Matematický časopis

Melichar Kopas

Аутоморфизмы одного класса конфигураций

Matematický časopis, Vol. 23 (1973), No. 3, 257--266

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126882`

Matematický časopis 23 (1973), No. 3

АВТОМОРФИЗМЫ ОДНОГО КЛАССА КОНФИГУРАЦИЙ

МЕЛИХАР КОПАС, Кошице

Л. Ломбардо-Радиче [1], [2] и А. Д. Кидвелл [3], [4] исследовали конечную инцидентную структуру F_n. В монографии Р. Хартсхорна [5] были рассмотрены свойства группы всех автоморфизмов конфигурации F_2. Предметом настоящей статьи являются свойства группы всех автоморфизмов конфигурации F_n, $n > 2$. § 1 содержит основные понятия и обозначения. Ядро работы — § 2 посвящен структуре группы всех автоморфизмов конфигурации F_n.

§ 1. Основные понятия

Конфигурацией называется конечная инцидентная структура $(\mathscr{B}, \mathscr{P}, \mathscr{I})$, где $\mathscr{B}$ обозначает конечное множество точек, $\mathscr{P}$ конечное множество прямых, $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{B} \times \mathscr{P}$ и выполняется одно из следующих взаимно эквивалентных отношений:

$$[A, B] \leqq 1 \quad \text{для} \quad A, B \in \mathscr{B}, \quad A \neq B;$$

$$[a, b] \leqq 1 \quad \text{для} \quad a, b \in \mathscr{P}, \quad a \neq b,$$

где $[A, B]$обозначает число всех прямых $p \in \mathscr{P}$, причем $A, B \mathrm{I} \mathscr{P}$; $[a, b]$ определяется двойственно.

Автоморфизмом (*антиавтоморфизмом*) конфигурации $(\mathscr{B}, \mathscr{P}, \mathscr{I})$ называется взаимно однозначное отображение $\varkappa$ множества $\mathscr{B} \cup \mathscr{P}$ на $\mathscr{B} \cup \mathscr{P}$, такое, что при этом выполняются следующие условия:

$$\varkappa(\mathscr{B}) = \mathscr{B} \quad (\varkappa(\mathscr{B}) = \mathscr{P}),$$

$$B\mathrm{I}p \quad \Rightarrow \quad \varkappa(\mathscr{B})\mathrm{I}\varkappa(p) \quad \text{для всех} \quad B \in \mathscr{B},\ p \in \mathscr{P}.$$

Автодвойственной конфигурацией называется конфигурация, для которой существует по крайней мере один ее антиавтоморфизм.

Обозначим конфигурацию по работе [6] упорядоченной тройкой $(h; j, k)$, где h есть *ранг конфигурации*,

$$h = 2(j + k) - (i - 1),$$

$$j = |\mathscr{B}|, \quad k = |\mathscr{P}|, \qquad i = |\mathscr{I}|.$$

Рассмотрим теперь класс конфируракий

$$F_n(8; 2n + 3, 2n + 3),$$

n — натуральное число, $n \geqq 2$. Каждую конфигурацию порождают четыре точки (A_2, B_1, P, R; рис. 1 для $n = 5$), любые три из которых неколлинеарны, следующим образом:

$$(1) \qquad \left.\begin{matrix} A_2B_1 \\ P\ R \end{matrix}\right\} Q, \left.\begin{matrix} A_2R \\ B_1P \end{matrix}\right\} A_1, \left.\begin{matrix} A_2P \\ B_1R \end{matrix}\right\} B_2, \left.\begin{matrix} A_2R \\ B_2Q \end{matrix}\right\} A_3, \left.\begin{matrix} A_3P \\ B_1R \end{matrix}\right\} B_3, \ldots$$

$$\ldots \left.\begin{matrix} A_2 \quad R \\ B_{k-1}Q \end{matrix}\right\} A_k, \left.\begin{matrix} A_kP \\ B_1R \end{matrix}\right\} B_k, \ldots \left.\begin{matrix} A_2 \quad R \\ B_{n-1}Q \end{matrix}\right\} A_n, \left.\begin{matrix} A_nP \\ B_1R \end{matrix}\right\} B_n \;\Bigg|\; A_1, B_n, Q.$$

