Ján Pidany

Об одном способе номографирования системы четырех уравнений частного вида

Matematický časopis, Vol. 18 (1968), No. 2, 113--120

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126762`

Matematický časopis 18 (1968), No. 2

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ НОМОГРАФИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ЧЕТЫРЕХ УРАВНЕНИЙ ЧАСТНОГО ВИДА

ЯН ПИДАНЫ (JÁN PIDANY), Кошице

В работе Г. С. Хованского [2] показан способ построения номограмм с прозрачным ориентированным транспарантом для основной канонической формы системы уравнений

$$f_{1,2} - f_{7,8} = f_{3,4} - f_{9,10} = f_{5,6} - f_{11,12}, \tag{1}$$
$$g_{1,2} - g_{7,8} = g_{3,4} - g_{9,10} = g_{5,6} - g_{11,12},$$

где $f_{i,k} = f(x_i, x_k)$, $g_{i,k} = g(x_i, x_k)$ и также для частных случаев (1), обладающих дополнительными возможностями преобразования номограмм.

Таким частным случаем является система уравнений

$$A_{1,2} + A_{3,4} = A_{6,7} - A_{3,5} = A_{8,9} - A_{3,10}, \tag{2}$$
$$B_{1,2} = B_{6,7} = B_{8,9},$$

допускающая введения в уравнения элементов номограммы четырех произвольных функций, так как она может быть записана в виде

$$A_{1,2} + P(B_{1,2}) - (T_3 - A_{3,4}) = A_{6,7} + P(B_{6,7}) - \tag{3}$$
$$- (A_{3,5} + T_3) = A_{8,9} + P(B_{8,9}) - (A_{3,10} + T_3),$$
$$Q(B_{1,2}) - R_3 = Q(B_{6,7}) - R_3 = Q(B_{8,9}) - R_3,$$

где P, Q, R, T — произвольные функции. Схема номограммы приведена на рисунке 1.

В настоящей работе решается следующая задача.

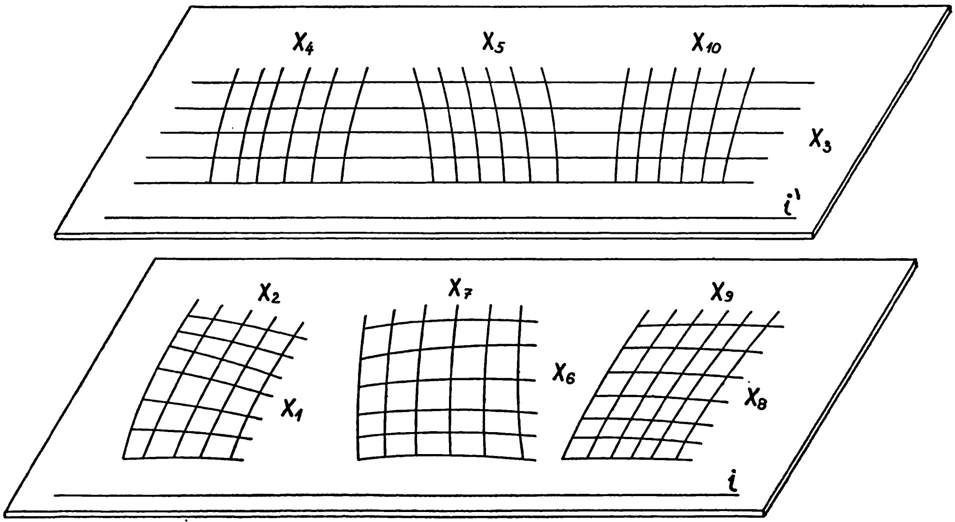
Пусть дана система уравнений

$$x_6 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{10}), \tag{4}$$
$$x_7 = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{10}),$$
$$x_8 = h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{10}),$$
$$x_9 = l(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{10}),$$

где f, g, h, l в области G достаточно гладкие, удовлетворяющие условиям

$$(5)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial l}{\partial x_k} \not\equiv 0,$$

$i = 1, 2, 3, 4, 5;\ k = 1, 2, 3, 4, 5, 10.$



Ключ: $(x_1, x_2) \parallel (x_3, x_4),\ i \parallel i_1,\ (x_6, x_7) \leftarrow (x_3, x_5),\ (x_8, x_9) \leftarrow (x_3, x_{10})$.

Рис. 1.

Нужно найти необходимые и достаточные условия, при которых система уравнений (4) эквивалентна системе уравнений (2), удовлетворяющих условиям

$$(6)\qquad \frac{D(A_{i,i+1}, B_{i,i+1})}{D(x_i, x_{i+1})} \neq 0,\ i = 1, 6, 8,$$

причем предполагается, что функции $A_{i,k}, B_{i,k}$ — также достаточно гладкие в некоторой области.

