František Krňan

O bikompaktných totálne nekomutatívnych pologrupách

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 9 (1959), No. 2, 101--108

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126726`

O BIKOMPAKTNÝCH TOTÁLNE NEKOMUTATÍVNYCH POLOGRUPÁCH

FRANTIŠEK KRŇAN, Bratislava

Pologrupu S nazývame topologickou, ak množina jej prvkov tvorí topologický priestor a operácia násobenia je v tejto topológii spojitá. Ak tento topologický priestor je bikompaktný a Hausdorffov, hovoríme, že pologrupa je bikompaktná a Hausdorffova. V celej práci sa pojednáva len o topologických Hausdorffových bikompaktných pologrupách. Kvôli kratšiemu vyjadrovaniu budeme hovoriť stručne: pologrupa S, namiesto Hausdorffova bikompaktná pologrupa S.

Zápis $A \subset S$ znamená vždy, že množina A je vlastnou podmnožinou množiny S na rozdiel od zápisu $A \subseteq S$, ktorý pripúšťa $A = S$. Symbol $\bar{A}$ znamená uzáver množiny A.

Pre pohodlie čitateľa pripomenieme niekoľko známych poznatkov, ktoré v ďalších úvahách používame. (Podrobné dôkazy pozri v [4].)

Hovoríme, že prvok $a \in S$ patrí k idempotentu e_α, ak e_α je jediným idempotentom $\in \bar{A} = \overline{\{a, a^2, \ldots\}}$. Každý prvok $a \in S$ patrí k jednému a len k jednému idempotentu. Súhrn všetkých prvkov $\in S$, ktoré patria k idempotentu e_α, označíme znakom K_α. Platí $S = \cup K_\alpha$. Množiny K_α sú disjunktné a každá z nich obsahuje ako podmnožinu istú maximálnu uzavretú grupu G_α, ktorá má e_α za jednotkový prvok; $G_\alpha \subseteq K_\alpha$. Ak $a \in K_\alpha$, $e_\alpha \in K_\alpha$, potom $ae_\alpha = e_\alpha a$. Vo všeobecnom nekomutatívnom prípade množiny K_α nie sú nutne pologrupy.

Cieľom práce je ukázať, ako sa výsledky práce [1] prenášajú na Hausdorffove bikompaktné pologrupy.

Najprv pojednáme všeobecne o totálne nekomutatívnych pologrupách.

Hausdorffovu bikompaktnú pologrupu S nazveme totálne nekomutatívnou, ak:

1. obsahuje aspoň dva idempotenty,
2. pre každé dva rôzne idempotenty $e_\alpha \neq e_\beta$ je $e_\alpha e_\beta \neq e_\beta e_\alpha$.

Totálne nekomutatívna pologrupa nemá ani nulový ani jednotkový prvok. Súčin idempotentov nemusí byť idempotent. Tak napr. v práci [6] je uvedený na str. 188 príklad konečnej totálne nekomutatívnej pologrupy, v ktorej súčin niektorých idempotentov nie je idempotent. Rovnako ako v práci [1] (pozri lemmu 1) sa však dokáže, že ak náhodou $e_\alpha e_\beta = e_\beta$, potom je $e_\beta \,.\, e_\alpha = e_\alpha$.

Názov totálne nekomutatívna pologrupa je odôvodnený touto vetou:

Veta 1. *Centrum totálne nekomutatívnej pologrupy S je prázdna množina.*

Dôkaz. Vetu dokážeme nepriamo. Predpokladajme, že centrum Z je neprázdne a že teda existuje taký prvok $c \in Z \subseteqq S$, že pre každé $x \in S$ je $xc = cx$. Úplnou indukciou z toho vyplýva, že aj $C = \{c, c^2, \ldots\} \subseteqq Z$. Dokážeme najprv, že z nášho predpokladu vyplýva, že aj $\overline{C} \subseteqq Z$.

