Milan Petráš

К вопросу об ультрафиолетовой асимптотике пропагатора фотона

*Matematicko-fyzikálny časopis*, Vol. 12 (1962), No. 2, 129--135

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126809

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 12, 2, 1962

# К ВОПРОСУ ОБ УЛЬТРАФИОЛЕТОВОЙ АСИМПТОТИКЕ ПРОПАГАТОРА ФОТОНА

МИЛАН ПЕТРАШ (Milan Petráš), Братислава

## 1. Введение

Как известно, в квантовой электродинамике существует некоторая область импульсов, в которой применима теория возмущений. Эта область, определенная условием $e^2 \ln \frac{k^2}{m^2} \ll 1$, является достаточно широкой для того, чтобы охватить все импульсы, достижимые на практике. Однако, в связи с развитием дисперсионного подхода к задачам теории поля возник вопрос об асимптотическом поведении функций Грина в ультрафиолетовой области [1].

Из более ранних попыток напомним работы [2], в которых асимптотический вид пропагатора фотона был получен сумированием диаграмм Фейнмана определенного типа. Та же самая асимптотика была найдена при использовании функциональных уравнений ренормализационной группы [3]. Однако, найденное выражение не имеет правильных аналитических свойств. Оно обладает нефизическим логарифмическим полюсом. В работе [4] показано, что этот полюс можно устранить, но при этом теряется аналитическое поведение пропагатора в точке $e^2 = 0$.

В настоящей работе не дается окончательное решение проблемы ультрафиолетовой асимптотики пропагатора фотона. В связи с оживленной дискуссией по этому поводу предлагается в некоторой степени интуитивный прием, позволяющий улучшить формулу теории возмущений в асимптотической области.

Сущность метода заключается в следующем: Матричные элементы потенциала электромагнитного поля между вакуумом и любым стационарным состоянием обьединяются вместе с зарядом в один вектор $(\eta, \varepsilon)$ некоторого пространства с индефинитной метрикой. Переход от свободных полей к взаимодействующим сводится к линейному преобразованию $(\eta, \varepsilon)$. Дается вид этого преобразования, который автоматически гарантирует отсутствие логарифмического полюса. Это приводит к определенному виду спектральной плотности Челлена-Лемана, который затем сравнивается с теорией возмущений.

## 2. Установление группы преобразований

Постоянная перенормировки $Z^{-1}$ имеет известное выражение

$$Z^{-1} = 1 + \int_0^{\infty} \varrho(M^2)\,dM^2, \qquad (2.1)$$

где

$$\varrho(M^2)\,dM^2 = \sum_{M,s}^{M+dM} |\eta(M^2, s)|^2. \qquad (2.2)$$

Величины $\eta(M^2, s)$ связаны с матричными элементами потенциала электромагнитного поля соотношением [5]

$$\langle 0 | A_\mu(x) | \varkappa, s \rangle = \eta(-k^2, s) \frac{e_\mu}{(2k_0\Omega)^{1/2}} e^{ikx}, \qquad (2.3)$$

$e_\mu$ — единичный вектор, а $\Omega$ — нормировочный объем. Подставив выражение (2.2) в (2.1) и учитывая, что $e_0^2 = Z^{-1}e^2$ получим

$$|\eta_0|^2 + \sum_{M,s} |\eta(M^2, s)|^2 - \frac{1}{\chi} |\varepsilon|^2 = 0. \qquad (2.4)$$

При этом, чтобы добиться симметрии, мы ввели величины $\varepsilon$ и $\eta_0$ так, чтобы

