Matematický časopis

Milan Gera

Bedingungen der Nicht-Oszillationsfähigkeit und der Oszillationsfähigkeit für die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

Matematický časopis, Vol. 21 (1971), No. 1, 65--79

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126803`

Matematický časopis 21 (1971), No. 1

BEDINGUNGEN DER NICHT-OSZILLATIONSFÄHIGKEIT UND DER OSZILLATIONSFÄHIGKEIT FÜR DIE LINEARE DIFFERENTIALGREICHUNG DRITTER ORDNUNG

MILAN GERA, Bratislava

1. *Wir sagen, dass die Differentialgleichung der n-ten Ordnung*

$$y^{(n)}(x) + \sum_{i\ 0}^{n-1} p_{n-i}(x)y^{(i)}(x) \qquad 0$$

mit stetigen Koeffizienten im Intervall J in diesem Intervall nichtoszillatorisch ist, wenn jede ihre nichttriviale Lösung in diesem Intervall höchstens n — 1 Nullstellen, die Vielfachheit eingerechnet, hat. Im entgegengesetzten Falle sagen wir, dass sie im Intervall J oszillatorisch ist.

In dieser Arbeit befassen wir uns haptsächlich mit den Bedingungen der Nicht-oszillationsfähigkeit und teilweise mit den Bedingungen der Oszillationsfähigkeit für die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(a) \qquad L[y] \equiv y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0$$

in Intervall $\mathscr{I}$, wo $p_i(x) \in C(\mathscr{I})$, $i = 1, 2, 3$; $\mathscr{I} = \langle x_0, b)$ bzw. $(a, x_0\rangle$, $-\infty \leqq a < x_0 < b \leqq \infty$.

Hiebei verwenden wir Begriffe und Bezeichnungen, welche in den Arbeiten [1] und [2] eingeführt wurden.

Unter der zu der linearen Differentialgleichung $L[y] = 0$ adjungierten Differentialgleichung verstehen wir die Differentialgleichung

$$(b) \qquad M[z] \equiv [(z' - p_1(x)z)' + p_2(x)z]' - p_3(x)z = 0,$$

welche durch Substitution $z(x) = v(x) \exp \int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\, \mathrm{d}\eta$ für $x \in \mathscr{I}$ in die Differentialgleichung

$$(c) \qquad M_1[v] \equiv (L_2[v]\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta})' - p_3(x)v\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} p\ (\eta)\mathrm{d}\eta} = 0,$$

übergeht, wo

$$L_2[v] \text{ H } v'' + p_1(x)v' + p_2(x)v$$

ist (siehe [1]).

Die Differentialgleichungen $L[y] = 0$; $M[z] = 0$; $M_1[v] - 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ zusammen mit den gegebenen Anfangsbedingungen in der Zahl x_0

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad y''(x_0) = y_0'';$$

$$z(x_0) = z_0, \quad z'(x_0) = z_0', \quad (z' - p_1(x)z)'_{x-x_0} = z_0'';$$

$$v(x_0) = v_0, \quad v'(x_0) = v_0', \quad v''(x_0) = v_0''$$

sind äquivalent mit den entsprechenden Volterraschen Integralgleichungen zweiter Art (siehe [2])

$$y^{(l)}_{(x)} = P_l(x, y_0, y_0', y_0'') + \int_{x_0}^{x} A_l(x, t)y^{(l)}(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$

$$z^{(l)}_{(x)} = Q_l(x, z_0, z_0', z_0'') + \int_{x_0}^{x} B_l(x, t)z^{(l)}(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2}$$

$$v^{(l)}_{(x)} = S_l(x, v_0, v_0', v_0'') + \int_{x_0}^{x} C(x, t)v^{(l)}(t)\,\mathrm{d}t, \tag{3}$$

welche äquivalent sind mit den entsprechenden Integralgleichungen

$$y^{(l)}(x) = \varphi_l(x, y_0, y_0', y_0'') + \int_{x_0}^{x} \{\int_{t}^{x} A_l(x, \tau)\, A_l(\tau, t)\,\mathrm{d}\tau\} y^{(l)}(t)\mathrm{d}t, \tag{4}$$

$$z^{(l)}(x) = \psi_l(x, z_0, z_0', z_0'') + \int_{x_0}^{x} \{\int_{t}^{x} B_l(x, \tau)B_l(\tau, t)\,\mathrm{d}\tau\} z^{(l)}(t)\mathrm{d}t, \tag{5}$$

$$v^{(l)}(x) = \chi_l(x, v_0, v_0', v_0'') + \int_{x_0}^{x} \{\int_{t}^{x} C_l(x, \tau)C_l(\tau, t)\,\mathrm{d}\tau\} v^{(l)}(t)\,\mathrm{d}t, \tag{6}$$

wo

$$\varphi_l(x, y_0, y_0', y_0'') = P_l(x, y_0, y_0', y_0'') + \int_{x_0}^{x} A_l(x, t)P_l(t, y_0, y_0', y_0'')\,\mathrm{d}t,$$

$$\psi_l(x, z_0, z_0', z_0'') = Q_l(x, z_0, z_0', z_0'') + \int_{x_0}^{x} B_l(x, t)Q_l(t, z_0, z_0', z_0'')\,\mathrm{d}t,$$

$$\chi_l(x, v_0, v_0', v_0'') = S_l(x, v_0, v_0', v_0'') + \int_{x_0}^{x} C_l(x, t)S_l(t, v_0, v_0', v_0'')\,\mathrm{d}t,$$

$x \in \mathscr{I}$ und l ist eine der Zahlen 0, 1, 2, 3(1). Die Darstellung der Funktion $P_l(x, y_0, y'_0, y''_0)$, $A_l(x, t)$; $Q_l(x, z_0, z'_0, z''_0)$, $B_l(x, t)$; $S_l(x, v_0, v'_0, v''_0)$, $C_l(x, t)$ ist in der Arbeit [2] angeführt.