Predpokladajme, že existuje taký prvok $\zeta \in \overline{C}$, ktorý nepadne do Z. Potom existuje taký prvok $x_0 \in S$, že $\zeta x_0 \neq x_0\zeta$. Vzhľadom na predpoklad, že pologrupa S je Hausdorffova, existujú také okolia $U(\zeta x_0)$, $U(x_0\zeta)$ prvkov ζx_0, $x_0\zeta$, že

$$U(\zeta x_0) \cap U(x_0\zeta) = \emptyset. \tag{1}$$

Zo spojitosti násobenia vyplýva ďalej existencia takých okolí $U_1(x_0)$, $U_1(\zeta)$, $U_2(x_0)$ $U_2(\zeta)$, že

$$\begin{aligned} U_1(x_0)\, U_1(\zeta) &\subseteqq U(x_0\zeta), \\ U_2(\zeta)\, U_2(x_0) &\subseteqq U(\zeta x_0). \end{aligned} \tag{2}$$

Nech

$$\begin{aligned} U(x_0) &\subseteqq U_1(x_0) \cap U_2(x_0), \\ U(\zeta) &\subseteqq U_1(\zeta) \cap U_2(\zeta). \end{aligned} \tag{3}$$

Z (2) a (3) dostávame

$$\begin{aligned} U(x_0)\, U(\zeta) &\subseteqq U(x_0\zeta), \\ U(\zeta)\, U(x_0) &\subseteqq U(\zeta x_0). \end{aligned} \tag{4}$$

Pretože $\zeta \in \overline{C}$, obsahuje každé okolie prvku ζ nejaký prvok ležiaci v C. K nášmu okoliu $U(\zeta)$ existuje teda také prirodzené číslo k, že $c^k \in U(\zeta)$. Podľa (4) dostávame:

$$\begin{aligned} x_0c^k &\in U(x_0)\, U(\zeta) \subseteqq U(x_0\zeta), \\ c^kx_0 &\in U(\zeta)\, U(x_0) \subseteqq U(\zeta x_0). \end{aligned}$$

Pretože prvok c^k je zámenný s každým prvkom $\in S$, máme:

$$x_0c^k = c^kx_0, \qquad \text{teda} \qquad x_0c^k \in U(x_0\zeta) \cap U(\zeta x_0).$$

To je spor so vzťahom (1). Dokázali sme, že z predpokladu $c \in Z$ vyplýva $\overline{C} \subseteqq Z$. Označme jediný idempotent ležiaci v $\overline{C}$ znakom e_γ. V pologrupe S existuje však aj ďalší idempotent e. Pretože e_γ leží v centre pologrupy S, platí $e_\gamma e = ee_\gamma$. To je v rozpore s predpokladom, že S je totálne nekomutatívna pologrupa. Predpoklad $Z \neq \emptyset$ je teda nesprávny. Preto je $Z = \emptyset$.

Veta 2. *Každá množina K_α totálne nekomutatívnej pologrupy S je pologrupa.*

Dôkaz. Nech $a \in K_\alpha$, $b \in K_\alpha$. Máme dokázať, že $ab \in K_\alpha$. Predpokladajme, že ab patrí k idempotentu e_γ, t. j. e_γ je jediný idempotent ležiaci v množine $\overline{C} = \overline{\{(ab), (ab)^2, \ldots\}}$. Utvorme súčiny $e_\alpha e_\gamma$, $e_\gamma e_\alpha$ a predpokladajme, že $e_\alpha e_\gamma \neq$ $\neq e_\gamma e_\alpha$. Potom existujú také okolia prvkov $e_\alpha e_\gamma$, $e_\gamma e_\alpha$, že

$$U(e_\alpha e_\gamma) \cap U(e_\gamma e_\alpha) = \emptyset. \tag{9}$$

Zo spojitosti násobenia plynie opäť existencia takých okolí $U_1(e_\alpha)$, $U_1(e_\gamma)$, $U_2(e_\alpha)$, $U_2(e_\gamma)$, že

$$U_1(e_\alpha)\, U_1(e_\gamma) \subseteqq U(e_\alpha e_\gamma),$$
$$U_2(e_\gamma)\, U_2(e_\alpha) \subseteqq U(e_\gamma e_\alpha). \tag{10}$$

