2; \varkappa)}{cn(\alpha_2; \varkappa) \cdot dn(\alpha_2; \varkappa)} =$$
$$= -i \cdot \frac{z_3 - z_1}{c_2} \cdot \sqrt{2g(z_3 - z_1)}.$$

Na základe týchto výsledkov rovnica (21) bude:

$$\varphi = i \cdot \{Z_{11}(\alpha_1; \varkappa) - Z_{11}(\alpha_2; \varkappa)\} \cdot \eta + i \cdot \{\Omega_{01}(\eta; \alpha_1; \varkappa) - \Omega_{01}(\eta; \alpha_2; \varkappa)\}, \qquad (22)$$

kde $Z_{11}(\alpha; \varkappa)$ a $\Omega_{01}(\eta; \alpha; \varkappa)$ sú Jacobiho transcendenty druhého a tretieho druhu: dzéta-funkcia a omega-funkcia. (Matematicko-fyzikálny sborník, SAVU, Bratislava II, 1952, 1—2, 24 a 27.)

kde je:

$$\alpha_2^* = i\beta_2; \quad \beta_2 = \beta + K' + iK$$

a

$$\varphi_2 = \arcsin[sn(\beta;\, k')] = \arcsin\left[\frac{\sqrt{l - z_1}}{\sqrt{l - z_2}} \cdot \frac{\sqrt{z_3 - z_2}}{\sqrt{z_3 - z_1}}\right]. \tag{28}$$

Inverziou vychádza:

$$\beta = F(\varphi_2;\, k'); \tag{29}$$

ďalej je:

$$k'^2 \cdot \frac{sn(\beta; k') \cdot cn(\beta; k')}{dn(\beta; k')} = \frac{c_2}{(l - z_2)\sqrt{2g(z_3 - z_2)}}. \tag{30}$$

## 9. TRANSFORMÁCIA IMAGINÁRNEHO MODULU OMEGA-FUNKCIE

### a) *Omega-funkcia s parametrom* $\alpha_1$

Transformovaním omega-funkcie parametra $\alpha_1$ do tvaru s reálnym modulom dostaneme:

$$\Omega_{01}(\eta; \alpha_1; \varkappa) = \Omega_{01}(\eta; \alpha_1; i\bar{k}) = \Omega_{00}(\eta^*; \alpha_1^*; k) = \Omega_{00}(w; i\beta_1; k),$$

kde pre argument $w$ platí:

$$w = \eta\sqrt{1 + \bar{k}^2} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{g}{2}(z_3 - z_2)} \cdot t. \tag{31}$$

Pomocou nekonečných théta-súčinov vyjadríme transformovanú omega-funkciu veľmi rýchlo konvergujúcim radom

$$\Omega_{00}(w; i\beta_1; k) = i \cdot \sum_{h=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{2q^{2h-1} \cdot \sin\frac{\pi w}{K} \cdot \sinh\frac{\pi\beta_1}{K}}{1 + q^{4h-2} + 2q^{2h-1} \cdot \cos\frac{\pi w}{K} \cdot \cosh\frac{\pi\beta_1}{K}}, \tag{32}$$

v ktorom parameter $q$ je:

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}. \tag{33}$$

### b) *Omega-funkcia s parametrom* $\alpha_2$

Analogicky k (9a) dostaneme:

$$\Omega_{01}(\eta; \alpha_2; \varkappa) = \Omega_{00}(w; i\beta_2; k) = \Omega_{11}(w; i\beta; k) + i\frac{\pi w}{2K} \pm i\frac{\pi}{2} =$$

$$= -i \cdot \operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi w}{2K} \cdot \operatorname{tgh}\frac{\pi\beta}{2K}\right] + i\frac{\pi w}{2K} \pm i\frac{\pi}{2} +$$

$$+ i \cdot \sum_{h=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{-2q^{2h} \cdot \sin\frac{\pi w}{K} \cdot \sinh\frac{\pi\beta}{K}}{1 + q^{4h} - 2q^{2h} \cdot \cos\frac{\pi w}{K} \cdot \cosh\frac{\pi\beta}{K}} =$$

$$= i \,.\, \operatorname{arc\,cotg}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi w}{2K}\cdot \operatorname{tgh}\frac{\pi\beta}{2K}\right] + i\cdot\frac{\pi w}{2K} +$$

$$+ i \,.\, \sum_{h=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg}\frac{-2q^{2h}\,.\,\sin\frac{\pi w}{K}\cdot\sinh\frac{\pi\beta}{K}}{1+q^{4h}-2q^{2h}\,.\,\cos\frac{\pi w}{K}\cdot\cosh\frac{\pi\beta}{K}}\,. \tag{34}$$

Argument $w$ a parameter $q$ sú definované vzťahmi (31) a (33).