$$|\varepsilon|^2 = \frac{e_0^2}{4\pi}, \qquad |\eta_0|^2 = 1.$$

В случае свободного поля равенство (2.4) сводится к

$$|\eta_0|^2 - \frac{1}{\chi} |\varepsilon'|^2 = 0, \qquad (2.5)$$

где

$$|\varepsilon'|^2 = \frac{e^2}{4\pi}.$$

Теперь выдвинем предположение, которое является основой дальнейших рассуждений. Именно предположим, что переход от уравнения (2.5) к уравнению (2,4), т. е. от соответствующих матричных элементов свободного поля к матричным элементам взаимодействующего поля осуществляется с помощью преобразования, которое принадлежит к некоторой группе $G$. Так как уравнение (2.5) является частным случаем уравнения (2.4), то искомую группу $G$ можно найти из требования, чтобы преобразования группы $G$ сохраняли вид уравнения (2.4). Чтобы упростить обозначения, введем вместо символов $\eta_0$ и $\eta(M^2, s)$ единственный символ $\eta_i$ и уравнение (2.4) перепишем в следующем виде

$$(\eta, \eta) - \frac{1}{\chi} |\varepsilon|^2 = 0. \qquad (2.6)$$

где

$$(\eta, \eta) = \sum_i \eta_i^* \eta_i .$$

Набор величин $\eta_i$ будем считать вектором $\eta$ в пространстве Гильберта $H$; значок $i$ при этом соответствует только тем состояниям, для которых матричные элементы (2.3) не равны нулю.* Уравнение (2.6) имеет вид известного уравнения для распространения фронта световой волны

$$\vec{x}^{\,2} - c^2 t^2 = 0.$$

Эта аналогия несколько облегчает нахождение группы $G$. Сразу же видно, что к группе $G$ принадлежит группа всех унитарных преобразований пространства $H$,

$$\eta = U\eta', \qquad U^{-1} = U^{+} \tag{2.7}$$

и однопараметрическая группа

$$\varepsilon = e^{i\varphi}\varepsilon'. \tag{2.8}$$

Чтобы получить полную группу $G$, необходимо дополнить эти преобразования следующими:

$$\eta = \eta' + (d - 1)\frac{(\xi, \eta')}{(\xi, \xi)}\,\xi + d\varepsilon'\xi, \tag{2.9}$$

$$\varepsilon = d\,(\varepsilon' + \alpha(\xi, \eta')), \tag{2.10}$$

где

$$d = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha(\xi, \xi)}} .$$

Эти преобразования можно выводить в полной аналогии с преобразованиями Лоренца (см., например, [6]). Они являются функциями вектора $\xi$, норма которого удовлетворяет условию

$$(\xi, \xi) \leqq \frac{1}{\alpha} . \tag{2.11}$$

Вектор $\xi$ аналогичен вектору скорости в преобразованиях Лоренца и условие (2.11) соответствует известному ограничению на скорости, которые должны быть меньше или равны скорости света.

Преобразование, которое ведет от (2.5) к (2.4) получим из (2.9) и (2.10), если вектор $\eta'$ выберем так, чтобы

$$\eta'(M^2, s) = 0. \tag{2.12}$$

Кроме того, чтобы учесть условие $\eta'_0 = \eta_0$, надо положить

$$\xi_0 = 0. \tag{2.13}$$

* Такие состояния должны, например, соответствовать равному нулю полному заряду.

Из (2.12) и (2.13) теперь вытекает

$$(\xi, \eta') = 0. \tag{2.14}$$

Благодаря условию (2.14) преобразования (2.9) и (2.10) упрощаются

$$\left.\begin{aligned} \eta_0 &= \eta'_0, \\ \eta(M^2, s) &= \frac{e}{\sqrt{4\pi}} Z^{-1/2} \xi(M^2, s), \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

$$e_0 = Z^{-1/2} e, \tag{2.16}$$

$$Z = 1 - \alpha \sum_{M, s} |\xi(M^2, s)|^2. \tag{2.17}$$

Заметим, что добавление преобразований (2.7) и (2.8) к (2.15) и (2.16) не изменяет вид последних, если только подставить вместо $\xi$ вектор $U\xi$.