Обозначим прямые конфигурации:

$$A_1R = a, \quad B_1R = b, \quad PR = r,$$

$$A_kP = p_k, \quad B_kQ = q_k, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

В силу инциденций конфигурационного определения (1) имеем:

$$(2) \quad [P] = [Q] = n + 1, \quad [R] = [A_k] = [B_k] = 3,$$

$$[a] = [b] = n + 1, \quad [r] = [p_k] = [q_k] = 3, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Каждая конфигурация F_n является автодвойственной конфигурацией ([3]). Группа всех ее автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, F_n$, $n \geqq 2$ является подгруппой

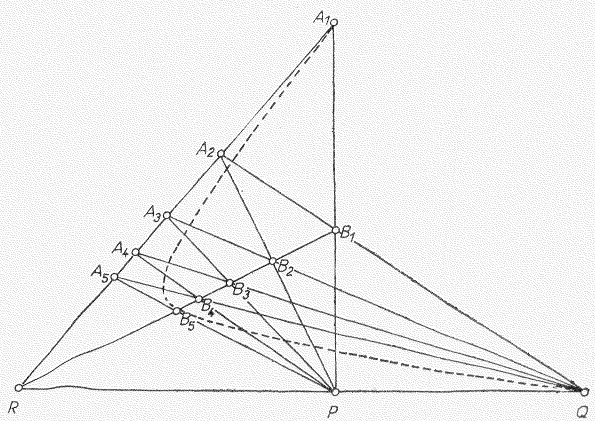

Рис. 1.

индекса 2 группы всех антиавтоморфизмов и автоморфизмов конфигурации F_n ([7], 1, 2).

Если $n = 2$, то F_n является регулярной конфигурацией (т. е. $[B] = [p] = 3$ для всех $B \in \mathscr{B}$, $p \in \mathscr{P}$) и также проективной плоскостью 2-ого порядка. Поэтому группа $\operatorname{Aut} F_2$ иммет более специальные свойства, чем группа $\operatorname{Aut} F_n$, $n > 2$. В силу [5] (гл. III) имеет место следующая теорема:

Теорема 1. а) *Группа* $\operatorname{Aut} F_2$ *транзитивна на* $\mathscr{B}$.

б) *Для любых двух заданных троек неколлинеарных точек* M_i, M'_i, $i = 1, 2, 3$ *конфигурации* F_2 *существует один и только один автоморфизм* $\varkappa \in \operatorname{Aut} F_2$, *переводящий* M_i *в* M'_i, $i = 1, 2, 3$.

в) *Группа* $\operatorname{Aut} F_2$ *состоит из 168 элементов.*

Утверждение теоремы 1 можно вывести тоже следующим образом: Число всех упорядоченных четверок точек конфигурации F_2, любые три из которых неколлинеарны, равно 168. Любая из этих четверок может порождать конфигурацию F_2. Тогда каждый автоморфизм $\varkappa \in \operatorname{Aut} F_2$ однозначно определен отображением точек A_2, B_1, P, R на одну из этих 168 четверок.

Замечание. В дальнейшем мы будем пользоваться следующим договором: Если автоморфизм $\varkappa \in \operatorname{Aut} F_n$, $n > 2$ переводит точки (прямые) A_k, B_k (p_k, q_k), $k = 1, 2, \ldots n$ в точки (прямые) A_x, B_x (p_x, q_x) и если

$$x > n \quad \text{или} \quad x < 1,$$

то положим $A_x = A_l$, $B_x = B_l$ $(p_x = p_l,\ q_x = q_l)$ для $l \equiv x \pmod{n}$, $l \in \{1, 2, \ldots n\}$.

§ 2. Группа $G = \operatorname{Aut} F_n$, $n > 2$

Предложение 1. *Для каждого автоморфизма* $\varkappa \in G$ *имеет место*:

а) $\varkappa(P) = P$, $\varkappa(Q) = Q$ *или* $\varkappa(P) = Q$, $\varkappa(Q) = P$;

б) $\varkappa(a) = a$, $\varkappa(b) = b$ *или* $\varkappa(a) = b$, $\varkappa(b) = a$;

в) $\varkappa(R) = R$;

г) $\varkappa(r) = r$.