## 10. ROVNICA POLÁRNEHO UHLA

Ak dosadíme (19); (23); (27); (32) a (34) do vzťahu (22), po úprave vzhľadom na (9); (26) a (30) dostaneme rovnicu polárneho uhla:

$$\varphi = A\,.\,t + B(t). \tag{35}$$

Konštanta úmernosti v prvom člene (35) je:

$$A = \frac{\sqrt{g(z_3-z_1)}}{l\sqrt{2}}\cdot\left[\frac{\sqrt{-(z_1+z_2)(z_3^2-l^2)}}{\sqrt{z_3-z_2}}\cdot\left(\frac{1}{l-z_2}+\frac{1}{l+z_3}\right)-\frac{\pi}{2K}+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi-2KE'}{2KK'}(\beta_1-\beta)+E(\varphi_1;k')-E(\varphi_2;k')\right];$$

druhý člen (35) je transcendentnou funkciou času

$$B(t) = \frac{\pi w}{2K} + \operatorname{arc\,cotg}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi w}{2K}\cdot\operatorname{tgh}\frac{\pi\beta}{2K}\right] +$$

$$+\sum_{h=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{-2q^{2h-1}\,.\,\sin\frac{\pi w}{K}\cdot\sinh\frac{\pi\beta_1}{K}}{1+q^{4h-2}+2q^{2h-1}\,.\,\cos\frac{\pi w}{K}\cdot\cosh\frac{\pi\beta_1}{K}} +$$

$$+\sum_{h=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{-2q^{2h}\,.\,\sin\frac{\pi w}{K}\cdot\sinh\frac{\pi\beta}{K}}{1+q^{4h}-2q^{2h}\,.\,\cos\frac{\pi w}{K}\cdot\cosh\frac{\pi\beta}{K}}\,.$$

## 11. PRIEBEH POHYBU

Hmotný bod viazaný na hladkú guľovú plochu v homogénnom silovom poli koná sférický pohyb. Jeho okamžitú polohu určuje rovnica aplikáty (15) a rovnica polárneho uhla (35); v kartézskych súradniciach vzťahy (2) v spojení s (1). Hodnoty aplikáty oscilujú v intervale $z_2 \leqq z \leqq z_1$ s periódou, ktorú udáva relácia (16). O krajných hodnotách aplikáty platia vzťahy (7) a (11). Ak tieto hodnoty poznáme, priebeh pohybu je určený. V perióde oscilácií je:

| $t$ | $0$ | $\frac{T}{4}$ | $\frac{T}{2}$ | $\frac{3T}{4}$ | $T$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | $z_1$ | $z_3 - \sqrt{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)}$ | $z_2$ | $z_3 - \sqrt{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)}$ | $z_1$ |

Tretí koreň kubickej rovnice, utvorenej anulovaním pravej strany (5), udáva výraz (10). Modul eliptickej funkcie v rovnici (15) definuje relácia (14).

Polárny uhol závisí od času podľa rovnice (35).

Výrazy $w(t)$; $B(t)$ a hodnoty polárneho uhla počas periódy oscilácií aplikáty sú:

| $t$ | $w(t)$ | $B(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $\frac{T}{2}$ | $K$ | $\pi$ | $\frac{1}{2} A \, . \, T + \pi$ |
| $T$ | $2K$ | $2\pi$ | $A \, . \, T + 2\pi$ |

Polárny uhol sa v obidvoch polovičiach periódy zväčší o rovnaké časti

$$\Delta_1 \varphi = \Delta_2 \varphi = \frac{1}{2} A \, . \, T + \pi.$$

Pretože sa hodnota $A$ v rovnici (35) nerovná nule, dráha nie je uzavretou krivkou. Hmotný bod sa pohybuje na guľovej ploche po neuzavretej krivke medzi dvoma rovnobežnými kružnicami, ktorých roviny sú kolmé na os $z$ a ležia v polohách $z = z_1$; $z = z_2$.

