Ján Jakubík

O zameniteľných kongruenciách na svázoch

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 8 (1958), No. 3, 155--162

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126876`

O ZAMENITEĽNÝCH KONGRUENCIÁCH NA SVÄZOCH

JÁN JAKUBÍK, Košice

V práci [2] vyšetroval H. A. Thurston kongruencie na distributívnych sväzoch, splňujúcich istú podmienku konečnosti (táto podmienka je podrobne uvedená nižšie v odseku 1). Dokážeme, že Thurstonovo tvrdenie o zameniteľnosti kongruencií na distributívnych sväzoch, vyhovujúcich spomínanej podmienke, je nesprávne. Ďalej odvodíme nutnú a postačujúcu podmienku, aby aždé dve kongruencie na sväze S boli zameniteľné.

Používame pojem ,,vytvorujúci rozklad" podľa [3]. Ostatné pojmy a označenia sa zhodujú s terminológiou knihy [1].

1. Každý distributívny sväz sa dá reprezentovať pomocou množín. Podrobnejšie povedané: ak S je distributívny sväz, existuje množina M a zobrazenie

$$x \in S, \quad x \to x(M), \quad x(M) \subset M, \tag{1}$$

ktoré má tieto vlastnosti (x, y sú ľubovoľné prvky sväzu S):

$$x \neq y \Rightarrow x(M) \neq y(M),$$
$$(x \cup y)(M) = x(M) \cup y(M),$$
$$(x \cap y)(M) = x(M) \cap y(M).$$

Znaky $\cup$, $\cap$ na ľavej strane sa vzťahujú na sväz S, a na pravej strane majú význam množinový. (Pozri [1], str. 140.)

V práci [2] vyšetruje H. A. Thurston také distributívne sväzy, pre ktoré existuje reprezentácia (1), v ktorej všetky množiny $x(M)$ sú konečné; kvôli stručnosti nazvime takéto sväzy sväzmi typu (k). Pre takéto sväzy je v práci [2] vyslovené tvrdenie (v inej terminológii):

(I) *Ak S je sväz typu* (k), *ľubovoľné dva vytvorujúce rozklady R_1, R_2 na S sú zameniteľné.*

(Vytvorujúce rozklady R_1, R_2 na S sa nazývajú zameniteľnými, ak pre ľubovoľné prvky, x y, $z \in S$ zo vzťahov

$$x \equiv y(R_1), \qquad y \equiv z(R_2)$$

vyplýva existencia prvku $u \in S$, pre ktorý platí

$$x \equiv u(R_2), \qquad u \equiv z(R_1).$$

Porov. [1], str. 85; v prácach O. Borůvku (porov. napr. [3]) sa používa názov „doplnkové vytvorujúce rozklady".)

Tvrdenie (I) je uvedené aj v recenzii práce [2] v Mathem. Reviews 16 (1955), str. 559, a citované v nedávno vyšlej práci Dwingerovej [4]. Toto tvrdenie je však nesprávne, ako dokazuje nasledujúci jednoduchý príklad:

Nech $S = \{x, y, z\}$ je reťazec, $x < y < z$. S je konečný distributívny sväz, teda S je sväz typu (k). Rozklady $R_1 = \{\{x, y\}, \{z\}\}$, $R_2 = \{\{x\}, \{y, z\}\}$ sú vytvorujúcimi rozkladmi na S. Platí $x \equiv y(R_1)$, $y \equiv z(R_2)$ a neexistuje prvok $u \in S$, pre ktorý by bolo $x \equiv u(R_2)$, $u \equiv z(R_1)$. Teda R_1, R_2 nie sú zameniteľné.

2. *Nech S je distributívny sväz. Nutná a postačujúca podmienka, aby každé dva vytvorujúce rozklady R_1, R_2 na S boli zameniteľné, je: sväz S je relatívne komplementárny.*

Dôkaz. Podmienka je postačujúca podľa lemmy 14 z práce [5] a nutná podľa lemmy 13 [5]. (Porov. aj [1], str. 86, Ex. 3.)