Условие (6) представляет невырожденность бинарных полей (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 6, 8$.

Поставленная задача эквивалентна следующей. Нужно найти, при каких условиях существует система тождеств вида

$$(7)\qquad A_{1,2} + A_{3,4} \equiv A_{6,7}(f, g) - A_{3,5} \equiv A_{8,9}(h, l) - A_{3,10},$$
$$B_{1,2} \equiv B_{6,7}(f, g) \equiv B_{8,9}(h, l),$$

удовлетворяющая условиям (6).

Из системы (7) можно выделить подсистему

$$(8) \qquad A_{1,2} + A_{3,4} \equiv A_{6,7}(f, g) - A_{3,5},$$
$$B_{1,2} \equiv B_{6,7}(f, g).$$

В работе [4] была решена следующая задача.

Пусть дана система двух уравнений с семью переменными

$$(9) \qquad x_6 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$
$$x_7 = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

где f и g в области G — достаточно гладкие и в $G_1 \subset G$ $f'_{x_i} \cdot g'_{x_i} \not\equiv 0$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Для того, чтобы систему уравнений (9) можно было привести к виду

$$(10) \qquad A_{6,7}(f, g) \equiv A_{1,2} + A_{3,4} + A_{3,5},$$
$$B_{6,7}(f, g) \equiv B_{1,2},$$

причем $A_{i,k}$, $B_{i,k}$ — также достаточно гладкие и

$$(11) \qquad \frac{D(A_{i,i+1}, B_{i,i+1})}{D(x_i, x_{i+1})} \neq 0, \quad i = 1, 6,$$

необходимо и достаточно выполнение условий

$$(11) \qquad \frac{g'_{x_i}}{f'_{x_i}} = Q(f, g), \quad i = 3, 4, 5,$$

$$(12) \qquad \frac{f'_{x_4}}{f'_{x_5}} = T(x_3, x_4, x_5),$$

$$(13) \qquad \frac{\partial}{\partial x_4}\left(\lg \frac{f'_{x_4}}{f'_{x_5}}\right) = P(x_4, x_5),$$

$$(14) \qquad \frac{\partial A_{3,4}}{\partial x_4} : \frac{\partial f}{\partial x_4} = R(f, g),$$

$$(15) \qquad \frac{\partial^2 A_{6,7}}{\partial x_i \partial x_3} = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$(16) \qquad \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_2)} \neq 0.$$

Предположим, что эти условия выполнены. Тогда функции $A_{i,k}$, $B_{i,k}$ определены с точносью до произвольных функций. Определив эти функции, мы приведем систему (7) к виду

$$A_{8,9} \equiv u + A_{3,10}, \tag{17}$$
$$B_{8,9} \equiv v,$$

где функции $u = u(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $v = v(x_1, x_2)$ определены посредством равенств

$$u = A_{1,2} + A_{3,4}, \tag{18}$$
$$v = B_{1,2},$$

причем нетрудно проверить, что функции u, v функционально независимы.

Пусть теперь даны функции

$$x_8 = h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{10}), \tag{19}$$
$$x_9 = l(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{10}).$$

Решим вопрос о том, когда существует система уравнений (17), решение которой дается соотношением (19).

Прежде всего функции h, l должны быть независимы.

Предположим противное: допустим, что функции h и l зависимы в области изменения x_i, тогда определитель

$$\frac{D(h, l)}{D(x_i, x_k)} = 0, \ i, k = 1, 2, 3, 4, i \neq k. \tag{20}$$

Это невозможно, так как из (17) следует, что

$$\frac{D(u, v)}{D(x_i, x_k)} = \frac{D(A_{8,9} B_{8,9})}{D(x_8, x_9)} \cdot \frac{D(h, l)}{D(x_i, x_k)} = 0 \tag{21}$$

т. е. функции u и v были бы зависимы.

Теорема. *Пусть дана система четырех уравнений с десятью переменными*

$$\begin{aligned} x_6 &= f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{10}), \\ x_7 &= g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{10}), \\ x_8 &= h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{10}), \\ x_9 &= l(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{10}), \end{aligned} \tag{22}$$

где f, g, h, l в области G достаточно гладкие и в $G_1 \subset G$ $f'_{x_i} \cdot g'_{x_i} \cdot h'_{x_k} \cdot l'_{x_k} \not\equiv 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$; $k = 1, 2, 3, 4, 5, 10$.