Prvý člen rovnice (35) je lineárnou funkciou času. Koeficient úmernosti $A$ závisí od počiatočných podmienok pohybu. Vyskytujú sa v ňom veličiny: absolútna hodnota intenzity ($g$) silového poľa, dĺžka $l$ polomeru guľovej plochy, hodnoty koreňov kubickej rovnice vzťahu (5), úplný eliptický integrál ($K$) prvého typu, úplný komplementárny eliptický integrál ($K'$) prvého typu, úplný komplementárny eliptický integrál ($E'$) druhého typu, eliptické integrály ($\beta_1$); ($\beta$) prvého typu (25); (29) a eliptické integrály ($E[\varphi_1; k']$); ($E[\varphi_2; k']$) argumentov ($\varphi_1$); ($\varphi_2$), určených reláciami (24) a (28). Všetky veličiny, ktoré sa vyskytujú v konštante $A$, sú definované dĺžkou polomeru guľovej väzby, absolútnou hodnotou intenzity silového poľa a krajnými hodnotami aplikáty pohybu: $A(l; g; z_1; z_2)$.

Druhý člen rovnice (35) je súčtom lineárnej funkcie a transcendentných funkcií času. Výraz $w(t)$ je daný vzťahom (31) a parameter $q$ je určený reláciou (33). Ostatné veličiny, ktoré sa v tomto člene vyskytujú, sú definované rovnakým spôsobom ako v prvom člene, takže platí:

$$B(l;\, g;\, z_1;\, z_2;\, t).$$

Ak hodnoty: $l; g; z_1; z_2; t$ poznáme, polárny uhol môžeme na základe rovnice (35) ľahko vyčísliť.

Okamžitú absolútnu hodnotu rýchlosti hmotného bodu v smere osi $z$ pri danej hodnote aplikáty určuje výraz (6). V krajných polohách je táto rýchlosť nulová. Keď zasahujú oscilácie aplikáty do kladnej časti osi $z$, takže je $z_1 > 0$, hmotný bod prechádza cez rovník ($z = 0$) gulovej väzby rýchlosťou

$$[\dot{z}]_{z=0} = \frac{1}{l} \cdot \sqrt{-2gz_1z_2z_3}\,.$$

Zo vzťahu (17) vzhľadom na (9) vychádza uhlová rýchlosť hmotného bodu v (horizontálnej) rovine kolmej na os $z$ pri danej hodnote aplikáty v tvare:

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{-2g(z_1+z_2)(z_1+z_3)(z_2+z_3)}}{l^2 - z^2}\,. \tag{36}$$

Ak je $z_1 > 0$, táto rýchlosť je rovnako veľká v polohách súmerne združených podľa roviny rovníka guľovej väzby, v ktorých je $z = \pm z'$; $z' \leqq z_1$.

V krajných polohách je uhlová rýchlosť

$$[\dot{\varphi}]_{z=z_1} = \frac{\sqrt{2g(z_2+z_3)}}{\sqrt{-(z_1+z_2)(z_1+z_3)}}\,;$$

$$[\dot{\varphi}]_{z=z_2} = \frac{\sqrt{2g(z_1+z_3)}}{\sqrt{-(z_1+z_2)(z_2+z_3)}}\,.$$

Pri $z_1 > 0$ je uhlová rýchlosť v rovníkovej polohe ($z = 0$)

$$[\dot{\varphi}]_{z=0} = \frac{\sqrt{-2g(z_1+z_2)(z_1+z_3)(z_2+z_3)}}{l^2}\,.$$

Medzi odvodenými hodnotami platí nerovnosť

$$[\dot{\varphi}]_{z=0} < [\dot{\varphi}]_{z=z_1} < [\dot{\varphi}]_{z=z_2}\,.$$

Polárny uhol sa najrýchlejšie mení pri najmenšej hodnote aplikáty; v rovníkovej polohe hmotného bodu je táto zmena najmenšia; v polohách súmerne združených podľa roviny rovníka uhlové rýchlosti sú rovnaké. Keď je maximum aplikáty hodnota záporná, uhlová rýchlosť je najmenšia v polohe najväčšej aplikáty.