Ak bude v ďalšom reč o rozklade R na sväze S, označíme $S/R = \bar{S}$ ($\bar{S}$ je sväz tried vzhľadom na rozklad R); ak $x \in S$, označíme $\bar{x}$ triedu rozkladu R, ktorá obsahuje prvok x.

3. *Nech je teraz S ľubovoľný sväz. Postačujúca podmienka, aby každé dva vytvorujúce rozklady na S boli zameniteľné, je: S je relatívne komplementárny sväz* (lemma 14, [5]; porov. aj [9]).

Nech R_1, R_2 sú vytvorujúce rozklady na sväze S. Označme $R_1 \cap R_2 = R$. Nutnou podmienkou pre zameniteľnosť vytvorujúcich rozkladov R_1, R_2 na S je isté zoslabenie relatívnej komplementárnosti, ktoré znie takto:[1]

(K_1) *Ak je $u, v, x \in S$, $u < x < v$, $u \equiv x(R_1)$, $x \equiv v(R_2)$, potom existuje relatívny komplement prvku $\bar{x}$ v intervale $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$.*[2]

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady tvrdenia (K_1), nech sú rozklady R_1, R_2 zameniteľné. Potom existuje prvok $y \in S$, pre ktorý platí

$$u \equiv y(R_2), \qquad y \equiv v(R_1). \tag{2}$$

Ak na oboch stranách kongruencií (2) utvoríme prenik s prvkom v a potom spojenie s prvkom u a ak označíme $(y \cap v) \cup u = z$, dostávame:

$$u \equiv z(R_2), \qquad z \equiv v(R_1). \tag{2'}$$

Zrejme je $z \in \langle u, v \rangle$. Z kongruencií uvedených v predpoklade tvrdenia (K_1) dostávame teraz

$$u \equiv x \cap z(R_1), \qquad x \cup z \equiv v(R_2)$$

[1] Ak z je relatívny komplement prvku x v intervale $\langle u, v \rangle$, zrejme je $\bar{z}$ relatívnym komplementom prvku $\bar{x}$ v intervale $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$.

[2] Vzhľadom na rozklad $R_1 \cap R_2$.

a z kongruencií (2') analogicky

$$u \equiv x \cap z(R_2), \qquad x \cup z \equiv v(R_1).$$

Je teda v rozklade $R = R_1 \cap R_2$ $\bar{u} = \bar{x} \cap \bar{z}$, $\bar{v} = \bar{x} \cup \bar{z}$. Prvok $\bar{z}$ je relatívnym komplementom prvku $\bar{x}$ v intervale $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$.

Nech (K_2) je tvrdenie, ktoré vznikne z (K_1) zamenením indexov 1, 2 a nech (K) je tvrdenie vyjadrujúce, že platí súčasne (K_1) i (K_2). Zrejme je (K) nutnou podmienkou, aby rozklady R_1, R_2 boli zameniteľné.

4. Dokážeme, že podmienka (K) je aj postačujúca pre to, aby vytvorujúce rozklady R_1, R_2 na sväze S boli zameniteľné. Postup dôkazu je podobný postupu použitému v dôkaze lemmy 14 [5].

Nech je splnená podmienka (K), nech $a, b, c \in S$,

$$a \equiv b(R_1), \qquad b \equiv c(R_2). \tag{3}$$

Označme $a \cup b = f$, $b \cup c = g$, $f \cup g = h$.
Z kongruencií (3) dostávame

$$a \equiv f(R_1), \qquad c \equiv g(R_2), \tag{4}$$

$$f \equiv h(R_2), \qquad g \equiv h(R_1). \tag{4'}$$

Podľa predpokladu o platnosti (K) (použitého na prvky a, f, h) a podľa (4), (4') existuje prvok $i \in S$, pre ktorý platí

$$\bar{i} \cap \bar{f} = \bar{a}, \qquad \bar{i} \cup \bar{f} = \bar{h}. \tag{5}$$