Доказательство. Свойства а), б) вытекают непосредственно из отношений (2). В силу $R = a \cap b$ из а), б) мы получаем б) и г).

Предложение 2. *Существует автоморфизм* $\alpha \in G$, *который индуцирует следующую подстановку множества* $\mathscr{B}$

(3) $$\begin{pmatrix} A_k, & B_k, & P, & Q, & R \\ A_{k+1}, & B_{k+1}, & P, & Q, & R \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots n$$

и порождает циклическую подгруппу $G_\alpha \subseteq G$ порядка n.

Доказательство. Пусть (3)—подстановка множества $\mathscr{B}$. В силу (1) имеем

$$p_k = A_k B_k, \quad q_k = A_{k+1} B_k, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Тогда с сохранением инциденций конфигурационного определения (1) при подстановке (3) переходят прямые p_k в $A_{k+1}B_{k+1} = p_{k+1}$, q_k в $A_{k+2}B_{k+1} = q_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots n$. Очевидно, существует автоморфизм α, степени которого циклически переставляют точки A_k на прямой a, точки B_k на прямой b и имеют неподвижные точки P, Q, R. Так как циклы на прямых a, b имеют длину n, то

$$\alpha^n = \varepsilon,$$

ε — тождественный автоморфизм, и автоморфизмы α^i, $i = 1, 2, \ldots n$ образуют циклическую подгруппу $G_\alpha \subseteq G$.

Предложение 3. *Следующая подстановка множества $\mathscr{B}$*

(4) $$\begin{pmatrix} A_k, & B_k, & P, & Q, & R \\ B_k, & A_{k+1}, & Q, & P, & R \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots n$$

индуцирует автоморфизм $\beta \in G$, который порождает циклическую подгруппу $G_\beta \subseteq G$ порядка $2n$.

Доказательство. Если подстановку (4) обозначим β, то получим:

$$\beta(A_k \ B_k) = B_k \ A_{k+1} = q_k,$$

$$\beta(A_{k+1}B_k) = B_{k+1}A_{k+1} = p_{k+1},$$

$k = 1, 2, \ldots n$. Тогда существует автоморфизм β, который отображает $\mathscr{B}$ на $\mathscr{B}$ по соотношению (4) и отображает $\mathscr{P}$ на $\mathscr{P}$ следующим образом:

$$\beta(a) = b, \quad \beta(b) = a, \quad \beta(r) = r,$$

$$\beta(p_k) = q_k, \quad \beta(q_k) = p_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Очевидно,

$$\beta^2(P) = P, \quad \beta^2(Q) = Q,$$

$$\beta^2(A_k) = A_{k+1}, \quad \beta^2(B_k) = B_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

т. е. $\beta^2 = \alpha$, откуда следует

(5) $$\alpha^i = \beta^{2i}, \quad i = 1, 2, \ldots n, \quad \beta^{2n} = \varepsilon.$$

Степени автоморфизма β образуют циклическую подгруппу $G_\beta \subseteq G$ порядка $2n$. Нечетные степени автоморфизма β переводят a в b и наоборот; четные степени автоморфизма β являются элементами подгруппы G_α.

Следствие 1. а) *Группа G_α является подгруппой группы G_β индекса 2:* $G_\beta = G_\alpha \cup \beta G_\alpha$.

б) *Точечными орбитами группы G_β (G_α) являются следующие множества:* $\{R\}$, $\{P, Q\}$, $\mathscr{B}\backslash\{P, Q, R\}$ ($\{R\}$, $\{P\}$, $\{Q\}$, $\{A_1, \ldots A_n\}$, $\{B_1, \ldots B_n\}$). *Линейные орбиты двойственны.*