В дальнейшем покажем, что вектор $\xi$ можно представить в таком виде, что условие (2.11) будет выполняться автоматически. С этой целью введем последовательность ортогональных векторов $\chi^{(z)}$ (где значок $z$ принимает те же значения, что и $M^2$) следующим образом

$$\left.\begin{aligned} \chi_0^{(z)} &= 0, \\ \chi^{(z)}(M^2, s) &= \chi(M^2, s) \sqrt{\Delta M^2}\, \delta_{M^2, z}. \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

Вектор $\xi$ будем считать сложенным из $\chi^{(z)}$ по правилу „сложения скоростей" в порядке возрастающего $z$. Соответствующая теорема сложения ортогональных „скоростей" $\chi^{(1)}$ и $\chi^{(2)}$ вполне аналогична известной теореме из теории относительности и может быть выведена путем сложения двух преобразований (2.9), (2.10):

$$\chi = \chi^{(1)} \sqrt{1 - \alpha(\chi^{(2)}, \chi^{(2)})} + \chi^{(2)}, \tag{2.19}$$

$$(\chi^{(1)}, \chi^{(2)}) = 0.$$

Многократным применением формулы (2.19) к последовательности векторов $\chi^{(z)}$ (в порядке растущего $z$) получаем

$$\xi(M^2, s) = \chi(M^2, s) \sqrt{\Delta M^2} \sqrt{\prod_{z = M'^2} \Big(1 - \alpha \sum_s |\chi(z, s)|^2 \Delta z\Big)}. \tag{2.20}$$

Бесконечное произведение по $z$ в (2.20) начинается с члена соответствующего $z = M'^2$, где $M'^2$ означает самое близкое к $M^2$ высшее значение. Имея в виду дальнейший переход к непрерывному спектру $M^2$, можем утверждать, что $\xi(M^2, s)$, определенное уравнением (2.20), автоматически удовлетворяет условию (2.11). Действительно, всякий вектор $\chi^{(z)}$, определенный уравнением (2.18) для достаточно малого интервала $\Delta M^2$ (интервал между двумя соседними значениями $M^2$) удовлетворяет условию (2.11). Так как сложением векторов с помощью (2.11) это условие не нарушается, то и полный вектор $\xi$ будет удовлетворять (2.11), хотя функция $\chi(M^2, s)$ является произвольной.

Нетрудно показать, что

$$\prod_{M^2}\left(1 - \alpha \sum_{s} |\chi(M^2, s)|^2 \Delta M^2\right) = 1 - \alpha \sum_{M,s} |\xi(M^2, s)|^2. \tag{2.21}$$

Поэтому уравнение (2.15) приобретает вид

$$\eta(M^2, s) = \frac{e}{\sqrt{4\pi}} \left[\prod_{z}^{z=M^2} \left(1 - \alpha \sum_{s} |\chi(M^2, s)|^2 \Delta z\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \chi(M^2, s)\sqrt{\Delta M^2}. \tag{2.22}$$

Тем самым мы устранили перенормировочную постоянную $Z^{-1}$ из (2.15), что является необходимым условием для того, чтобы в определении $\eta(M^2, s)$ выступал только перенормированный заряд e, а не $eZ^{-\frac{1}{2}} = e_0$.

## 3. Функция распространения фотона

Исходя из результатов предыдущего раздела можно дать очень простую интерпретацию возникновения логарифмического полюса в функции распространения фотона. Покажем, что возникновение этого полюса связано с невыполнением условия (2.11). Разумеется, что при невыполнении этого условия мы покидаем пределы группы $G$, однако, формально можно и в таком случае добиться того, чтобы при преобразовании (2.15) и (2.16) уравнение (2.5) переходило в (2.4), если только величины $\eta^*(M^2, s)$ и $\varepsilon^*$ заменить на

$$\left.\begin{aligned} \bar{\eta}(M^2, s) &= Z^{-\frac{1}{2}} \xi^*(M^2, s)\varepsilon'^*, \\ \bar{\varepsilon} &= Z^{-\frac{1}{2}} \varepsilon'^*. \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Приступим к доказательству вышеприведенного утверждения. Разложение Фурье пропагатора фотона имеет вид

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(x - y) &= \langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(y) | 0\rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) G(k)\, \mathrm{e}^{ik(x-y)}\, \mathrm{d}^4 k. \end{aligned}$$