Analogicky sa dokáže existencia prvku $j \in S$, pre ktorý je

$$\bar{j} \cap \bar{g} = \bar{c}, \qquad \bar{j} \cup \bar{g} = \bar{h}. \tag{6}$$

Označme $f \cap i = a_1$, $f \cup i = h_1$, $j \cap g = c_1$, $j \cup g = h_1$. Z rovníc (5), (6) vyplýva

$$a_1 \equiv a, \qquad h_1 \equiv h \equiv h_2, \qquad c_1 \equiv c \qquad (R_1 \cap R_2). \tag{7}$$

Zo vzťahov (4') dostávame utvorením preniku s prvkom i, resp. j a použitím (7)

$$a \equiv i(R_2), \qquad c \equiv j(R_1).$$

Z kongruencií (4) utvorením spojenia s prvkom i, resp. j dostávame pomocou (7)

$$i \equiv k(R_1), \qquad j \equiv h(R_2). \tag{8}$$

Označme $i \cap j = k$. Z (8) utvorením preniku s prvkom j, resp. i a pomocou (7) dostávame

$$k \equiv j(R_1), \qquad k \equiv i(R_2).$$

Z predošlého vyplýva $a \equiv k(R_2)$, $k \equiv c(R_1)$, čím je dôkaz ukončený.

Veta 1. *Podmienka* (K) *je nutná a postačujúca pre to, aby vytvorujúce rozklady* R_1, R_2 *na sväze* S *boli zameniteľné.*

5. Ak S je sväz a ak $a, b \in S$, označíme $R(a, b)$ prenik všetkých vytvorujúcich rozkladov R_i na S, v ktorých $a \equiv b(R_i)$. Ak $u, v, x \in S$, $u < x < v$, označíme $R(u, v, x) = R(u, x) \cap R(x, v)$.

Vyšetrujeme podmienku

(K_3) *Ak* $u, v, x \in S$, $u < x < v$ *a ak* $R = R(u, v, x)$, *potom vo sväze* $\overline{S} = S/R$ *existuje relatívny komplement prvku* $\bar{x}$ *vzhľadom na interval* $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$.

Predpokladajme najprv, že každé dva vytvorujúce rozklady na sväze S sú zameniteľné. Nech $u, v, x \in S$, $u < x < v$. Označme $R(u, x) = R_1$, $R(x, v) = R_2$. Podľa vety 1 platí pre rozklady R_1, R_2 tvrdenie (K); teda platí tvrdenie (K_3).

Teraz predpokladajme, že platí tvrdenie (K_3) a nech R_1, R_2 sú ľubovoľné vytvorujúce rozklady na S, nech $u, v, x \in S$, $u < x < v$, $u \equiv x(R_1)$, $x \equiv v(R_2)$. Potom je $R(u, x) \leq R_1$, $R(x, v) \leq R_2$, a teda aj

$$R(u, v, x) \leq R_1 \cap R_2. \tag{9}$$

Triedu rozkladu $R(u, v, x)$, resp. $R_1 \cap R_2$, obsahujúcu prvok x, označme $\bar{x}$, resp. $\tilde{x}$. Podľa (K_3) existuje $z \in S$,

$$\bar{x} \cap \bar{z} = \bar{u}, \qquad \bar{x} \cup \bar{z} = \bar{v};$$

podľa (9) platí potom aj

$$\tilde{x} \cap \tilde{z} = \tilde{u}, \qquad \tilde{x} \cup \tilde{z} = \tilde{v}.$$

Teda je splnená podmienka (K_1) (a analogicky (K_2)), takže podľa vety 1 rozklady R_1, R_2 sú zameniteľné. Tým sme dokázali túto vetu:

Veta 2. *Podmienka* (K_3) *je nutná a postačujúca pre to, aby každé dva vytvorujúce rozklady na sväze* S *boli zameniteľné.*

Poznámka. Z úvah práce [5] sa ľahko zistí, že pre distributívny sväz S platí $R(u, v, x) = 0$, takže pre distributívne sväzy podmienka (K_3) je ekvivalentná podmienke, aby sväz S bol relatívne komplementárny. Vetu 2 môžeme teda považovať za zovšeobecnenie vety z odseku 2.