Предложение 4. *Существует автоморфизм $\gamma \in G$ второго порядка, который переставляет множество $\mathscr{B}$ следующим способом:*

$$\begin{pmatrix} A_k, & B_k, & P, & Q, & R \\ A_{n-k+1}, & B_{n-k}, & Q, & P, & R \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots n. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть (6) — подстановка множества $\mathscr{B}$. Из (1) следует, что при (6) отображается

$$\begin{matrix} p_k & \text{в} & q_{n-k} = A_{n-k+1}B_{n-k}, \\ q_k & \text{в} & p_{n-k} = A_{n-k}\ B_{n-k}, \end{matrix} \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Следовательно, существует автоморфизм $\gamma \in G$, который индуцирует на множетсве $\mathscr{B}$ подстановку (6). Дальше:

$$\gamma^2(P) = P, \quad \gamma^2(Q) = Q,$$

$$\gamma^2(A_k) = \gamma(A_{n-k+1}) = A_k,$$

$$\gamma^2(B_k) = \gamma(B_{n-k}) = B_k, \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

т. е. $$\gamma^2 = \varepsilon.$$

Следствие 2.

$$\text{а)}\quad \beta\gamma\beta = \gamma, \tag{7}$$

б) *G — некоммутативная группа.*

в) *Группа G содержит $2n$ циклических подгруп второго порядка.*

г) *Группа G содержит две подгруппы H, K порядка $2n$: $H = G_\alpha \cup \gamma G_\alpha$, $K = G_\alpha \cup \gamma(G_\beta \backslash G_\alpha)$.*

Доказательство. а) Согласно (4), (6) имеем:

$$\beta\gamma\beta(P) = P, \quad \beta\gamma\beta(Q) = Q,$$

$$\beta\gamma\beta(A_k) = \beta\gamma(B_k) = \beta(B_{n-k}) = A_{n-k+1},$$

$$\beta\gamma\beta(B_k) = \beta\gamma(A_{k+1}) = \beta(A_{n-k}) = B_{n-k}, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

б) Очевидно, что

$$\beta^i\gamma = \gamma\beta^{2n-i}, \quad i = 1, 2, \dots 2n, \tag{8}$$

в) $(\beta^i\gamma)^2 = \beta^i\gamma\gamma\beta^{2n-i} = \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots 2n.$

г) Существование подгрупп $H = G_\alpha \cup \gamma G_\alpha, K = G_\alpha \cup \gamma(G_\beta \setminus G_\alpha)$ непосредственно вытекает из соотношений (3), (4), (6) и предшествующих утверждений этого следствия.

Теорема 2. *Любой автоморфизм $\varkappa \in G$ можно преобразовать к виду*

$$\varkappa = \beta^i\gamma^j, \quad i \in \{1, 2, \dots 2n\}, \quad j \in \{1, 2\}. \tag{9}$$

Группа $\mathrm{Aut}\, F_n$, $n > 2$ *состоит из* $4n$ *элементов.*

Доказательство. В силу а) предложения 1 любой автоморфизм $\varkappa \in G$ находится только в одном из следующих множеств:

$$M_1 = \{\varkappa \in G / \quad \varkappa(a) = a, \quad \varkappa(b) = b\},$$

$$M_2 = \{\varkappa \in G / \quad \varkappa(a) = b, \quad \varkappa(b) = a\}.$$

а) Пусть $\varkappa \in M_1$. Покажем, что любой автоморфизм $\varkappa \in M_1$ циклически переставляет на прямой a (b) или упорядоченных n точек $A_1, A_2, \dots A_n$ ($B_1, B_2, \dots B_n$), или упорядоченных n точек $A_n, A_{n-1}, \dots A_1$ (B_n, $B_{n-1}, \dots B_1$). Пусть существует автоморфизм $\varkappa_0 \in M_1$ такой, что

$$\varkappa_0(A_k) = A_{i_k}, \quad k = 1, 2, \dots n,$$

где $(i_1, i_2, \dots i_n)$ не принадлежит множеству степеней циклов $(1,2, \dots n)$, $(n, n-1, \dots 1)$. Тогда существует по крайней мере один индекс k_0, такой, что $|i_{k_0} - i_{k_0+1}| \neq 1, n-1$. Но по соотношению (1) имеет место:

$$A_{i_{k_0}}P = p_{i_{k_0}}, \quad p_{i_{k_0}} \cap b = B_{i_{k_0}}, \quad B_{i_{k_0}}Q = q_{i_{k_0}},$$

$$a \cap q_{i_{k_0}} = A_{i_{k_0+1}}, \quad A_{i_{k_0+1}}B_{i_{k_0}} = q_{i_{k_0}},$$