Definition 1. *Wir sagen, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ aus der Klasse $\mathscr{A}_l^+(\langle x_0, b))[\mathscr{A}_l^+((a, x_0\rangle)]$ ist, wenn der Kern der zugehörigen Integralgleichung* (1) *$A_l(x, t)$ eine nichtnegative [nichtpositive] Funktion für $x_0 \leqq t \leqq \leq x < b[a < x \leqq t \leqq x_0]$ ist.*

Definition 2. *Wir sagen, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ aus der Klasse $\mathscr{A}_l^-(\langle x_0, b))[\mathscr{A}_l^-((a, x_0\rangle)]$ ist, wenn der Kern der zugehörigen Integralgleichung* (1) *$A_l(x, t)$ eine nichtpositive [nichtnegative] Funktion fur $x_0 \leqq t \leq < x < b[a < x \leqq t \leqq x_0]$ ist.* Ähnlich definieren wir die Klassen $\mathscr{B}_l^+(\mathscr{I})$, $\mathscr{B}_l^-(\mathscr{I})$ bzw. $\mathscr{C}_l^+(\mathscr{I}), \mathscr{C}_l^-(\mathscr{I})$ für die adjungierte Differentialgleichung $M[z] = 0$ bzw. die Differentialgleichung $M_1[v] = 0$.

Weiter bezeichnen wir $I = \mathscr{I} - \{x_0\}$.

Wir werden die nachfolgenden Lemma oft benutzen.

Lemma 1. *Die Funktion $A(x, t)$ sie stetig und nichtnegativ für $x_0 \leqq t \leqq x < b$ [nichtpositiv für $a < x \leqq t \leqq x_0$] und die Funktion $p(x)$ sei stetig und nichtnegativ (nichtpositiv) im Intervall $\langle x_0, b)[(a, x_0\rangle]$. Für die Lösung $u(x)$ der Integralgleichung*

$$u(x) = p(x) + \int_{x_0}^{x} A(x, t)u(t)\, \mathrm{d}t \tag{d}$$

im Intervall $x_0, b)[(a, x_0\rangle]$ gilt dann

$$u(x) \geqq p(x) \geqq 0 \quad (u(x) \leqq p(x) \leqq 0).$$

Die Behauptung des Lemma folgt daraus, dass die Resolvente der Integralgleichung (d) unter den gegebenen Voraussetzungen eine nichtnegative [nichtpositive] Funktion für $x_0 \leqq t \leqq x < b[a < x \leqq t \leqq x_0$f ist.

Die Integralgleichung (d) ist äquivalent mit der Integralgleichung

$$u(x) - \varphi(x) + \int_{x_0}^{x} \{\int_{t}^{x} A(x, \tau, t)\, \mathrm{d}\tau\} u(t)\, \mathrm{d}t, \tag{e}$$

wo

$$\varphi(x) - p(x) + \int_{x_0}^{x} A(x, t)p(t)\, \mathrm{d}t$$

(1) Dabei setzen wir bei den gegebenen Integralgleichungen die Stetigkeit der auftretenden Ableitungen der Funktionen $p_1(x)$, $p_2(x)$ im erwogenen Intervall $\mathscr{I}$ voraus (siehe [2]).

ist und $p(x)$, $A(x, t)$ stetige Funktionen für $x_0 \leqq t \leqq x < b[a < x \leqq t \leqq x_0]$ sind.

Lemma 2. *Die Funktion $A(x, t)$ sei stetig und nichtpositiv für $x_0 \leqq t \leqq x < b$ [inchtnegativ für $a < x \leqq t \leqq x_0$]. Die Funktion $p(x)$ sei stetig und die Funktion*

$$\varphi(x) = p(x) + \int_{x_0}^{x} A(x, t)p(t)\,\mathrm{d}t$$

sei nichtnegativ (nichtpositiv) für $x \in \langle x_0, b)$ [$x \in (a, x_0\rangle$]. Für die Lösung $u(x)$ der Integralgleichung (d) im Intervall $\langle x_0, b)[(a, x_0\rangle]$ gilt dann

$$0 \leqq \varphi(x) \leqq u(x) \leqq p(x)\,(p(x) \leqq u(x) \leqq \varphi(x) \leqq 0).$$

Beweis. Aus den Voraussetzungen des Lemma folgt, dass der Kern der Integralgleichung (*e*) fär $x_0 \leqq t \leqq x < b$ nichtnegativ [für $a < x \leqq t \leqq x_0$ nichtpositiv] ist. Da die Funktion $\varphi(x)$ im Intervall $\langle x_0, b)[(a, x_0\ ]$ nichtnegativ (nichtpositiv) ist, erhalten wir laut Lemma 1 für die Lösung $u(x)$ der Integralgleichung (*e*), dass $u(x) \geqq \varphi(x) \geqq 0\ (u(x) \leqq \varphi(x) \leqq 0)$ für $x \in \langle x_0, b)$ [$x \in (a, x_0\rangle$] ist. Mit Rücksicht darauf, dass die Integralgleichung (*e*) äquivalent ist mit der Integralgleichung (*d*), haben wir für die Lösung $u(x)$ im gegebenen Intervall

$$u(x) - p(x) = \int_{x_0}^{x} A(x, t)u(t)\,\mathrm{d}t \leqq 0\,(\geqq 0)$$

d. h. $u(x) \leqq p(x)\,(u(x) \geqq p(x))$ für $x \in \langle x_0, b)$ [$x \in (a, x_0\rangle$]. Damit ist der Beweis des Lemma beendet.

Bemerkung. Aus dem Lemma 2 ist ersichtlich, dass wenn der Kern der Integralgleichung (*d*) für $x_0 \leqq t \leqq x < b$ nichtpositiv [nichtnegativ für $a < x \leqq t \leqq x_0$] ist und die Funktion $\varphi(x)$ für $x \in \langle x_0, b)$ [$x \in (a, x_0\ ]$ nichtnegativ (nichtpositiv) ist, dann ist auch die Funktion $p(x)$ im Intervall $\langle x_0, b)$ [$(a, x_0\rangle$] notwendig nichtnegativ (nichtpositiv).

Lemma 3. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$\mathscr{L}_2[y] \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

wo $p(x)$, $q(x) \in C(I)$ sind, im Intervall I nichtoszillatorisch sei, ist, dass eine Funktion $u(x) \in C^2(I)$ mit der Eigenschaft $\mathscr{L}_2[u] \leqq 0, u(x) > 0$ für $x \in I$ existiere.

Beweis. Notwendige Bedingung. Die Differentialgleichung $\mathscr{L}_2[y]\quad 0$ sei im Intervall I nichtoszillatorisch. Das heisst, dass eine beliebige nichttriviale lineare Kombination ihres Fundamentalsystems von Lösungen im Intervall I höchstens eine Nullstelle hat. Auf Grund des Lemma 1 [1] existiert deshalb unter diesen linearen Kombinationen eine solche, welche für $x \in I$ keine Nullstelle hat. Bezeichnen wir sie $y_0(x)$. Daraus folgt, dass es genügt $u(x) \quad |y_0(x)|$ für $x \in I$ zu setzen.