6. V práci [6] bol zavedený tento pojem: nech I, I' sú intervaly sväzu S. Hovoríme, že I je slabo projektívny s I', ak existujú intervaly $I_1, \ldots, I_{n-1}$ také, že I_k je transponovaný k intervalu $I'_{k-1} \subset I_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$, $I_0 = I$, $I_n = I'$. (V celej úvahe pripúšťame aj jednoprvkové intervaly $\langle x, x \rangle$. Ľahko sa zistí, že daný interval $I \subset S$ je slabo projektívny s každým jednoprvkovým intervalom $\langle x, x \rangle$ sväzu S.)

Nech I je interval vo sväze S, $x_i \in S$ $(i = 1, \ldots, n)$. Budeme hovoriť, že množina $C = \{x_i\}$ je čiara typu I, ak pre $i = 1, \ldots, n - 1$ platí:

a) prvky x_{i-1}, x_i sú zrovnateľné,

b) interval I je slabo projektívny s intervalom, ohraničeným prvkami x_{i-1}, x_i (o tomto intervale hovoríme tiež, že je typu I).

Hovoríme, že čiara C spojuje prvky x_1, x_n; ak to chceme zdôrazniť, píšeme $C(x_1, x_n)$.

Vyšetrujme podmienku:

(K_3') *Ak je* $u, v, x \in S$, $u < x < v$, *potom existuje prvok* $y \in S$, $u \leqq y \leqq v$ *a ďalej existuje čiara* $C_1(u, x \cap y)$ *a čiara* $C_2(v, x \cup y)$, *ktoré sú súčasne typu* $\langle u, x\rangle$ *i typu* $\langle x, v\rangle$.

Predpokladajme, že platí (K_3'). Nech u, v, $x \in S$, $u < x < v$. Nájdime prvok y podľa (K_3'). Podľa vety 1 a poznámky 2 za vetou 1 [6], platí

$$u \equiv x \cap y, \qquad v \equiv x \cup y. \tag{10}$$

V každom z vytvorujúcich rozkladov $R(u, x)$, $R(x, v)$, teda vzťahy (10) platia tiež vzhľadom na vytvorujúci rozklad $R(u, v, x)$. Tým je dokázané, že platí (K_3).

Predpokladajme, že pre sväz S platí tvrdenie (K_3), nech u, v, $x \in S$, $u < x < v$. Nech $\bar{y}$ je relatívny komplement prvku $\bar{x}$ v intervale $\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle$ (používame rozklad $R = R(u, v, x)$). Analogickou úvahou ako v bode 3 sa zistí, že bez ujmy všeobecnosti môžeme predpokladať $u \leq y \leq v$. Z toho vyplýva, že vzhľadom na rozklad R, a teda tiež vzhľadom na rozklad $R(u, x)$ platia kongruencie (10). Podľa citovaného miesta práce [6] existuje čiara $C_1(u, x \cap y)$ typu $\langle u, x\rangle$. Pritom podľa poznámky 1 za vetou 1 [6] môžeme predpokladať, že $C_1 = \{x_i\}$, $u \leq x_i \leq x \cap y (i = 1, \ldots, n)$. Podľa (10) je potom vzhľadom na rozklad R

$$x_{i-1} \equiv x_i \tag{11}$$

pre $i = 1, \ldots, n$. Keďže (11) platí tiež vzhľadom na rozklad $R(x, v)$, existuje čiara $C_i(x_{i-1}, x_i) = \{z_k^i\}$ $(k = 1, \ldots, m_i)$ typu $\langle x, v\rangle$, pričom