где $|i_{k_0} - i_{k_0+1}| = 1$ или $n-1$. Мы получили противоречие; следовательно, в силу (1), (4) и (6) любой автоморфизм $\varkappa \in M_1$ можно записать в виде

$$\varkappa = \beta^i\gamma^j, \quad i \in \{2, 4, \dots 2n\}, \quad j \in \{1, 2\}.$$

б) Пусть $\varkappa \in M_2$. Преположим, что существует автоморфизм $\varkappa_0 \in M_2$, такой, что

$$\varkappa_0(A_k) = B_{i_k}, \quad k = 1, 2, \dots n,$$

где $(i_1, i_2, \dots i_n)$ обладает тем же свойством, что и в части а) этого доказательства. Тогда существует по крайней мере один индекс k_0, для которого $|i_{k_0} - i_{k_0+1}| \neq 1, n-1$. Аналогично получается из инциденций (1) противоречие. Отсюда вытекает, что каждый автоморфизм $\varkappa \in M_2$ циклически переставляет точки $A_1, A_2, \dots A_n, B_1, B_2, \dots B_n$ на прямых a, b, которые взаимно на себя отображает. Следовательно, ввиду (1), (4) и (6) можно записать любой автоморыизм $\varkappa \in M_2$ следующим способом.

$$\varkappa = \beta^i \gamma^j, \quad i \in \{1, 3, 5, \dots 2n - 1\}, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Очевидно, что для каждово $i \in \{1, 2, \dots 2n\}$ и $j \in \{1, 2\}$ получаем точно один автоморфизм $\varkappa \in G$ и очевидно, что

$$|G| = 4n$$

Следствие 3.

$$\text{(10)} \qquad \text{а)} \quad G = G_\beta \cup \gamma G_\beta .$$

б) *Центр группы G — это циклическая группа 2-ого порядка с образующей β^n.*

в) $\{R\}$, $\{PQ\}$, $\mathscr{B} \setminus \{P, Q, R\}$ *являются точечными орбитами группы G. Линейные орбиты группы G — двойственны.*

Доказательство. а) Утверждение (10) непосредственно вытекает из теоремы 2.

б) В силу (8) автоморфизм β^n коммутативный каждому элементу группы G. Из (8), (9) ясно, что центр группы образуют только автоморфизмы β^n, ε.

в) Утверждение справедливо согласно (4), (6) и (9).

Теорема 3. *Любой автоморфизм $\varkappa \in \beta G_\alpha$ имеет только точку R неподвижной. Любой автоморфизм $\varkappa \in G \setminus \beta G_\alpha$ имеет точно три неподвижных точки конфигурации F_n.*

Доказательство. Из (3), (4) и (6) очевидно, что любой авторфизм $\varkappa \in \beta G_\alpha$ имеет только точку R неподвижной и любой автоморфизм $\varkappa \in K$ имеет точно три неподвижных точки P, Q, R. Рассмотрим теперь неподвижные точки автоморфизмов $\varkappa = \gamma\alpha^i$, $i = 1, 2, \dots n$. Из (3) и (6) получаем:

$$\begin{aligned}
&\gamma\alpha^i(P) = Q, \quad \gamma\alpha^i(Q) = P, \\
&\gamma\alpha^i(A_k) = \gamma(A_{k+i}) = A_{n-k-i+1}, \\
&\gamma\alpha^i(B_k) = \gamma(B_{k+i}) = B_{n-k-i} \quad, \quad i, k = 1, 2, \dots n.
\end{aligned}$$

Тогда неподвижные точки находятся только на прямых a, b и для их индексов справедливы соотношения:

$$\text{(11)} \qquad k_1 = \frac{1}{2}(n - i + 1), \qquad k_2 = \frac{1}{2}(1 - i),$$

$$k_- = \frac{1}{2}(n - i), \qquad k_4 = \frac{1}{2}(-i),$$

$i = 1, 2, \ldots n$, т. е.