Hinreichende Bedingung. Es sei $u(x) \in C^2(I)$ mit den Eigenschaften $\mathscr{L}_2[u] \leq$ $\leqq 0$, $u(x) > 0$ für $x \in I$. Setzen wir $y(x) - u(x)\,Y(x)$. Dann ist $Y(x)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$(8) \qquad uY'' + (2u' + p(x)u)\,Y' + \mathscr{L}_2[u]\,Y - 0, \quad x \in I.$$

Da $u^{-1}\mathscr{L}_2[u] \leqq 0$ für $x \in I$ ist, ist die Differentialgleichung (8) im Intervall I nichtoszillatorisch (siehe [3]). Aus dem Zusammenhang zwichen den Lösungen der Differentialgleichungen (7) und (8) geht hervor, dass auch die Differentialgleichung $\mathscr{L}_2[y] = 0$ im Intervall I nichtoszillatorisch ist.

2. Satz 1. *Es existiere die Lösung $\bar{y}(x)$ der Differentialgleichung $L[y] = 0$ mit der Eigenschaft $\bar{y}(x) > 0$, $\bar{y}'(x) > 0$ (< 0) für $x \in I$ und dabei sei $p_3(x) \geqq 0$ (< 0) für $x \in \mathscr{I}$. Dann ist die lineare Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch.*

Beweis. Es sei $\bar{y}(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $L[y] - 0$ mit der Eigenschaft $\bar{y}(x) > 0$, $\bar{y}'(x) > 0$ (< 0) für $x \in I$. Im Intervall I gilt dann

$$(9) \qquad \Big(e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\,d\eta} L[y] \equiv \Big)\, \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\,d\eta}}{\bar{y}(x)}\, v'\right) + \frac{e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\,d\eta}}{\bar{y}(x)}\left(p_2(x) + \frac{\bar{y}''(x)}{\bar{y}(x)}\right) v = 0,$$

wo $v(x) \quad \bar{y}^2\, d/dx\; y/y$ und $y(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $L(y) - 0$ ist

Setzen wir jetzt in der Differentialgleichung (9) $v(x) = \bar{y}'(x) \operatorname{sgn} \bar{y}'(x)$. Für $x \in I$ erhalten wir dann

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{\int_{0}^{x} p_1(\eta)\,d\eta}}{\bar{y}}\; \bar{y}'' \operatorname{sgn} \bar{y}'(x)\right) + \frac{e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\,d\eta}}{\bar{y}}\left(p_2(x) + \frac{\bar{y}''}{\bar{y}}\right) \bar{y} \operatorname{sgn} \bar{y}'(x)$$

$$= \frac{\bar{y}''' \quad p_1(x)\bar{y}'' + p_2(x)\bar{y}'}{\bar{y}}\, e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\,d\eta} \operatorname{sgn} \bar{y}'(x) = -p_3(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\,d\eta} \operatorname{sgn} \bar{y}'(x) \leqq 0,$$

da nach der Voraussetzung $p_3(x) \operatorname{sgn} \bar{y}'(x) \geqq 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ ist. Deshalb ist die Differentialgleichung (9) auf Grund des Lemma 3 in Intervall I nichtoszillatorisch. Das bedeutet aber, dass der Differentialausdruck auf der linken Seite von (9) in ein Produkt von zwei linearen Differentialausdrücke erster Ordnung (siehe [4]) zerlegbar ist und der Differentialausdruck $L[y]$ ist also in ein Produkt von drei linearen Differentialausdrücken erster Ordnung im

Intervall I zerlegbar. Auf Grund der Folgerung 3 des Satzes 1 [1] folgt daraus, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch ist.

Satz 1'. *Es sei* $p_3(x) \geqq 0$ $(\leqq 0)$ *für* $x \in \mathscr{I}$. *Dann ist die notwendige Bedingung dazu, dass die Lösung* $\bar{y}(x)$ *der Differentialgleichung* $L[y] = 0$ *mit der Eigenschaft* $\bar{y}(x) > 0$, $\bar{y}'(x) > 0$ (< 0) *in* I *existiere, dass die Differentialgleichung*

$$L_2[u] \equiv u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u = 0$$

im Intervall $\mathscr{I}$ *nichtoszillatorisch sei.*

Beweis. Es sei $p_3(x) \geqq 0$ $(\leqq 0)$ für $x \in \mathscr{I}$ und $\bar{y}(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $L[y] = 0$ mit der Eigenschaft $\bar{y}(x) > 0$, $\bar{y}'(x) >$ (< 0) in I. Dann ist

$$L_2[\bar{y}'] = -p_3(x)\bar{y} \leqq 0$$

$$(L_2[-\bar{y}'] = p_3(x)\bar{y} \leqq 0)$$

für $x \in I$. Laut Lemma 3 ist daher die Differentialgleichung $L_2[u]$ 0 in I nichtoszillatorisch.

Es ist leicht zu zeigen (auf Grund dessen, dass die linear unabhängingen Lösungen von $L_2[u] = 0$ ihre Nullstellen separieren), dass dann die Differentialgleichung $L_2[u] = 0$ in $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch ist.

Satz 2. *Es sei* l *eine der Zahlen* 1, 2, 3 *und die Differentialgleichung* $L[y]$ 0 *sei aus der Klasse* $\mathscr{A}_l^+(\mathscr{I})$. *Wenn dabei* $(x - x_0)p_3(x) \geqq 0$ *für* $x \in \mathscr{I}$ *ist, dann ist die Differentialgleichung* $L[y] = 0$ *im Intervall* $\mathscr{I}$ *nichtoszillatorisch.*

Beweis. Es sei $y_1(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ mit der Eigenschaft $y_1(x_0) = y_1'(x_0) = 0$, $y_1''(x_0) = 1$. Wir zeigen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen $y_1(x) > 0$ und $(x - x_0)y_1'(x) > 0$ für $x \in I$ ist.

Da $(x - x_0)p_3(x) \geqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$ ist, auf Grund des Satzes 1 wird damit gezeigt, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch ist.

Mit Rücksicht darauf, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ aus der Klasse $\mathscr{A}_l^+(\mathscr{I})$ ist, und mit Rücksicht darauf, dass $(x - x_0)^l P_l(x, 0, 0, 1) \geqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$ ist (siehe [2]), haben wir laut Lemma 1 für die Lösung $y_1^{(l)}$ der Integralgleichung (1) im Intervall $\mathscr{I}$

$$(x - x_0)^l y_1^{(l)}(x) \geqq (x - x_0)^l P_l(x, 0, 0, 1) \geqq 0.$$

Aus dieser letzten Ungleichheit und daraus, dass $(x - x_0)P_1(x, 0, 0, 1) > 0$ für $x \in I$ ist, wenn $l = 1$ ist, folgt, dass $(x - x_0)y_1'(x) > 0$ und $y_1(x) > 0$ im Intervall I ist.

Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Satz 3. *Es sei l eine der Zahlen* 1, 2. *Die Differentialgleichung* $L[y] = 0$ *sei aus der Klasse* $\mathscr{A}_l^-(\mathscr{I})$ *und im Intervall* I *sei*

$$(x - x_0)\varphi_1(x, 0, 0, 1) > 0, \quad \text{wenn} \quad l = 1;$$

$$\varphi_2(x, 0, 0, 1) \geqq 0, \qquad \text{wenn} \quad l = 2.$$

Wenn dabei $(x - x_0)p_3(x) \geqq 0$ *für* $x \in \mathscr{I}$ *ist, dann ist die Differentialgleichung* $L\ y]\quad 0$ *im Intervall* $\mathscr{I}$ *nichtoszillatorisch.*

Beweis. Es sei $y_1(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ mit der Eigenschaft $y_1(x_0) = y_1'(x_0) = 0$, $y_1''(x_0) = 1$. Wir zeigen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen $y_1(x) > 0$, $(x - x_0)y_1'(x) > 0$ für $x \in I$ ist. Da $(x - x_0)p_3(x) \geqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$ ist, auf Grund des Satzes 1 wird damit gezeigt, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch ist.

Da die Differentialgleichung $L[y] = 0$ aus der Klasse $\mathscr{A}_l^-(\mathscr{I})$ ist und mit Rucksicht auf die Voraussetzung über die Funktion $\varphi_l(x, 0, 0, 1)$ erhalten wir für die Lösung $y_1^{(l)}(x)$ der Integralgleichung (1) im Intervall I laut Lemma 2

$$(x - x_0)y_1'(x) \geqq (x - x_0)\varphi_1(x, 0, 0, 1) > 0, \quad \text{wenn} \quad l = 1;$$

$$y_1''(x) \geqq \varphi_2(x, 0, 0, 1) \geqq 0,$$

woraus

$$(x - x_0)y_1'(x) \geqq (x - x_0)\int_{x_0}^{x} \varphi_2(t, 0, 0, 1)\,\mathrm{d}t \geqq 0, \quad \text{wenn } l \quad\ 2;$$

ist. Auch im Falle $l - 2$ ist $(x - x_0)y_1'(x) > 0$ für $x \in I$. Dies folgt daraus, dass $\varphi_2(x_0, 0, 0, 1) \quad 1$. Da $(x - x_0)y_1'(x) > 0$ für $x \in I$ ist, ist im Intervall I $y_1(\ ) > 0$.

Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Satz 4. *Es seien* $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ *stetige Funktionen im Intervall* $\langle x_0, \infty)$ $((\quad \infty, x_0\ )$. *Die Funktion*

$$\int_t^{\xi} p_1(\eta)\,\mathrm{d}\eta$$

sei von oben begrenzt für $\zeta, t \in < x_0, \infty)$, $\zeta \geqq t$ $(\zeta, t \in (- \infty, x_0\ , \zeta \leqq t)$ *und die Funktion* $p_3(x)$ *sei nichtnegativ in irgendeiner Umgebung des Punktes* ∞ *(ni htpositiv in irgendeiner Umgebung des Punktes* $- \infty$).

Weiter sei

$$\int_{x_0}^{\infty} \zeta\,|p_2(\zeta)|\,\mathrm{d}\zeta < \infty, \quad \int_{x_0}^{\infty} \zeta^2 p_3(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta < \infty$$

$$(\int_{-\infty}^{x_0} \zeta\, |p_2(\zeta)|\, \mathrm{d}\zeta > -\infty, \quad \int_{-\infty}^{x_0} \zeta^2 p_3(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta > -\infty).$$

Dann hat jede nichttriviale Lösung der linearen Differentialgleichung $L[y] \quad 0$ *im Intervall* $\langle x_0, \infty)$ $((-\infty, x_0\rangle)$ *eine endliche Menge von Nullstellen.*

Beweis. Daraus, dass die Funktion

$$\int_t^\zeta p_1(\eta)\, \mathrm{d}\eta$$

für $\zeta, t \in \langle x_0, \infty)$, $\zeta \geqq t$ von oben begrenzt ist, folgt, dass eine solche Konstante K existiert, dass für alle $\zeta, t \in \langle x_0, \infty)$, $\zeta \geqq t$

$$e^{\int_t^\zeta p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} \leqq K \tag{10}$$

ist.

Weiter, mit Rücksicht darauf, dass

$$\int_{x_0}^{\infty} \zeta\, |p_2(\zeta)|\, \mathrm{d}\zeta < \infty, \quad \int_{x_0}^{\infty} \zeta^2 p_3(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta < \infty$$

ist, folgt, dass eine solche positive Zahl c, $c \in \langle x_0, \infty)$ existiert, dass die Ungleichheit.

$$K \int_c^\infty \left[\zeta \; p_2(\zeta)| + \frac{1}{2}\zeta^2 p_3(\zeta)\right] \mathrm{d}\zeta < \frac{1}{2} \tag{11}$$

gilt. Dabei können wir ein so genügend grosses c voraussetzen, dass auch $p_3(x) \geqq 0$ für $x \geqq c$ ist.

Es sei $y_1(x)$ die Lösung der linearen Differentialgleichung $L[y] - 0$ mit der Eigenschaft $y_1(c) = y_1'(c) = 0$, $y_1''(c) = 1$. Um zu beweisen, dass jede nichttriviale Lösung der linearen Differentialgleichung $L[y] - 0$ im Intervall $x_0, \infty)$ eine endliche Anzahl von Nullstellen hat, genügt es zu zeigen, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\langle c, \infty)$ nichtoszillatorisch ist. Auf Grund des Satzes 1 genügt es zu diesem Zweck zu zeigen, dass $y_1'(x) > 0$, $y_1(x) > 0$ für $x \in (c, \infty)$ ist.