$$z_k^i \in I^i, \tag{12}$$

kde I^i je interval ohraničený prvkami x_{i-1}, x_i. Podľa (12) je interval $\langle u, x\rangle$ a súčasne aj interval $\langle x, v\rangle$ slabo projektívny s každým z intervalov ohraničených prvkami z_{k-1}^i, z_k^i $(k = 1, \ldots, m_i, i = 1, \ldots, n)$. Množina

$$C = \{z_1^1, \ldots, z_{m_1}^1, \ldots, z_1^n, \ldots, z_{m_n}^n\}$$

je zrejme čiara spojujúca prvky u, $x \cap y$, ktorá je súčasne typu $\langle u, x\rangle$ i typu $\langle x, v\rangle$.

Analogicky možno uvažovať pre prvky v, $x \cup y$. Teda platí (K_3'). Z vety 2 dostávame:

Veta 2'. *Podmienka* (K_3') *je nutná a postačujúca pre to, aby každé dva vytvorujúce rozklady na sväze* S *boli zameniteľné.*

7. Nech R_1, R_2 sú vytvorujúce rozklady na sväze S, u, $v \in S$. Vyšetrujme sústavu kongruencií

$$x \equiv u(R_1), \qquad x \equiv v(R_2). \tag{13}$$

Podmienky riešiteľnosti takejto sústavy — za istých obmedzujúcich predpokladov o sväze S a o vytvorujúcich rozkladoch R_1, R_2 — boli vyšetrované v práci V. K. Balachandrana [7] a v práci [5].

Nutná podmienka, aby sústava (14) mala riešenie $x \in S$, je zrejme

$$u \equiv v(R_1 \cup R_2). \tag{14}$$

Na príkladoch sa ľahko zistí, že podmienka (15) vo všeobecnosti nie je postačujúca pre riešiteľnosť kongruencií (14).

Vyšetrujme tieto výroky (porov. [5]):

(Ba) *Pre ľubovoľné prvky u, $v \in S$ a ľubovoľné vytvorujúce rozklady R_1, R_2 na S zo vzťahu* (14) *vyplýva riešiteľnosť sústavy* (13).

(Ba (R_1, R_2)) *Nech R_1, R_2 sú dané vytvorujúce rozklady na sväze S. Pre ľubovoľné prvky u, $v \in S$ zo vzťahu* (14) *vyplýva riešiteľnosť sústavy* (13).

Potom platí:

Veta 3.

a) Podmienka (K_3) *je nutná a postačujúca pre platnosť výroku* (Ba).

b) Podmienka (K) *je nutná a postačujúca pre platnosť výroku* (Ba (R_1, R_2)).

Dôkaz vyplýva z toho, že výrok (Ba) (resp. (Ba (R_1, R_2)) je ekvivalentný požiadavke, aby všetky vytvorujúce rozklady na sväze S (resp. vytvorujúce rozklady R_1, R_2) boli zameniteľné. (Porov. [8], str. 19.)

Vzhľadom na poznámku za vetou 2 tvrdenie a) z vety 3 môžeme považovať za zovšeobecnenie vety 2 z práce [5].

LITERATÚRA

[1] G. Birkhoff, Lattice theory, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. Vol. XXV, New York 1948.

[2] H. A. Thurston, Congruences on a distributive lattice, Proc. Edinb. Math. Soc. Ser. 2, 10, Part II (1954), 76—77.

[3] O. Borůvka, O rozkladech množin, Rozpravy II. tř. České akad., 53, č. 23 (1943).

[4] Ph. Dwinger, Some theorems on universal algebras I, Indagationes mathem. 19 (1957), 182—189.

[5] J. Jakubík, Системы отношений конгруэнтности в структурах, Чехслов. мат. журнал 4 (79), (1954), 248—273.

[6] J. Jakubík, Relácie kongruentnosti a slabá projektívnosť vo sväzoch, Časopis pro pěstování matematiky, 80 (1955), 206—216.