Для функции $G(k)$ существует известное спектральное представление Челлена — Лемана

$$G(k) = \frac{1}{i}\left\{\frac{1}{k^2 - i0} + \int_0^\infty \frac{\varrho(M^2)\,\mathrm{d}M^2}{k^2 + M^2 - i0}\right\}, \tag{3.2}$$

где $\varrho(M^2)$ дается уравнением (2.2). Исходя из представления (3.2), разумеется мы не можем получить логарифмический полюс и мы должны обратиться к теории возмущений, из которой следует, что для функции $\mathrm{d}(k)$, определенной уравнением

$$G(k) = \frac{1}{i} \frac{1}{k^2 - i0} \mathrm{d}(k),$$

имеет место следующее соотношение (для больших $L$)

$$Z_L \mathrm{d}(L) = 1, \tag{3.3}$$

где $Z_L$ есть постоянная перенормировки при обрезании с граничным импульсом $L$. Компоненты $\xi(M^2, s)$ вектора $\xi$ при этом не будут равны нулю только для $M^2 \leqq L^2$ и поэтому из (2.16) вытекает

$$Z_L = 1 - \alpha \int_0^{L^2} \sigma(M^2)\, \mathrm{d}M^2, \tag{3.4}$$

где

$$\sigma(M^2)\, \mathrm{d}M^2 = \sum_{M, s}^{M + \mathrm{d}M} |\xi(M^2, s)|^2.$$

Из (3.3) видно, что $\mathrm{d}(L)$ имеет полюс в точке, в которой выражение (3.4) обращается в нуль. Ясно, что при выполнении условия (2.11) этот полюс не возникает. В таком случае величину $\eta(M^2, s)$ всегда можно представить в виде (2.22) и из этого вытекает для спектральной плотности

$$\varrho(M^2) = \alpha\kappa(M^2) \exp\left(\alpha \int_0^{M^2} \kappa(z)\, \mathrm{d}z\right), \tag{3.5}$$

где

$$\kappa(z) = \sum_s |\eta(M^2, s)|^2$$

и для $Z$ имеем

$$Z = \exp\left(-\alpha \int_0^{\infty} \kappa(z)\, \mathrm{d}z\right). \tag{3.6}$$

Формулы (3.5) и (3.6) могут быть использованы как некоторое средство для улучшения формул теории возмущений для $\varrho(M^2)$ и $Z$. Действительно, определив плотность $\kappa(z)$ из требования, чтобы $\varrho(M^2)$ совпало с соответствующим выражением в данном порядке теории возмущений и подставив найденное выражение в (3.5) и (3.6) получаем выражения, которые явно согласованы с условием (2.11) или же ему эквивалентным условием $0 \leqq Z \leqq 1$. Так, например, во втором порядке теории возмущений имеем

$$\kappa(z) = \frac{1}{3\pi z} \qquad (z \to \infty),$$

откуда вытекает, что

$$d(k) = \left(\frac{k^2}{m^2}\right)^{\frac{\alpha}{3\pi}} \qquad (k^2 \to \infty)$$

и

$$Z = 0.$$

В заключение автор выражает благодарность Л. Д. Соловьеву за обсуждение результатов работы.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Weinberg S., Phys. Rev. 118 (1960), 838.
Evans L. E., Nuclear Physics 17 (1960), 163.
[illegible], Yennie, Suura, Phys. Rev. Letters 2 (1959), 513.
[2] Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М., ДАН СССР 95 (1954 г.), 497, 773, 1177.
[3] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., ЖЭТФ 30 (1956 г.), 77.
[4] Redmond P. J., Phys. Rev 112 (1958), 1404.
[5] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., *Квантовая электродинамика*, Физматгиз Москва 1959.
[6] Фок В. А., *Теория пространства, времени и тяготения*, Гостехиздат Москва 1955.

Поступило 10. 11. 1961 г.

*Laboratórium fyziky*
*Prírodovedeckej fakulty*
*Univerzity Komenského*
*v Bratislave*

## ON THE HIGH-ENERGY BEHAVIOR OF THE PHOTON PROPAGATOR

Milan Petráš

### Summary

A method for improving the high-energy behavior of the photon propagator obtained from the pertubation theory is proposed.