Die Funktion

$$Y_1(x) = y_1''(x) e^{\int_c^t p_1(\eta)\mathrm{d}\eta}$$

ist im Intervall $\langle c, \infty)$ die Lösung der Integralgleichung

$$Y(x) = 1 - \int_c^x \{ \int_t^x [p_2(\zeta) + (\zeta - t) p_3(\zeta)] e^{\int_t^\zeta p_1(\eta)\mathrm{d}\eta}\, \mathrm{d}\zeta \} Y(t)\, \mathrm{d}t \tag{12}$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir für ihre Lösung $Y_1(x)$

$$|Y_1(x)| \leqq 1 + \int_c^x \{\int_t^x [|p_2(\zeta)| + (\zeta - t)p_3(\zeta)] e^{\int_t^\zeta p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} \mathrm{d}\zeta\} |Y_1(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Setzen wir

$$\overline{Y}_1(x) = \max_{t \in \langle c, x \rangle} |Y_1(t)| .$$

Aus der letzten Ungleichheit und aus den Ungleichheiten (10), (11) haben wir dann

$$|Y_1(x)| \leqq 1 + K\overline{Y}_1(x) \int_c^x \{\int_t^\zeta |p_2(\zeta)| + (\zeta - t)p_3(\zeta)] \,\mathrm{d}\zeta\} \,\mathrm{d}t$$

$$1 + K\overline{Y}_1(x) \int_c^x [|p_2(\zeta)| \int_c^\zeta \mathrm{d}t + p_3(\zeta) \int_c^\zeta (\zeta - t) \,\mathrm{d}t] \,\mathrm{d}\zeta \leqq$$

$$\leqq 1 + K\overline{Y}_1(x) \int_c^\infty \zeta|p_2(\zeta)| + \tfrac{1}{2}\zeta^2 p_3(\zeta)] \,\mathrm{d}\zeta < 1 + \tfrac{1}{2}\overline{Y}_1(x).$$

Daraus erhalten wir

$$\overline{Y}_1(x) < 1 + \tfrac{1}{2}\overline{Y}_1(x),$$

woraus

$$\overline{Y}_1(x) < 2$$

folgt d. h. $|Y_1(x)| < 2$ für $x \geqq c$.
Aus der Integralgleichung (12) haben wir weiter für ihre Lösung $Y_1(x)$

$$Y_1(x) \geqq 1 - \int_c^x \{\int_t^x [|p_2(\zeta)| + (\zeta - t)p_3(\zeta)] e^{\int_t^\zeta p(\eta)\mathrm{d}\eta} \mathrm{d}\zeta\} |Y_1(t)| \, \mathrm{d}t$$

woher mit Rücksicht auf die Begrenzung $|Y_1(x)|$ und die Ungleichheit (11) ist

$$|Y_1(x)| \geqq 1 - 2K \int_c^\infty [\zeta \, |p_2(\zeta)| + \tfrac{1}{2}\zeta^2 p_3(\zeta)] \,\mathrm{d}\zeta > 0$$

für $x > c$. Das bedeutet aber, dass $y_1''(x) \neq 0$ in $\langle c, \infty)$ ist.

Da $y_1''(c) = 1$ ist, ist $y_1''(x) > 0$ für $x \in \langle c, \infty)$. Daraus geht hervor, dass $y_1'(x) > y_1'(c) = 0$, woraus $y_1(x) > y_1(c) = 0$.

Also sind $y_1'(x)$ und $y_1(x)$ in (c, ∞) positiv.

Im anderen Fall wird der Beweis ähnlich durchgeführt.
Damit ist der Beweis beendet.

Bemerkung. Die Voraussetzung über die Funktionen

$$\int_t^\zeta p_1(\eta)\,\mathrm{d}\eta$$

$\zeta, t \in \langle x_0, \infty)$, $\zeta \geqq t$ ($\zeta, t \in (-\infty, x_0\rangle$, $\zeta \leqq t$) kann im Satze 4 z. B. mit einer der folgenden Voraussetzungen

1. $(x - c)p_1(x) \leqq 0$ in (c, ∞), $c \geqq x_0$ $((-\infty, c), c \leqq x_0)$;

2. $\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\,\mathrm{d}\eta$ ist eine begrenzte Funktion in $\langle x_0, \infty)$ $((-\infty, x_0\ )$;

3. $\left|\int_{x_0}^{\infty} p_1(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right| < +\infty$ $\left(\left|\int_{-\infty}^{x_0} p_1(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right| < +\infty\right)$;

ersetzt werden.

Folgerung. *Es seien $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ stetige Funktionen im Intervall $(-\infty, \infty)$ und die Funktion $p_3(x)$ sei nichtnegativ in irgendeiner Umgebung des Punktes ∞, nichtpositiv in irgendeiner Umgebung des Punktes $-\infty$. Wenn dabei*

$$\int_t^\zeta p_1(\eta)\,\mathrm{d}\eta \leqq m$$

für $\zeta \geqq t \geqq 0$ und $\zeta \leqq t \leqq 0$, wo m eine Zahl ist und

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \zeta |p_2(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta\right| < \infty, \quad \left|\int_{\infty}^{\infty} \zeta^2 p_3(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\ < \infty,\right.$$

dann hat jede nichttriviale Lösung der linearen Differentialgleichung $L[y]\quad 0$ im Intervall $(-\infty, \infty)$ eine endliche Anzahl von Nullstellen.

Satz 5. *Die Differentialgleichung $L[y] = 0$ sei aus der Klasse $\mathscr{A}_3(\mathscr{I})$. Wenn dabei $(x - x_0)\varphi_3(x, 0, 0, 1) \leqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$ ist und die Funktion*

$$(x\quad x_0)^2 + \int_{x_0}^{x} (x - t)^2 \varphi_3(t, 0, 0, 1)\,\mathrm{d}t$$

im Intervall I eine Nullstelle hat, dann ist die lineare Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ oszillatorisch.

Beweis. $y_1(x)$ sei die Lösung der Differentialgleichung $L[y]\quad 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ mit der Eigenschaft $y_1(x_0) = y_1'(x_0) - 0$, $y_1''(x_0) = 1$. Zeigen wir, dass $y_1(x)$ im Intervall I eine weitere Nullstelle hat. Damit wird bewiesen sein, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ oszillatorisch ist. Da die Differentialgleichung $L\,[y] = 0$ aus der Klasse $\mathscr{A}_3^-(\mathscr{I})$ und $(x - x_0)\varphi_3(x, 0, 0, 1) \leqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$ ist, haben wir gemäss Lemma 2 für die Lösung $y_1'''(x)$ der Integralgleichung (1) ($l = 3$) im Intervall $\mathscr{I}$

$$(x - x_0)y_1'''(x) \leqq (x - x_0)\varphi_3(x, 0, 0, 1),$$

d u aus

$$y_1(x) \leqq \frac{(x - x_0)^2}{2} + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^2}{2} \cdot \varphi_3(t, 0, 0, 1)\, \mathrm{d}t = \varphi(x)$$

folgt.