Для того, чтобы систему уравнений (22) *можно было представить в виде*

$$A_{1,2} + A_{3,4} \equiv A_{6,7}(f, g) - A_{3,5} \equiv A_{8,9}(h, l) - A_{3,10}, \tag{23}$$

$$B_{1,2} \equiv B_{6,7}(f, g) \equiv B_{8,9}(h, l),$$

причем $A_{i,k}$, $B_{i,k}$ *достаточно гладкие и*

$$\frac{D(A_{i,i+1}, B_{i,i+1})}{D(x_i, x_{i+1})} \neq 0, \ i = 1, 6, 8, \tag{24}$$

необходимо и достаточно выполнение условий

$$\frac{\partial l}{\partial x_i} : \frac{\partial h}{\partial x_i} = H(h, l), \ i = 3, 4, 10, \tag{25}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_4} : \frac{\partial h}{\partial x_{10}} = \frac{\partial u}{\partial x_4} : \frac{\partial A_{3,10}}{\partial x_{10}}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial A_{3,10}}{\partial x_{10}} : \frac{\partial h}{\partial x_{10}} = L\,(h, l), \tag{27}$$

$$\frac{D(f, g)}{D(x_2, x_4)} : \frac{D(h, l)}{D(x_2, x_4)} = \frac{Df(, g)}{D(x_1, x_4)} : \frac{D(h, l)}{D(x_1, x_4)} = \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_2)} : \frac{D(h, l)}{D(x_1, x_2)}. \tag{28}$$

Доказательство. *а) Докажем сначала необходимость условий.* Предположим, что система тождеств (23) существует; из выше сказанного следует, что систему тождеств (23) можно привести к виду

$$\begin{aligned} A_{8,9}(h, l) &\equiv u(x_1, x_2, x_3, x_4) + A_{3,10}, \\ B_{8,9}(h, l) &\equiv v(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{29}$$

Продифференцируем (29):

$$\frac{\partial A_{8,9}}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{8,9}}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, 4, \tag{30}$$

$$\frac{\partial A_{8,9}}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_{10}} + \frac{\partial A_{8,9}}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial x_{10}} \equiv \frac{\partial A_{3,10}}{\partial x_{10}}, \tag{31}$$

$$\frac{\partial B_{8,9}}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial B_{8,9}}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial v}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, \tag{32}$$

$$\frac{\partial B_{8,9}}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial B_{8,9}}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial x_i} \equiv 0, \ i = 3, 4, 10. \tag{33}$$

Из (33) получим

$$\frac{\partial l}{\partial x_i}:\frac{\partial h}{\partial x_i}\equiv\frac{\partial B_{8,9}}{\partial h}:\frac{\partial B_{8,9}}{\partial l}. \tag{34}$$

Обозначив правую часть (34) через — $H(h, l)$, т. е.

$$\frac{\partial l}{\partial x_i}:\frac{\partial h}{\partial x_i}=H(h,l),\ i=3,4,10, \tag{35}$$

находим условие (25).

Из (30), (31) и (35), находим

$$\left[\frac{\partial A_{8,9}}{\partial h}+H(h,l)\frac{\partial A_{8,9}}{\partial l}\right]\frac{\partial h}{\partial x_4}\equiv\frac{\partial u}{\partial x_4}, \tag{36}$$

$$\left[\frac{\partial A_{8,9}}{\partial h}+H(h,l)\frac{\partial A_{8,9}}{\partial l}\right]\frac{\partial h}{\partial x_{10}}\equiv\frac{\partial A_{3,10}}{\partial x_{10}}. \tag{37}$$

Разделив почленно тождество (36) на тождество (37)

$$\frac{\partial h}{\partial x_4}:\frac{\partial h}{\partial x_{10}}\equiv\frac{\partial u}{\partial x_4}:\frac{\partial A_{3,10}}{\partial x_{10}} \tag{38}$$

и находим условие (26).

Прологарифмировав тождество (38) и взяв производную по x_{10}, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_{10}}\lg\left(\frac{\partial h}{\partial x_4}:\frac{\partial h}{\partial x_{10}}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_{10}}\lg\frac{\partial A_{3,10}}{\partial x_{10}}. \tag{39}$$

Обозначив правую часть (39) через $K(x_3, x_{10})$, из (39) находим

$$\frac{\partial A_{3,10}}{\partial x_{10}}=\varphi(x_3)\,e^{-\int K(x_3,x_{10})dx_{10}}, \tag{40}$$

$\varphi(x_3)$ — произвольная функция.

Зная $\partial A_{3,10}/\partial x_{10}$, перепишем тождество (31) в виде

$$\frac{\partial A_{8,9}}{\partial h}+H(h,l)\frac{\partial A_{8,9}}{\partial l}\equiv\frac{\partial A_{3,10}}{\partial x_{10}}:\frac{\partial h}{\partial x_{10}}. \tag{41}$$

Для того, чтобы (30) можно было рассматривать как дифференциальное уравнение с частными производными относительно $A_{8,9}(h, l)$, должно выполняться условие (27).