[7] V. K. Balachandran, The Chinese remainder theorem for the distributive lattices, Jour. Indian Math. Soc. (N. S) 13 (1949), 76—80.

[8] P. Dubreil, Algèbre, Paris 1946.

[9] Van Ši-Cian, Poznámky o zameniteľnosti relácií kongruentnosti, Šusjue Sjujebao 3 (1953), 133—141 (čínsky, angl. résumé); [Refer. žurnal 1 (1954), ref. 5477].

Došlo 6. 3. 1958.

Katedra matematiky Vysokej školy technickej v Košiciach

ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ОТНОШЕНИЯ КОНГРУЭНТНОСТИ В СТРУКТУРАХ

ЯН ЯКУБИК

Выводы

1. В работе [2] исследовал А. Г. Турстон отношения конгруэнтности в дистрибутивных структурах, исполняющих некоторое условие конечности; такие структуры обозначим как структуры со свойством (k) (все конечные дистрибутивные структуры обладают свойством (k)). В упомянутой работе Турстон утверждает, что каждые две отношения конгруэнтности на структуре обладающей свойством (k) перестановочны. На простом примере показываем, что это утверждение неверно.

2. Пусть S — дистрибутивная структура. Каждые две отношения конгруэнтности на S перестановочны тогда и только тогда, если S — структура с относительными дополнениями. (См. [5], лемма 13 и 14 [1], стр. 86, упр. 3.)

Каждые две отношения конгруэнтности на структуре с относительными дополнениями перестановочны. (См. [5], лемма 13 и 14 и [9].)

3. Если R — отношение конгруэнтности в структуре S, обозначим через $\bar{x}$ класс в S/R содержающий элемент x.

Пусть R_1, R_2 — отношения конгруэнтности в структуре S. Необходимым условием для перестановочности R_1, R_2 является следующее:

(K_1) Если $x, u, v \in S$, $u < x < v$, $u \equiv x(R_1)$, $x \equiv v(R_2)$, тогда в структуре S/R, $R = R_1 \cap R_2$ существует относительное дополнение элемента $\bar{x}$ в интервале $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$.

4. Пусть (K_2) — условие, которое получим из (K_1), если заменим между собой индексы 1, 2 и пусть (K) — условие утверждающее, что имеет место (K_1) и (K_2).

Теорема 1. Пусть S — структура. Условие (K) является необходимым и достаточным для перестановочности R_1, R_2.

5. Пусть S — структура. Если $u, x \in S$, обозначим через $R(u, x)$ наименьшее отношение конгруэнтности на S, в котором $u \equiv x$. Далее обозначим $R(u, x, v) \equiv R(u, x) \cap R(x, v)$, $S(u, x, v) = S/R(u, x, v)$. Введем еще следующее условие (K_3):

(K_3) Если $u, x, v \in S$, $u < x < v$ тогда элемент $\bar{x}$ структуры $S(u, x, v)$ имеет относительное дополнение в интервале $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$.

Теорема 2. Каждые две отношения конгруэнтности в S перестановочны тогда и только тогда, если в S исполнено условие (K_3).

6. В теореме 2′ доказываем, что условие (K_3) равносильно с условием (K_3'), которое выражается с помощю понятия слабой проективности введенного в [6].

7. Исследуем систему (13), где R_1, R_2 — отношения конгруэнтности на структуре S, $u, v \in S$. Необходимым условием для того, чтобы система (13) имела решение, является, очевидно, (14); но это условие не достаточно. (См. тоже [7] и [5].)

Теорема 3. Для каждой пары элементов $u, v \in S$ и каждой пары отношений конгруэнтности R_1, R_2 на S вытекает из (14) разрешимость системы (13) тогда и только тогда, если в S имеет место (K_3).