Aus den Anfangsbedingungen, welche $y_1(x)$ in der Zahl x_0 erfüllt, folgt die Existenz einer solchen Umgebung U_{x_0} der Zahl x_0, dass für $x \in U_{x_0} \cap I$ $y_1(x) > 0$ ist. Hat daher die Funktion $\varphi(x)$ im Intervall I eine Nullstelle, folgt aus der Ungleichheit $y_1(x) \leqq \varphi(x)$, dass auch $y_1(x)$ im Intervall I eine Nullstelle had. Das heisst aber, dass die Differentialgleichung $L[y] - 0$ ii 1 Intervall $\mathscr{I}$ oszillatorisch ist.

3. Es sei $\bar{z}(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $M[z] = 0$, welche im Intervall I positiv ist. In diesem Intervall I gilt dann (siehe [1])

$$(13) \qquad M[z] \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta}}{\bar{z}(x)}\,\varrho'\right) + \frac{e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta}}{\bar{z}(x)}\, q(x, \bar{z})\varrho \equiv \frac{e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta}}{\bar{z}^2(x)}\, F(\varrho, \bar{z})$$

u d

$$(14) \qquad M_1[v] \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\nu'}{v(x)}\right) + \frac{s(x, v)}{v(x)}\,\nu = \frac{1}{v^2(x)}\, F_1(\nu, v),$$

wo

$$\cdot(x) \quad z(x)e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta}, \quad \varrho - \bar{z}^2(x)e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta}\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{z}{\bar{z}}, \quad \nu = \bar{v}^2(x)e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta}\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{v}{v},$$

$q(\ , z) \quad p_2(x) + \dfrac{(\bar{z}' - p_1(x)\bar{z})'}{\bar{z}}$ und $s(x, v) \quad p_2(x) \quad \dfrac{v'' + p_1(x)v'}{v}$. Da $\bar{z}(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $M[z] \quad 0$ und $v(x)$ die Lösung der Differe tialgleichung $M_1[v] = 0$ ist, ist es möglich die Funktion $q(x, \bar{z})$ und die Funktion $s(x, v)$ derart auszudrücken

$$(15) \qquad q(x, \bar{z}) \quad \frac{((\bar{z}' - p_1(x)\bar{z})' + p_2(x)\bar{z})_{x\ x_0}}{\bar{z}(x)} + \frac{1}{\bar{z}(x)} \int\limits_{x_0}^{x} p_3(t)\bar{z}(t)\, \mathrm{d}t;$$

$$(16) \qquad s(x, \bar{v}) = \frac{e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} (L_2[\bar{v}])_{x=x_0}}{v(x)} + \frac{e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta}}{v(x)} \int\limits_{x_0}^{x} p_3(t) e^{\int\limits_{x_0}^{t} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} v(t)\,\mathrm{d}t$$

für $x \in I$.

Satz 6. *Es existiere die Lösung $\bar{z}(x)$ ($v(x)$ der Differentialgleichung $M[z]$ 0 ($M_1[v] = 0$) mit der Eigenschaft $((\bar{z}' - p_1(x)\bar{z})' + p_2(x)\bar{z})_{x-x_0} \leqq 0$, $\bar{z}(x) > 0$ $((L_2[\bar{v}])_{x=x_0} \leqq 0$, $\bar{v}(x) > 0)$ für $x \in I$ und dabei sei $(x - x_0)p_3(x) \leqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$, dann ist die lineare Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen über die Lösung $\bar{z}(x)$ ($v(x)$) und daraus, dass $(x - x_0)\, p_3(x) \leqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$ ist, folgt, dass $q(x, \bar{z}) \leqq 0$ ($s(x, v) \leqq 0$) im Intervall I ist. Aus dieser Tatsache folgt, dass die Differentialgleichung $F(\varrho, \bar{z}) = 0$ ($F_1(\nu, v) = 0$) im Intervall I nichtoszillatorisch ist. Gemäss dem Satz 1 [1] ist deshalb die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nicl t-oszillatorisch.

Satz 6'. *Es sei $(x - x_0)\, p_3(x) \leqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$. Dann ist die notwendige B dingung dazu, dass die Lösung $\bar{v}(x)$ $[\bar{z}(x)]$ des Differentialgleichung $M_1[v] - 0$ $[M[z] = 0]$ mit der Eigenschaft $(L_2[\bar{v}])_{x\ x_0} \leqq 0$, $v(x) > 0$ $[((\bar{z}' - p_1(x)\bar{z}$ $+ p_2(x)\bar{z})_{x-x_0} \leqq 0, \bar{z}(x) > 0]$ für $x \in I$ existiere, dass die Differentialgleich ıng*

$$(16') \qquad L_2[v] \equiv v'' + p_1(x)v' + p_2(x)v = 0$$

$$(16'') \qquad [(z' - p_1(x)z)' + p_2(x)z = 0]$$

im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch sei.

Beweis. Wir beweisen nur den ersten Fall. Der zweite Fall folgt aus d m Zusammenhang zwischen den Lösungen der Differentialgleichungen (16') und (16'') $(z = v \exp \int\limits_{x_0}^{x} p_1(\eta)\,\mathrm{d}\eta)$; zwischen den Lösungen der Differentialgleichungen $M_1[v] = 0$ und $M[z] = 0$ ist derselbe Zusammenhang.

Es sei $(x - x_0)p_3(x) \leqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$ und $\bar{v}(x)$ sei die Lösung der Differentialgleichung $M_1[v] = 0$ mit der Eigenschaft $(L_2[v])_{x=x_0} \leqq 0$, $v(x) > 0$ in I. Durch das Integrieren der Gleicheit $M_1[\bar{v}] = 0$ von x_0 bis x für den Differentialausdruck $L_2[\bar{v}]$ im Intervall I erhalten wir dann

$$L_2[v] = (L_2[v])_{x-x_0}\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} + \int\limits_{x_0}^{x} p_3(t)\, e^{\int\limits_{x}^{t} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} v(t)\,\mathrm{d}t \leq 0.$$

Laut Lemma 3 ist daher die Differentialgleichung (16') in I nichtoszillatorisch und also ist sie nichtoszillatorisch auch in $\mathscr{I}$ (siehe den Beweis des Satzes 1').