1) для четного n $\varkappa \in \gamma G_\alpha$ имеет неподвижные точки

$$A_{k_1}, \quad A_{k_2}, \quad R, \quad \text{если} \quad i = 1, 3, 5, \ldots n - 1,$$

$$B_{k_3}, \quad B_{k_4}, \quad R, \quad \text{если} \quad i = 2, 4, 6, \ldots n;$$

2) для нечетного n $\varkappa \in \gamma G_\alpha$ имеет неподвижные точки

$$A_{k_1}, \quad B_{k_4}, \quad R, \quad \text{если} \quad i = 2, 4, 6, \ldots n - 1,$$

$$A_{k_2}, \quad B_{k_3}, \quad R, \quad \text{если} \quad i = 1, 3, 5, \ldots n.$$

Однозначность наподвижных точек вытекает из соотношений (3), (6).

Следствие 4. *Для любых двух заданных точек* $M, N \in \mathscr{B} \setminus \{P, Q, R\}$ *существуют два и только два автоморфизма* $\varkappa_1, \varkappa_2 \in G$; $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$, *переводящие* M в N.

Доказательство. Если $M = N$, то $\varkappa_1 = \varepsilon$ и $\varkappa_2 = \gamma\alpha^i$, где согласно (11)

$$i = 1 - 2k \quad \text{для} \quad M = A_k$$

$$i = -2k \quad \text{для} \quad M = B_k, \quad k = 1, 2, \ldots n$$

Если $M \neq N$, то в силу (1) и следдствия 3в) $\varkappa_1 \in G_\beta$, $\varkappa_2 \in \gamma G_\beta$. Однозначность автоморфизмов $\varkappa_1, \varkappa_2$ очевидна.

Теорема 4. *Группа* $G = \operatorname{Aut} F_n$, $n > 2$ *изоморфна диэдрической группе* D_{2n} *порядка* $4n$

$$G \cong D_{2n}.$$

Доказательство. В силу (7), (9) можно любой автоморфизм $\varkappa \in G$ выражать как конечное произведение степеней автоморфизмов β, γ, т. е. автоморфизмы β, γ являются образующими группы G. Любые соотношения между образующими β, γ получаем по соотношениям:

$$\beta^{2n} = \varepsilon, \quad \gamma^2 = \varepsilon, \quad \beta\gamma\beta = \gamma,$$

тогда в силу теоремы 2 определяющие соотношения общей группы G принимают следующий вид

$$\beta^{2n} = \varepsilon, \quad \gamma^2 = \varepsilon, \quad (\gamma\beta)^2 = \varepsilon. \tag{12}$$

По [8] (1.52) равенства (12) являются определяющими соотношениями диэдрической группы D_{2n} порядка $4n$.

Следствие 5. а) *Подгруппы H, K изоморфны диэдрической группе D_n порядка $2n$*

$$H \cong D_n, \quad K \cong D_n.$$

б) *Если n нечетное, тогда*

$$G = Z(G) \times H.$$

Доказательство: а) Подгруппа H порождается автоморфизмами α, γ и ее определяющие соотношения следующие:

$$\alpha^n = \varepsilon, \quad \gamma^2 = \varepsilon, \quad (\gamma\alpha)^2 = \varepsilon,$$

следовательно, $H \cong D_n$. Образующие подгруппы K — автоморфизмы α, $\gamma\beta$ удовлетворяют определяющим соотношениям

$$\alpha^n = \varepsilon, \quad (\gamma\beta)^2 = \varepsilon, \quad (\gamma\beta\alpha)^2 = \varepsilon,$$

т. е. $K \cong D_n$.

б) В силу [8] (1.54) спаведливо

$$D_{2n} = C_2 \times D_n, \quad n \text{ — нечетное.}$$

Поскольку центр группы G

$$Z(G) = \{\varepsilon, \beta^n\}$$

и $H \cong D_n$, для нечетного n из (3), (4), (6) и (9) вытекает $G = Z(G) \times H$.