Nech

$$U(e_\alpha) \subseteqq U_1(e_\alpha) \cap U_2(e_\alpha),$$
$$U(e_\gamma) \subseteqq U_1(e_\gamma) \cap U_2(e_\gamma). \tag{11}$$

Z (10) a (11) vyplýva:

$$U(e_\alpha)\, U(e_\gamma) \subseteqq U(e_\alpha e_\gamma),$$
$$U(e_\gamma)\, U(e_\alpha) \subseteqq U(e_\gamma e_\alpha). \tag{12}$$

Pretože e_γ leží v uzávere množiny $C = \{(ab), (ab)^2, \ldots\}$, obsahuje každé okolie prvku e_γ nejaký prvok $\in C$. K nášmu okoliu $U(e_\gamma)$ existuje teda také prirodzené číslo s, že $(ab)^s \in U\,(e_\gamma)$. Podľa (12) máme potom

$$e_\alpha(ab)^s \in U(e_\alpha)\; U(e_\gamma) \subseteqq U(e_\alpha e_\gamma),$$
$$(ab)^s e_\alpha \in U(e_\gamma)\; U(e_\alpha) \subseteqq U(e_\gamma e_\alpha).$$

Avšak $e_\alpha a = a e_\alpha$, $e_\alpha b = b e_\alpha$, teda

$$e_\alpha \underbrace{(ab)\,(ab) \ldots (ab)}_{s\,-\,\text{činiteľov}} = \underbrace{(ab)\,(ab) \ldots (ab)}_{s\,-\,\text{činiteľov}}\, e_\alpha,$$

t. j.

$$e_\alpha(ab)^s \in U(e_\alpha e_\gamma) \cap U(e_\gamma e_\alpha).$$

To je v rozpore s (9). Náš predpoklad je teda nesprávny, a preto $e_\alpha e_\gamma = e_\gamma e_\alpha$. Vzhľadom na totálnu nekomutatívnosť pologrupy S vyplýva z tohto vzťahu $e_\alpha = e_\gamma$, t. j., ab patrí k idempotentu e_α, teda $ab \in K_\alpha$, č. b. t. d.

Veta 3. *Každá množina K_α totálne nekomutatívnej pologrupy S je uzavretá.*

Dôkaz. Je známe (pozri [4], lemma 9), že ak $e_\alpha \in K_\alpha$ a množina K_α nie je uzavretá, potom $\overline{K}_\alpha$ obsahuje aspoň jeden ďalší idempotent $e_\beta \neq e_\alpha$. Ak $e_\beta \in \overline{K}_\alpha$, potom (pozri [4] lemma 11) platí $e_\alpha = e_\alpha e_\beta = e_\beta e_\alpha$. Keby množina K_α nebola uzavretá, mali by sme spor s predpokladom, že pologrupa S je totálne nekomutatívna. Teda každá množina K_α je uzavretá.

Veta 4. *Každý obojstranný ideál J totálne nekomutatívnej pologrupy S obsahuje všetky idempotenty $\in S$.*

Dôkaz. Je známe (pozri [5], veta 2), že každá Hausdorffova bikompaktná pologrupa S má jediný minimálny obojstranný ideál N, ktorý je bikompaktný (v relatívnej topológii). Stačí preto, ak dokážeme, že každý idempotent $\in S$ leží v N. Bikompaktná množina N obsahuje aspoň jeden idempotent. Označme ho e_α; $e_\alpha \in N$. Ak $N = S$, nemáme čo dokazovať. Nech $N \neq S$. Predpokladajme, že existuje aspoň jeden idempotent $e \in S - N$. Utvorme súčin $ee_\alpha = p$. Zrejme platí

$$p = ee_\alpha \in SN \subseteqq N.$$

Teda je

$$P = \{p, p^2, p^3, \dots\} \subseteq N \quad \text{a} \quad \bar{P} \subseteq \bar{N} = N.$$