Z prvej rovnice (8) vzhľadom na substitúciu zavedenú do vzťahu (5) môžeme na základe (3) určiť energiu sférického kyvadla.

## 12. ZVLÁŠTNE PRÍPADY POHYBU

### a) *Matematické kyvadlo*

Ak je polárny uhol konštantný, podľa (4) sú korene kubickej rovnice pravej strany (5)

$$z_1 = \frac{c_1}{g} = z_0; \quad z_2 = -l; \quad z_3 = l.$$

Hmotný bod sa pohybuje po oblúku hlavnej kružnice guľovej väzby na (zvislej) rovine obsahujúcej os $z$ a predstavuje matematické kyvadlo. Dosadením uvedených hodnôt koreňov do (15) dostaneme rovnicu aplikáty matematického kyvadla v tvare:

$$z = l - (l - z_0) \, . \, nd^2 \left[\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t; \, k\right].$$

Modul dosadením do (14) vychádza v hodnote

$$k = \frac{\sqrt{z_0 + l}}{\sqrt{2l}}.$$

Perióda kyvu podľa (16) je:

$$T = 2K \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}}.$$

Matematické kyvadlo je špeciálnym prípadom sférického kyvadla.

### b) *Kónické kyvadlo*

Keď sa hodnota aplikáty nemení, eliptická funkcia v rovnici (15) musí byť konštantná. Jej modul sa potom rovná nule. Vzhľadom na (14) preto je:

$$z_1 = z_2.$$

V tomto prípade oscilácie aplikáty nevzniknú; hmotný bod obieha okolo osi $z$ po kružnici v (horizontálnej) rovine kolmej na aplikátu.

Podľa (17) je pri stálej hodnote aplikáty uhlová rýchlosť pohybu konštantná a na základe (36) vzhľadom na (9) je daná výrazom:

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{-z_1}}.$$

Pre reálny pohyb musí byť stála hodnota aplikáty záporná; hmotný bod musí byť v polohe pod rovníkovou rovinou ($z = 0$) guľovej väzby. Jeho pohyb v tomto prípade predstavuje kónické kyvadlo. Rovnica polárneho uhla je:

$$\varphi = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{-z_1}} \, . \, t + \varphi_0;$$

perióda pohybu je:

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{-z_1}}{\sqrt{g}}.$$

Kónické kyvadlo je zvláštnym prípadom sférického kyvadla.

*Došlo 18. IV. 1953.*

*Katedra fyziky*
*Pedagogickej fakulty Slovenskej univerzity*
*v Bratislave*

## LITERATÚRA

1. N. J. Achiezer, *Elementy teorii elliptičeskich funkcij*, Moskva—Leningrad 1948.
2. T. Levi — Civita, U. Amaldi, *Kurs teoretičeskoj mechaniki II*-1, Moskva 1951.
3. J. Chrapan, *Matematicko-fyzikálny sborník*, SAVU, *2*, 23 (1952).

# ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ ЯКОБИ

И. ХРАПАН, БРАТИСЛАВА

Выводы

В работе выведены явные функции времени для аппликаты и полярного расстояния при движении сферического маятника, численным образом, с применением таблиц, легко вычисляемые для любого момента времени. Решение дифференциального уравнения аппликаты выражено эллиптической функцией времени и дан период колебаний аппликаты. С помощью частей периода определяются значения аппликаты в моментах после четвертых частей периода. Для краевых значений аппликаты выведены характерические неравенства.

Дифференциальное уравнение полярного расстояния решено с применением трансцендентных функций Якоби второго и третьего рода. Даны значения полярных расстояний в моментах после отдельных половин периода колебаний аппликаты.

Все результаты формулированы в видах, удобных для прямого числовоно вычисления. Наконец рассматриваются математический и конусный маятники, как специальные случаи сферического маятника.