Ladislav Mišík

Über die Eigenschaft von Darboux für Funktionen

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 16 (1966), No. 1, 45--52

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126717

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 1, 1966

ÜBER DIE EIGENSCHAFT VON DARBOUX FÜR FUNKTIONEN

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava

1. Als die Eigenschaft von Darboux der Funktionen einer reellen Variable nennt man gewöhnlich folgende Eigenschaft:

(I) *Es seien a, b und c solche Zahlen, daß $f(a) < c < f(b)$ gilt, dann existiert eine Zahl $\xi \in (\min\{a, b\}, \max\{a, b\})$ für welche $f(\xi) = c$ ist.*

Eine andere Formulation, welche mit der Formulation (I) äquivalent ist, ist diese:

(II) Eine Funktion f einer reellen Variable hat die Eigenschaft von Darboux dann und nur dann, wenn das Bild bei f einer zusammenhängenden Menge eine zusammenhängende Menge ist.

Diese Formulation hängt damit zusammen, daß die Intervalle und die Mengen mit einem einzigen Punkt die einzige zusammenhängende Mengen in $(-\infty, \infty)$ sind. Aber die offenen Intervalle bilden in $(-\infty, \infty)$ eine Basis offener Mengen und darum können wir die Eigenschaft von Darboux auch folgendermaßen formulieren:

(III) Eine Funktion f hat die Eigenschaft von Darboux dann und nur dann, wenn für jedes offenes Intervall J, für jede zwei Zahlen $x, y \in \bar{J}$ ([1]) und für jede Zahl c mit der Eigenschaft $f(x) < c < f(y)$ ein $\xi \in J$ so existiert, daß $f(\xi) = c$ ist.

Die erste Definition ist darauf gegründet, das der Definitionsbereich eine geordnete Menge ist. Die zweite Definition ist auf dem Begriff zusammenhängender Mengen gegründet. Aber die Struktur der zusammenhängenden Mengen in $(-\infty, \infty)$ ist sehr einfach. Wenn wir für den Definitionsbereich komplizierte Räume nehmen werden, dann ist es vorteilhaft in der Definition (II) nur einige der zusammenhängenden Mengen nehmen. So macht es C. J. Neugebauer in [1], als er in der Formulation der Definition (II) verlangt, daß das Bild jeder Menge von Darboux zusammenhängend ist. Der Autor geht im Artikel [2] aus der dritten Formulation bei der Formulation der Eigenschaft von Darboux der Funktionen die auf einem topologischen Raum definiert

([1]) $\bar{J}$ bedeutet die abgeschlossene Hülle von J.

sind, aus. Wenn wir dessen bewußt sind, daß die offenen Intervalle im $(-\infty, \infty)$ eine Basis offener Mengen bilden, dann können wir in der Definition (III) das System offener Intervalle durch eine Basis offener Mengen ersetzen. Jetzt übergehen wir zu zwei äquivalenten Definitionen der Eigenschaft von Darboux der reellen Funktionen, die auf einem topologischen Raum definiert sind.

2. Es sei $\mathscr{B}$ eine Basis offener Mengen in einem topologischen Raum X. *Eine Menge $A \subset X$ nennt man eine Menge von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ dann und nur dann, wenn*

(1) *zu jedem $x \in A$ ein solches $B \in \mathscr{B}$ existiert, daß $x \in \bar{B}$ und $B \subset A$ ist,*

(2) *für jedes Paar von Elementen $x, y \in A$ endlich viele solche Mengen Q_1, $Q_2, \ldots, Q_s$ existieren, daß $x \in Q_1$, $y \in Q_s$, $Q_i \subset A$ für $i = 1, 2, \ldots, s$, $Q_i \cap Q_{i+1} \neq 0$* [2] *für $i = 1, 2, \ldots, s-1$ und $B_i \subset Q_i \subset \bar{B}_i$ für $i = 1, 2, \ldots, s$ für geeignete Mengen $B_1, B_2, \ldots, B_s \in \mathscr{B}$ gilt.*

Leicht beweist man, daß diese zwei Definitionen der Eigenschaft von Darboux äquivalent sind:

(II′) *Eine reelle Funktion, welche im topologischen Raum X definiert ist, hat die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$, wenn das Bild von jeder Menge von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ zusammenhängend ist.*

(III′) *Eine reelle Funktion f, die im topologischen Raum X definiert ist, hat die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$, wenn für jedes $A \in \mathscr{B}$ und jede $x, y \in \bar{A}$ und jedes c mit der Eigenschaft $f(x) < c < f(y)$ ein solches $\xi \in A$ existiert, daß $f(\xi) = c$ ist.*

Es soll die Funktion f die Eigenschaft von Darboux im Sinne (II′) haben. Es sei $A \in \mathscr{B}$, $x, y \in \bar{A}$ und c so, daß $f(x) < c < f(y)$ ist. Weil $A \cup \{x, y\}$ eine Menge von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ ist, gilt es, daß $(f(x), f(y)) \subset f(A \cup \{x, y\})$ und also $(f(x), f(y)) \subset f(A)$ ist. Dann existiert ein $\xi \in A$ so, daß $f(\xi) = c$ ist. Damit haben wir festgestellt, daß die Funktion f auch die Eigenschaft von Darboux im Sinne (III′) hat.