Množina $\bar{P}$ obsahuje jediný idempotent, označme ho e_β. Tvrdím $ee_\beta = e_\beta$. Dokážeme to nepriamo. Keby platilo $ee_\beta \neq e_\beta$, existovali by disjunktné okolia prvkov ee_β, e_β, t. j.

$$U(ee_\beta) \cap U_1(e_\beta) = \emptyset. \tag{a}$$

Zo spojitosti násobenia plynie existencia takých okolí $U(e)$, $U_2(e_\beta)$, že

$$U(e)\, U_2(e_\beta) \subseteq U(ee_\beta).$$

Ak

$$U(e_\beta) \subseteq U_1(e_\beta) \cap U_2(e_\beta),$$

potom tým skôr je

$$U(e)\, U(e_\beta) \cap U(e_\beta) = \emptyset. \tag{b}$$

Avšak $e_\beta \in \bar{P}$, preto existuje také prirodzené číslo k, že $p^k = (ee_\alpha)^k \in U(e_\beta)$. Zrejme je $e(ee_\alpha)^k \in U(e)\, U(e_\beta)$. Avšak $e(ee_\alpha)^k = (ee_\alpha)^k$, teda

$$(ee_\alpha)^k \in U(e)\, U(e_\beta) \cap U(e_\beta).$$

To je v rozpore so vzťahom (b). Preto je $ee_\beta = e_\beta$. Z rovnice $ee_\beta = e_\beta$ vyplýva (pozri [1], lemma 1), že

$$e = e_\beta e \in NS \subseteq N.$$

To je spor s predpokladom $e \in S - N$. Tým je dokázané, že množina $S - N$ neobsahuje žiadny idempotent. Teda N obsahuje množinu E všetkých idempotentov pologrupy S, č. b. t. d.

Veta 5. *Zjednotenie všetkých maximálnych grúp totálne nekomutatívnej pologrupy S je N. Maximálne grupy sú navzájom izomorfné.*

Dôkaz. Je známe (pozri [5] veta 4L a 4R), že pre každý idempotent $e \in N$ je Ne (resp. eN) minimálny ľavý (resp. pravý) ideál z S. Ďalej je známe, že v pologrupe, ktorá má aspoň jeden minimálny ľavý a aspoň jeden minimálny pravý ideál, existuje minimálny obojstranný ideál N a tento je zjednotením disjunktných izomorfných uzavretých grúp. Ak S je totálne nekomutatívna pologrupa, leží podľa vety 4 každý jej idempotent v ideále N. V dôsledku toho platí pre každú maximálnu grupu G_α vzťah $G_\alpha \subseteq N$. Pretože S nemá žiadne iné maximálne grupy, je zjednotenie všetkých maximálnych grúp (v totálne nekomutatívnej pologrupe) množina N a všetky tieto grupy sú izomorfné. Tým je veta 5 dokázaná.

Nasledujúce príklady slúžia na ilustráciu odvodených viet.

Príklad 1. Nech S je pologrupa komplexných čísel $z = \varrho\, e^{i\varphi}$, pre ktoré $o < r \leqq |z| \leqq 1$. Topológia nech je obyčajná topológia v komplexnej rovine. Násobenie nech je definované takto: $z_1 \odot z_2 = \varrho_1 e^{i\varphi_1} \odot \varrho_2 e^{i\varphi_2} = \varrho_1 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$. To je totálne nekomutatívna pologrupa. (Pritom je táto pologrupa zrejme neperiodická.) Idempotentmi sú všetky reálne čísla $\varrho \in \langle r, 1\rangle$. Pre každý idempotent ϱ je $S\varrho S = S$, preto $N = \bigcap_{\varrho \in E} S\varrho S = S$ (pozri [5], veta 2). Pre každý idempotent $\varrho \in N$ je $L = N\varrho = N = S$, t. j. jediný minimálny ľavý ideál pologrupy S je celá pologrupa. Minimálne pravé ideály pologrupy S sú množiny $R_\varrho = \varrho N = \{z \mid |z| = \varrho\}$. Teda je $R_\varrho = K_\varrho = G_\varrho$. Maximálne grupy G_ϱ sú vzájomne izomorfné. (Poznamenávam, že predpoklad $r > 0$ je nutný, aby násobenie bolo asociatívne, teda aby S bola pologrupa.)