Satz 7. *Es sei l eine der Zahlen* 0, 1, 2 *und die Differentialgleichung* $M[z] = 0$ ($M_1[v] = 0$) *sei aus der Klasse* $\mathscr{B}_l^+(\mathscr{I})$ ($\mathscr{C}_l^+(\mathscr{I})$). *Wenn dabei* $(x - x_0)p_3(x) \leqq 0$ *für* $x \in \mathscr{I}$ *ist, dann ist die lineare Differentialgleichung* $L[y] = 0$ *im Intervall* $\mathscr{I}$ *nichtoszillatorisch.*

Beweis. Den Beweis dieses Satzes führen wir nur für den Fall der Differentialgleichung $M[z] = 0$ durch. Im Falle der Differentialgleichung $M_1[v] = 0$ wird der Beweis ähnlicherweise fertig gebracht. Mit Rücksicht darauf, dass $(x - x_0)p_3(x) \leqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$ ist, auf Grund des Satzes 6 genügt es die Existenz der Lösung $\bar{z}(x)$ der Differentialgleichung $M[z] = 0$ mit der Eigenschaft $((\bar{z}' - p_1(x)\bar{z})' + p_2(x)\bar{z})_{x=x_0} = 0$, $\bar{z}(x) > 0$ für $x \in I$ zu zeigen.

Es sei $\bar{z}(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $M[z] = 0$, welche in der Zahl x_0 folgende Anfangsbedingungen erfüllt:

$$\bar{z}(x_0) = ((\bar{z}' - p_1(x)\bar{z})' + p_2(x)\bar{z})_{x=x_0} = 0, \quad \varepsilon\bar{z}'(x_0) = 1;$$

wobei $\varepsilon = 1$ wenn $\mathscr{I} = \langle x_0, b)$; $\varepsilon = -1$ wenn $\mathscr{I} = (a, x_0\rangle$ und die Differentialgleichung $M[z] = 0$ sei aus der Klasse $\mathscr{B}_l^+(\mathscr{I})$, $0 \leqq l \leqq 2$. Wir zeigen, dass die Lösung $\bar{z}(x)$ im Intervall I positiv ist.

Aus dem Ausdruck der Funktion $Q_l(x, 0, \varepsilon, 0)$ $(Q_2(x, 0, \varepsilon, 0) = \varepsilon B_2(x, x_0))$ (siehe [2]) folgt, dass $(x - x_0)^l Q_l(x, 0, \varepsilon, 0) \geqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$ ist. Deshalb haben wir nach Lemma 1 für die Lösung $\bar{z}^{(l)}(x)$ der Integralgleichung (2) im Intervall I $(x - x_0)^l\bar{z}^{(l)}(x) \geqq (x - x_0)^l Q_l(x, 0, \varepsilon, 0)$, wobei $Q_0(x, 0, \varepsilon, 0) > 0$ für $x \in I$ im Falle $l = 0$ ist. Aus diesen Tatsachen folgt, dass $\bar{z}(x) > 0$ für $x \in I$ ist. Damit ist der Beweis beendet.

Satz 8. *Es seien* $p_3(x), p_2'(x), p_1''(x)$ *stetige Funktionen im Intervall* $\mathscr{I}$. *Es sei* $(x - x_0)p_1(x) \geqq 0$, $(x - x_0)p_3(x) \leqq 0$ *für* $x \in \mathscr{I}$ *und im Intervall* $\mathscr{I}$ *gelte einer der folgenden Fälle:*

a) $$2p_1'(x) - p_2(x) \geqq 0, \quad (x - x_0)\,(p_3(x) - p_2'(x) + p_1''(x)) \geqq 0;$$

b) $$(x - x_0)\,(p_3(x) - p_2'(x) + p_1''(x)) \leqq 0,$$

$$2p_1'(x) - p_2(x) + (x - x_0)\,(p_3(x) - p_2'(x) + p_1''(x)) \geqq 0;$$

c) $$2p_1(x)(p_3(x) - p_2'(x) + p_1''(x)) \geqq (2p_1'(x) - p_2(x))^2,$$

$$2p_1'(x) - p_2(x) + (x - x_0)\,(p_3(x) - p_2'(x) + p_1''(x)) \geqq 0.$$

Dann ist die Differentialgleichung $L[y] = 0$ *intervall* $\mathscr{I}$ *nichtoszillatorisch.*

Beweis. Den Beweis führen wir nur für einen der gegebenen Fälle durch. In den anderen Fällen ist die Beweisführung ähnlich. Es sei $\mathscr{I} = \langle x_0, b)$ und

$$p_1(x) \geqq 0, \quad 2p_1(x)\,(p_1''(x) - p_2'(x) + p_3(x)) \geqq (2p_1'(x) - p_2(x))^2,$$

$$2p_1'(x) - p_2(x) + (x - x_0)\,(p_3(x) - p_2'(x) + p_1''(x)) \geqq 0, \quad p_3(x) \leqq 0$$

für $x \in \mathscr{I}$.

Mit Rücksicht darauf, dass $p_3(x) \leqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$ ist, genügt es auf Grund des Satzes 6 die Existenz der Lösung $\bar{z}(x)$ der Differentialgleichung $M[z] \quad 0$ mit der Eigenschaft $((\bar{z}' - p_1(x)\bar{z})' + p_2(x)\bar{z})_{x-x_0} = 0$, $\bar{z}(x) > 0$ für $x \in I$ zu zeigen.

Es sei $\bar{z}(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $M[z] = 0$, welche in der Zahl x_0 folgende Anfangsbedingungen erfüllt: $\bar{z}(x_0) = ((\bar{z}' - p_1(x)\bar{z})' + p_2(x)\bar{z})_{x=x_0} = 0$, $\bar{z}'(x_0) = 1$. Wir zeigen, dass diese Lösung unter den erwähnten Voraussetzungen im Intervall I positiv ist. Zu diesem Zweck genügt es zu zeigen, dass die Differentialgleichung $M[z] = 0$ aus der Klasse $\mathscr{B}_3^+(\mathscr{I})$ ist und $Q_3(x, 0, 1, 0) \geqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$ ist. Laut Lemma 1 ist dann $\bar{z}'''(x \geq \geqq Q_3(x, 0, 1, 0) \geqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$ und mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen, welche die Lösung $\bar{z}(x)$ in der Zahl x_0 erfüllt, folgt daraus $\bar{z}(x) > 0$ für $x \quad I$. Aus der Form des Kernes $B_3(x, t)$ (siehe [2]) der Integralgleichung (2) ($l \quad 3$)