Из тождества (30) получим

$$(42) \qquad \frac{D(h, l)}{D(x_2, x_4)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{D(h, l)}{D(x_1, x_4)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{D(h, l)}{D(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_4} \equiv 0 .$$

Чтобы существовало тождество (23), условие (42) должно выполняться также и для функций f и g:

$$(43) \qquad \frac{D(f, g)}{D(x_2, x_4)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_4)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_4} \equiv 0 .$$

Условие совместности системы (42), (43) относительно u имеет вид (28).

б) Доказательство достаточности.

Предположим, что условия (25)—(28) выполнены. По данным функциям h, l и с помощью условия (25) определим функцию $H(h, l)$; с помощью условия (27) и соотношения (40) определим функцию $L(h, l)$.

Зная функции $H(h, l)$ и $L(h, l)$, составим дифференциальное уравнение

$$(44) \qquad \frac{\partial A_{8,9}}{\partial h} + H(h, l) \frac{\partial A_{8,9}}{\partial l} = L\,(h, l),$$

решение которого пусть дано соотношением

$$(45) \qquad A_{8,9},(h, l) = A(h, l) + C[B(h, l)],$$

где $A(h, l)$ частное решение уравнения (44); $C[B(h, l)]$ — общее решение однородного уравнения

$$(46) \qquad \frac{\partial A_{8,9}}{\partial h} + H(h, l) \frac{\partial A_{8,9}}{\partial l} = 0 .$$

Используя условие (27), уравнение (44) запишем в виде (41) и с помощью условия (25) в виде (31), а последний можно привести к виду

$$(47) \qquad \frac{\partial}{\partial x_{10}} [A_{8,9}(h, l)] \equiv \frac{\partial A_{3,10}}{\partial x_{10}} .$$

Интегрируя (47) по x_{10}, получим

$$(48) \qquad A_{8,9}(h, l) \equiv A_{3,10} + \overline{u}(x_1, x_2, x_3, x_4) .$$

Пусть общим решением уравнения

$$(49) \qquad \frac{\partial B_{8,9}}{\partial h} + H(h, l) \frac{\partial B_{8,9}}{\partial l} = 0$$

будет

$$(50) \qquad B_{8,9}(h, l) = C_1[B(h, l)] .$$

С помощью условия (25) уравнение (49) запишем в виде тождеств (33), из которых находим

$$B_{8,9}(h, l) = \bar{v}(x_1, x_2). \tag{51}$$

Продифференцировав (48) по x_1, x_2, x_4, получим

$$\frac{\partial A_{8,9}}{\partial h} h'_{x_i} + \frac{\partial A_{8,9}}{\partial l} l'_{x_i} \equiv \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}. \tag{52}$$

Из (52) находим

$$\frac{D(h, l)}{D(x_2, x_4)} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} - \frac{D(h, l)}{D(x_1, x_4)} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} + \frac{D(h, l)}{D(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_4} \equiv 0. \tag{53}$$

Взяв во внимание условие (28) для (53), получим

$$\frac{D(f, g)}{D(x_2, x_4)} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} - \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_4)} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} + \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_4} \equiv 0. \tag{54}$$

Из (42), (43) и (53), (54) вытекает, что

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, x_4) = u(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Аналогично получим

$$v(x_1, x_2) = v(x_1, x_2).$$

Подставив в тождество (48) и (51) эти значения $\bar{u}$ и $\bar{v}$, получим систему тождеств (29). Теорема доказана.

Из теоремы следует метод определения неизвестных функций, если условия представимости выполнены.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Боголюбов Ю. И., *О представимости системы четырех уравнений с девятью переменными в виде, допускающем построение номограммы с ориентированным транспарантом*, Номограф. сб. *3* (1965), 158—166.

[2] Хованский Г. С., *Исследование возможностей преобразования номограмм с прозрачным ориентированным транспарантом*, Вычисл. мат. *7* (1961), 133—150.

[3] Pleskot V., *Nomografie*, SNTL, Praha, 1963.

[4] Pidany J., *O možnosti úpravy sústavy dvoch rovníc o siedmich premenných na tvar $A_{6,7} = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{3,6}$, $B_{6,7} = B_{1,2}$, ktorý môžeme zostrojiť pomocou nomogramov s priesvitkou o dvoch stupňoch voľnosti*, Aplikace matematiky 5 (1966), 410—416.

Поступило 26. 11. 1966.

Katedra matematiky Strojníckej fakulty
Vysokej školy technickej,
Košice