Príklad 2. Nech S je pologrupa komplexných čísel z, pre ktoré $\frac{1}{4} \leqq |z| \leqq 1$. Topológia nech je obyčajná topológia v komplexnej rovine. Násobenie nech je definované takto: $z_1 \odot z_2 = \varrho_1 e^{i\varphi_1} \odot \varrho_2 e^{i\varphi_2} = \min(\varrho_1, \frac{1}{2}) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$. To je totálne nekomutatívna (neperiodická) pologrupa. Idempotentmi sú reálne čísla $\varrho \in \langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\rangle$. Pre každý idempotent ϱ je $S\varrho S = \{z \mid \frac{1}{4} \leqq |z| \leqq \frac{1}{2}\} = N$. Pre každý idempotent ϱ je $L = N\varrho = N \neq S$, t. j. N je jediný minimálny ľavý ideál pologrupy S. Keďže $R_\varrho = \varrho N = \{z \mid |z| = \varrho\}$, sú množiny R_ϱ minimálne pravé ideály pologrupy S. Pre $\varrho \in \langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ je $R_\varrho = K_\varrho = G_\varrho$; pre $\varrho = \frac{1}{2}$ je $R_{\frac{1}{2}} = G_{\frac{1}{2}} = \{z \mid |z| = \frac{1}{2}\} \neq K_{\frac{1}{2}} = \{z \mid \frac{1}{2} \leqq |z| \leqq 1\}$. Platí $N = \bigcup_{\varrho \in N} G_\varrho$. Maximálne grupy G_ϱ sú vzájomne izomorfné. (Všimnime si výslovne, že S je totálne nekomutatívna pologrupa, v ktorej $N \neq S$.)

Príklad 3. Nech prvkami pologrupy S sú dvojice reálnych čísel (x, y); $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$; $0 \leqq y \leqq 1$. Topológia nech je obyčajná topológia v rovine. Násobenie nech je definované takto: $(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = x_1 x_2, y_2)$. Toto je totálne nekomutatívna pologrupa. Množina idempotentov je $E = \{(0, y); 0 \leqq y \leqq 1\}$. Pre každý idempotent $e_y = (0, y)$ je $Se_yS = E$, preto $N = \bigcap_{e_y \in E} Se_yS = E$. Pre každý idempotent e_y je $R_y = e_y N = (0, y) E = E = N$, t. j. jediný minimálny pravý ideál pologrupy S je $N = E$. Minimálne ľavé ideály pologrupy S sú množiny $L_y = N(0, y) = E(0, y) = \{(0, y)\} = \{e_y\} = G_y$. Platí $N = \bigcup G_y$; to je disjunktné zjednotenie jednoprvkových maximálnych grúp.

Teraz dokážeme dve vety o maximálnych obojstranných ideáloch, ktoré nám umožnia dokázať vety 8 a 9. Tieto vety podrobnejšie objasňujú štruktúru totálne nekomutatívnych pologrúp.

Obojstranný ideál J sa nazýva maximálny, ak neexistuje obojstranný ideál J' spĺňujúci vzťah $J \subset J' \subset S$.

Známy je tento výsledok (pozri [3], veta 1): Každý vlastný obojstranný ideál bikompaktnej pologrupy S je obsažený v nejakom maximálnom vlastnom obojstrannom ideáli. Každý vlastný obojstranný maximálny ideál je otvorený.