$$B_3(x, t) = p_1(x) + \frac{x - t}{1}\,(2p_1'(x) - p_2(x)) + \frac{(x - t)^2}{2}\,(p_3(x) - p_2'(x) + p_1''(x\ )$$

ist ersichtlich, dass mit Rücksicht auf $x - t$, $B_3(x, t)$ ein Polynom zweit n Grades bei jedem festen $x \in \mathscr{I}$ ist. Da $B_3(x, x) = p_1(x) \geqq 0$ und $(2p_1'(x) - p_2(x))^2 \leqq 2p_1(x)\,(p_3(x) - p_2'(x) + p_1''(x))$ auf dem Intervall $\mathscr{I}$ ist, ist $B_3(x, t) \geqq 0$ für $x, t \in \mathscr{I}$ d. h. die Differentialgleichung $M[z] = 0$ ist aus der Klasse $\mathscr{B}_3^+(\mathscr{I})$. Wir zeigen jetzt, dass $Q_3(x, 0, 1, 0) \geqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$ ist. Mit Rücksicht darauf, dass $\bar{z}(x_0) = 0$, $\bar{z}'(x_0) = 1$, $\bar{z}''(x_0) = p_1(x_0)$ ist, ist es möglich $Q_3(x, 0, 1, 0)$ in folgenden Form zu schreiben:

$$Q_3(x, 0, 1, 0) =$$

$$= p_1(x_0)B_3(x, x_0) + 2p_1'(x) - p_2(x) + (x - x_0)\,(p_3(x) - p_2'(x) + p_1''(x))$$

(siehe [2]). Da

$$p_1(x_0) \geqq 0, \ B_3(x, x_0) \geqq 0, \ 2p_1'(x) - p_2(x) + (x - x_0)\,(p_3(x) - p_2'(x) +$$

$$+ p_1''(x_0) \geqq 0,$$

für $x \in \mathscr{I}$ ist, ist im Intervall $\mathscr{I} \quad Q_3(x, 0, 1, 0) \geqq 0$.

Damit ist der Beweis bebendet.

Satz 9. *Es sei l eine der Zahlen* 0,1. *Die Differentialgleichung* $M[z] - 0$ ($M_1[v] = 0$) *sei aus der Klasse* $\mathscr{B}_l^-(\mathscr{I})$ ($\mathscr{C}_l^-(\mathscr{I})$) *und im Intervall I sei*

$$\psi_0(x, 0, \varepsilon, 0) > 0 \ \ (\chi_0(x, 0, \varepsilon, -\varepsilon p_1(x_0)) > 0), \ \text{wenn } l = 0;$$

$(x \quad x_0)\psi_1(x, 0, \varepsilon, 0) \geqq 0$ $((x - x_0)\chi_1(x, 0, \varepsilon, -\varepsilon p_1(x_0)) \geqq 0)$, wenn $l = 1$;

wobei $\varepsilon - 1$ *für* $\mathscr{I} = \langle x_0, b)$ *und* $\varepsilon = -1$ *für* $\mathscr{I} = (a, x_0\rangle$. *Wenn hiebei* $(x \quad x_0)p_3(x) \leqq 0$ *ist, dann ist die lineare Differentialgleichung* $L[y] \quad 0$ *im Intervall* $\mathscr{I}$ *nichtoszillatorisch.*

Der Beweis dieses Satzes wird ähnlich wie jener des Satzes 7 durchgeführt, nur mit dem Unterschied, dass man das Lemma 2 verwendet.

Satz 10. *Die Differentialgleichung* $M[z] = 0$ $(M_1[v] = 0)$ *sei aus der Klasse* $\mathscr{B}_3(\mathscr{I})$ $(\mathscr{C}_3^-(\mathscr{I}))$. *Wenn dabei* $(x - x_0)\psi_3(x, 0, 0, 1) \leqq 0$ $((x - x_0)\chi_3(x, 0, 0, 1) \leqq$ $< 0)$ *für* $x \in \mathscr{I}$ *ist und die Funktion*

$$(x - x_0)^2 + \int_{x_0}^{x} (x - t)^2\psi_3(t, 0, 0, 1)\, \mathrm{d}t$$

$$((x - x_0)^2 + \int_{x_0}^{x} (x - t)^2\chi_3(t\ 0, 0, 1)\, \mathrm{d}t)$$

im Intervall I eine Nullstelle hat, dann ist die lineare Differentialgleichung $L[y] \quad 0$ *im Intervall* $\mathscr{I}$ *oszillatorisch.*

Beweis. Wir können auf ähnliche Weise, wie wir den Satz 5 bewiesen haben, zeigen, dass die Lösung $z_1(x)$ $(v_1(x)$ mit der Eigenschaft $z_1(x_0) = z_1'(x_0) = = 0, \quad (z_1' - p_1(x)z_1)_{x\ x_0}' = 1 \quad (v_1(x_0) = v_1'(x_0) = 0, \quad v_1''(x_0) = 1)$ in der Zahl $\bar{x} \in I$ eine Nullstelle hat. Dann existiert gemäss Lemma 2 [1] eine nichttriviale Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $L[y] = 0$ mit der Eigenschaft $y(x_0) \quad y(\bar{x}) - y'(\bar{x}) = 0$, was die Bedeutung hat, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ oszillatorisch ist.

Bemerkung. Es seien $p_3(x), p_2'(x), p_1''(x)$ $[p_2'(x), p_1'(x), p_3(x)]$ stetige Funktionen im Intervall $\mathscr{I}$. Dann können wir die Differentialgleichung $M[z] \quad 0$ $[M_1[v] \quad 0]$ in der Form

$$M[z] \equiv z''' - p_1(x)z'' + (p_2(x) - 2p_1'(x))z' + \\ + (p_2'(x) - p_1''(x) - p_3(x))z = 0 \tag{17}$$

$$[M_1[v] \equiv v''' + 2p_1(x)v'' + (p_2(x) + p_1'(x) + p_1^2(x))v' + \\ + (p_2'(x) + p_1(x)p_2(x) - p_3(x))v - 0] \tag{18}$$

und die Differentialgleichung $L[y] = 0$ in der Form

$$L[y] \equiv \{(y' + p_1(x)y)' + (p_2(x) - 2p_1'(x))y\}' + \\ + (p_3(x) - p_2'(x) + p_1''(x))\, y = 0 \tag{19}$$

oder

$$L[y] \equiv \{(y'' + \tfrac{1}{2}p_1(x)y' + (p_2(x) - \tfrac{1}{2}p_1'(x) - \tfrac{1}{4}p_1^2(x))y)e^{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta}\}' + \tag{20}$$