VERTAUSCHBARE KONGRUENZEN IN VERBÄNDEN

JÁN JAKUBÍK

Zusammenfassung

1. In der Arbeit [2] hat H. A. Thurston Kongruenzen in solchen distributiven Verbänden untersucht, welche eine gewisse Endlichkeits-Bedingung erfüllen; die Verbände solcher Art bezeichnen wir als Verbände mit der Eigenschaft (k) (alle endlichen distributiven Verbände haben die Eigenschaft (k)). In der erwähnten Arbeit behauptet A. H. Thurston, daß jede zwei Kongruenzen in einem Verband mit der Eigenschaft (k) vertauschbar sind. (Siehe auch [4].) Wir zeigen an einem Beispiel (eines Verbandes mit drei Elementen), daß diese Behauptung falsch ist.

2. S sei ein distributiver Verband. Jede zwei Kongruenzen in S sind vertauschbar dann und nur dann, wenn S relativ komplementär ist. (Siehe auch [5], Lemma 13, und 14, und [1], S. 86, Ex. 3.)

Jede zwei Kongruenzen in einem relativ komplementären Verband sind vertauschbar. (Siehe [5], Lemma 14, und [9].)

3. Wenn R eine Kongruenz in einem Verband S ist, bezeichnen wir mit $\bar{x}$ die Klasse in S/R, welche das Element x enthält.

Es seien R_1, R_2 Kongruenzen in einem Verband S. Eine notwendige Bedingung für die Vertauschbarkeit der Kongruenzen R_1, R_2 ist folgende Verschwächung der relativen Komplementarität:

(K_1) Wenn $x, u, v \in S$, $u < x < v$, $u \equiv x(R_1)$, $x \equiv v(R_2)$, dann gibt es in dem Verband S/R, $R = R_1 \cap R_2$, ein relatives Komplement des Elementes $\bar{x}$ im Intervall $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$.

4. Es sei (K_2) die Bedingung, welche aus (K_1) durch Vertauschung von Indizes 1, 2 entsteht und es sei (K) die Bedingung, welche besagt, daß (K_1) und (K_2) zugleich gilt.

Satz 1. S sei ein Verband. Die Bedingung (K) ist notwendig und hinreichend für die Vertauschbarkeit der Kongruenzen R_1, R_2 in S.

5. S sei ein Verband. Wenn $u, x \in S$, bezeichnen wir mit $R(u, x)$ die kleinste Kongruenz in S, in der die Relation $u \equiv x$ gilt. Für jede drei Elemente $u, x, v \in S$, $u < x < v$ bilden wir die Kongruenz $R(u, x, v) = R(u, x) \cap R(x, v)$. Die Klasse in $R(u, x, v)$, welche das Element $z \in S$ enthält, bezeichnen wir $\bar{z}$. Weiter sei $S(u, x, v) = S/R(u, x, v)$. Wir führen noch folgende Bedingung (K_3) ein:

(K_3) Wenn $u, x, v \in S$, $u < x < v$, dann hat das Element $\bar{x}$ in dem Verband $S(u, x, v)$ ein relatives Komplement im Intervall $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$.

Satz 2. Jede zwei Kongruenzen in S sind vertauschbar dann und nur dann, wenn in S die Bedingung (K_3) erfüllt ist.

6. Im Satz 2′ beweisen wir, daß die Bedingung (K_3) mit einer Bedingung (K_3') äquivalent ist; diese Bedingung enthält den in der Arbeit [6] eingeführten Begriff der schwachen Projektivität.

7. Untersuchen wir das System von Kongruenzen (13), wobei R_1, R_2 Kongruenzen in einem Verband S sind, $u, v \in S$. Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit dieses Systems ist offensichtlich (14); die Bedingung (14) ist aber nicht hinreichend. (Siehe auch [7] und [5].)

Satz 3. Für jede $u, v \in S$ und jede zwei Kongruenzen R_1, R_2 in S folgt aus (14) die Lösbarkeit von (13) dann und nur dann, wenn in S die Bedingung (K_3) gilt.