Dokážeme najprv túto vetu:

Veta 6. *Nech S je totálne nekomutatívna bikompaktná pologrupa. Pre každý jej maximálny obojstranný ideál J platí $S^2 \subseteq J$.*

Dôkaz. V práci [3] je dokázaná táto veta: Ak S je bikompaktná pologrupa a množina jej idempotentov je obsažená v nejakom jej obojstrannom vlastnom ideáli J, potom $S^2 \subseteq J$. V prípade totálne nekomutatívnej pologrupy je $E \subseteq N$ (veta 4). Teda množina E je tým skôr obsažená v každom obojstrannom maximálnom ideáli J a v dôsledku toho je správne tvrdenie vety 6. (Pozri analogický výsledok v [1], lemma 2.)

Veta 7. *Nech v totálne nekomutatívnej pologrupe S je $S - S^2 \neq \emptyset$; potom každý jej maximálny obojstranný ideál má tvar $J_a = S - \{a\}$, kde $a \in S - S^2$.*

Dôkaz. Nech A je ľubovoľná množina obsažená v $S - S^2$.

Platí:

$$S(S^2 \cup A) = S^3 \cup SA \subseteq S^2 \cup S^2 \subseteq S^2 \cup A,$$
$$(S^2 \cup A)\,S = S^3 \cup AS \subseteq S^2 \cup S^2 \subseteq S^2 \cup A.$$

Teda $S^2 \cup A$ je obojstranný ideál pologrupy S. Ak ku množine S^2 pridáme všetky prvky množiny $S - S^2$ okrem jedného prvku, dostávame zrejme maximálny ideál z S. Keďže v totálne nekomutatívnej pologrupe leží (podľa vety 6) S^2 v každom maximálnom obojstrannom ideáli, dostávame takto v prípade totálne nekomutatívnej pologrupy, všetky maximálne obojstranné ideály z S.

Dôsledok vety 7. *Ak v totálne nekomutatívnej pologrupe je $S - S^2 \neq \emptyset$, potom prenik všetkých maximálnych obojstranných ideálov pologrupy S je S^2.*

Veta 8. *Nech S je totálne nekomutatívna pologrupa. Potom $S = S^2$ vtedy a len vtedy, ak $S = N$ (t. j. ak S je jednoduchá pologrupa).*

Dôkaz. 1. Ak $N = S$, zo vzťahu $S^2 \subset S$ by vyplývalo $S^2 \subset N$. To však nie je možné, lebo podľa definície leží N v každom obojstrannom ideáli z S (špeciálne $N \subseteq S^2$). Teda $S^2 = S$.

2. Ak $N \subset S$, obsahuje S nejaký maximálny obojstranný ideál J. Pritom je $N \subseteq J \subset S$. Podľa vety 6 je $S^2 \subseteq J$ a teda $S^2 \subset S$, t. j. $S^2 \neq S$. Tým je veta 8 úplne dokázaná.

Veta 9. *Nech S je totálne nekomutatívna pologrupa, N jej minimálny obojstranný ideál, potom $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} S^n$.*

Dôkaz. Utvorme nerastúcu postupnosť obojstranných ideálov:

$$S \supseteq S^2 \supseteq S^3 \supseteq \dots$$

Každý z týchto ideálov obsahuje (podľa vety 4) množinu E všetkých idempotentov pologrupy S. Teda je $\emptyset \neq E \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} S^n$. Označme $T = \bigcap_{n=1}^{\infty} S^n$. T je neprázdny uzavretý obojstranný ideál pologrupy S (lebo S^n sú uzavreté obojstranné ideály). Teda je T v relatívnej topológii bikompaktná (totálne nekomutatívna) pologrupa a platí $N \subseteq T \subseteq S$. Je známe (pozri [7], veta 1), že v každej bikompaktnej pologrupe je $T^2 = T$. Keďže $T = T^2$, je podľa vety 8 v našom prípade T jednoduchá pologrupa, ktorá neobsahuje žiadny vlastný obojstranný podideál z T. Avšak obojstranný ideál N pologrupy S je tým skôr obojstranný ideál pologrupy T. Zo vzťahu $N \subseteqq T$ vyplýva teda nevyhnutne $N = T$ t. j. $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} S^n$, č. b. t. d.