Теорема 5. *Пусть $2n = p\ .\ q$, n, p, q — натуральные числа. Тогда группа $G = \operatorname{Aut} F_n$, $n > 2$ имеет p диэдрических подгрупп D_q порядка $2q$ и q диэдрических подгрупп D_p порядка $2p$.*

Доказательство. Пусть $2n = p\ .\ q$. Обозначим $\beta^p = \omega$. Тогда выполняются равенства

$$\begin{aligned}
&\omega^q = \varepsilon, \quad \gamma^2 = \varepsilon, &&(\gamma\omega)^2 = \varepsilon,\\
&\omega^q = \varepsilon, \quad (\gamma\beta)^2 = \varepsilon, &&(\gamma\beta\omega)^2 = \varepsilon,\\
&\vdots\\
&\omega^q = \varepsilon, \quad (\gamma\beta^{p-1})^2 = \varepsilon, &&(\gamma\beta^{p-1}\omega)^2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Для каждой образующей $\gamma\beta^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots p-1$ существуют определяющие соотношения подгруппы $D_q^i \subset G$ порядка $2q$.

Аналогично обозначим $\beta^q = \varrho$ и получим:

$$\begin{aligned}
&\varrho^p = \varepsilon, \quad \gamma^2 = \varepsilon, &&(\gamma\varrho)^2 = \varepsilon,\\
&\varrho^p = \varepsilon, \quad \gamma(\beta)^2 = \varepsilon, &&(\gamma\beta\varrho)^2 = \varepsilon,\\
&\vdots\\
&\varrho^p = \varepsilon, \quad (\gamma\beta^{q-1})^2 = \varepsilon, &&(\gamma\beta^{q-1}\varrho)^2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Этим соотношениям соответствуют диэдрические подгруппы $D_p^i \subset G$, $i = 0, 1, 2, \dots q - 1$, порядка $2p$.

Следствие 6. *Каждая диэдрическая группа D_n порядка $2n = p \,.\, q$ (p, q — натуральные числа) имеет p диэдрических подгрупп D_q порядка $2q$ и q диэдрических подгрупп D_p порядка $2p$.*

Доказательство. В силу [8] (1.52) определяющими соотношениями группы D_n, которую порождают элементы S, R, являются:

$$S^n = E, \quad R^2 = E, \quad (SR)^2 = E.$$

Аналогично по предшествующей теореме обозначим $S^p = W$, $S^q = V$. Тогда

$$W^q = E, \quad (RS^i)^2 = E, \quad (RS^iW)^2 = E, \quad i = 0, 1, 2, \dots p - 1,$$

$$V^p = E, \quad (RS^i)^2 = E, \quad (RS^iV)^2 = E, \quad i = 0, 1, 2, \dots q - 1.$$

Справедливость этих соотношений очевидна.

Группа всех автоморфизмов конфигурации F_n, $n > 2$ является одной из моделей общей диэдрической группы D_{2n} порядка $4n$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] LOMBARDO—RADICE, L.: Sul rango dei piani grafici finiti a caratteristica 3. Boll Unione mat. ital., *10*, 1955, 172—177.

[2] LOMBARDO—RADICE, L.: Su alcuni caratteri dei piani grafici. Univ. di Padova. Rend. Sem. Mat. *24*, 1955, 312—345.

[3] KEEDWELL, A. D.: On the order of projective planes with characteristic. Rend. Mat. *22*, 1963, 498—530.

[4] KEEDWELL, A. D.: A class of configurations associated with projective planes with characteristic. Arch. Math. *15*, 1964, 470—480.

[5] HARTSHORN, R.: Foundations of Projective Geometry. W. A. Benjamin, INC., N. Y., 1967.

[6] АРГУНОВ, Б. И.: Конфигурационные постулаты и их алгебраические эквиваленты. Матем. сб. *26*, 1950, 425—456.

[7] DEMBOWSKI, P.: Finite Geometries. Springer — Verlag, Berlin—Heidelberg, N. Y., 1968.

[8] COXETER, H. S. M.—MOSER, W. O. J.: Generators and Relations for Discrete Groups. Berlin—Göttingen—Heidelberg, N. Y., 1965.

Поступило 4. 2. 1972

Katedra matamatiky
Strojníckej fakulty
Vysokej školy technickej
Košice