Poznámka. Význam vety 9 možno si dobre ozrejmiť na príkladoch 1—3. V príklade 1 je $S^2 = S$. V príklade 2 je $N = S^2$. V príklade 3 je $S^n \neq S^{n+1}$ pre každé prirodzené číslo n a $E = N = \bigcap_{n=1}^{\infty} S^n$.

LITERATÚRA

[1] Schwarz Š., Krajňáková D., O totálne nekomutatívnych pologrupách, Mat.-fyz. časopis SAV 9, (1959), 00.

[2] Schwarz Š., K teoriji periodičeskich polugrupp (rusky), Čechoslovackij mat. žurnal 3 (78), (1953), 7—21.

[3] Koch R. J., Wallace A. D., Maximal ideals in compact semigroups, Duke Math. Journal 21 (1954), 681—686.

[4] Schwarz Š., K teoriji bikompaktnych polugrupp (rusky), Čechoslovackij mat. žurnal 5 (80), (1955), 1—23.

[5] Numakura K., On bicompact semigroups, Math. Journal of Okayama Univ. 1 (1952), 99—109.

[6] Ivan J., O rozklade jednoduchých pologrúp na direktný súčin, Mat.-fyz. časopis SAV 4 (1954), 181—201.

[7] Loś J., Schwarz Š., Remarks on compact semigroups, Colloqium Mathematicum VI (1959), 265—270.

Došlo dňa 20. 12. 1958.

Katedra matematiky
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

О ВПОЛНЕ НЕКОММУТАТИВНЫХ БИКОМПАКТНЫХ ПОЛУГРУППАХ

ФРАНТИШЕК КРНЯН

Выводы

Хаусдорффову бикомпактную полугруппу S называем вполне некоммутативной, если: 1. Она содержит по крайней мере два идемпотента, 2. для двух любых идемпотентов $e_\alpha \neq e_\beta$ имеет место $e_\alpha e_\beta \neq e_\beta e_\alpha$. Целью этой работы является исследование структуры таких полугрупп.

В работе доказываются следующие теоремы:

а) Центром такой полугруппы является пустое множество.

б) Множество всех элементов, принадлежащих к фиксированному идемпотенту e_α (в смысле работы [4]) замкнутая полугруппа.

в) Минимальный двусторонний идеал N полугруппы S содержит все идемпотенты полугруппы S. Множество N является соединением всех (непересекающихся) максимальных групп полугруппы S. (Все эти группы изоморфные топологические группы).

г) Имеет место равенство $N = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S^i$, в частности $S = S^2$ тогда и только тогда если S является простой полугруппой вез нуля.

д) Если $S - S^2 \neq \emptyset$, то для любого двустороннего идеала J имеет место соотношение $S^2 \subseteqq J$, в частности каждый максимальный двусторонний идеал имеет вид $J_a = S - \{a\}$ где $a \in S - S^2$.

ON TOTALY NON-COMMUTATIVE BICOMPACT SEMIGROUPS

FRANTIŠEK KRŇAN

Summary

A Hausdorff bicompact semigroup S is called totally non-commutative if: 1. it has at least two idempotents, 2. for every couple of idempotents $e_\alpha \neq e_\beta$ we have $e_\alpha e_\beta \neq e_\beta e_\alpha$.

The purpose of this paper is to study the structure of such semigroups. The following theorems are proved:

a) The center of S is empty.

b) The set of all elements belonging to a fixed chosen indempotent (in the sense of the paper [4]) is a closed semigroup.

c) The minimal two-sided ideal N of S contains all idempotents $\in S$. Hence the set N is a class sum of mutually disjoint maximal groups, which are therfore isomorphic together.

d) We have $N = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S^i$; especially $S = S^2$ holds if and only if S is a simple semigroup (without zero).

e) If $S - S^2 \neq \emptyset$, then for every two-sided ideal J we have $S^2 \subseteqq J$ and every maximal two-sided ideal of S is of the form $J_a = S - \{a\}$; $a \in S - S^2$.