Es soll jetzt die Funktion f die Eigenschaft von Darboux im Sinne von (III′) haben. Es sei A eine Menge von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ und es seien $c_1 < c_2$ solche Zahlen, daß $c_1, c_2 \in f(A)$ ist. Dann existieren zwei solche Punkte $x, y \in A$, daß $f(x) = c_1$ und $f(y) = c_2$ ist. Dann existiert ein solches endliches System $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_s\}$ von Mengen, daß $x \in Q_1$, $y \in Q_s$, $Q_i \cap Q_{i+1} \neq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, s-1$ und $Q_i \subset A$, $B_i \subset Q_i \subset \bar{B}_i$ für $i = 1, 2, \ldots, s$ und für geeignete Mengen $B_1, B_2, \ldots, B_s$ aus $\mathscr{B}$ ist. Es sei $x_i \in Q_i \cap Q_{i+1}$ für $i = 1, 2, \ldots, s-1$. Aus der Eigenschaft (III′) geht hervor, daß $(\min\{f(x_i), f(x_{i+1})\}, \max\{f(x_i), f(x_{i+1})\}) \subset f(B_{i+1}) \subset f(A)$ für $i = 0, 1, 2, \ldots, s-1$ ist. Dabei verstanden wir x unter x_0 und y unter x_s. Daraus

[2] Das Zeichen 0 bedeutet die leere Menge.

folgt jetzt, daß $\langle c_1, c_2\rangle \subset f(A)$ ist. Also ist das Bild von A bei f eine zusammenhängende Menge.

C. J. Neugebauer definiert in dem Artikel [1] die Mengen von Darboux nur für den Fall, daß X der n-dimensionaler euklidischer Raum und die Basis $\mathscr{B}$ das System aller offenen Intervalle im n-dimensionalen euklidischen Raume ist. In dem weiteren werden wir die Definition (III′) benützen.

3. Es sei $(X_\lambda)_{\lambda \in A}$ ein System topologischer Räume. Es sei X das topologische Produkt von topologischen Räumen X_λ für $\lambda \in A$. Für jedes $\lambda \in A$ soll π_λ die Projektion von dem topologischen Produkt X auf X_λ bedeuten, d. h. für jedes $x \in X$ $\pi_\lambda(x) = x_\lambda$, wobei x_λ die λ-Komponente von x ist. Es sei $\mathscr{B}_\lambda$ eine Basis in dem Raum X_λ für $\lambda \in A$. Dann bildet das System $\{B : B \subset X$, für welches eine endliche Menge $A_B \subset A$ so existiert, daß $\pi_\lambda(B) = X_\lambda$ für $\lambda \in A - A_B$ und $\pi_\lambda(B) \in \mathscr{B}_\lambda$ für $\lambda \in A_B$ ist$\}$ eine Basis im topologischen Produkt X. Dieses System bezeichnen wir als $\mathscr{B}$. Es sei f eine Funktion welche auf X definiert ist. Es sei $x = (x_\lambda)_{\lambda \in A} \in X$ und es sei $\lambda_0 \in A$. Dann verstehen wir unter einer Menge X_{x,λ_0} die Teilmenge des Produktes X für die $\pi_\lambda(X_{x,\lambda_0}) = x_\lambda$ für $\lambda \neq \lambda_0$, $\lambda \in A$ und $\pi_{\lambda_0}(X_{x,\lambda_0}) = X_{\lambda_0}$ ist. Die partielle Funktion von der Funktion f auf der Menge X_{x,λ_0} bezeichnen wir durch f_{x,λ_0}.

Satz 1. *Es sei A eine endliche Menge. Es sei $\mathscr{B}' = \{B : B \in \mathscr{B}$, wobei $A_B = A$ ist$\}$. Dann ist $\mathscr{B}'$ eine Basis im X. Es sei f eine Funktion, die auf dem topologischen Raum X definiert ist, und für jedes $x \in X$ und jedes $\lambda_0 \in A$ soll die Funktion $f_{x,\lambda_0}(\pi_{\lambda_0}^{-1})$ die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}_{\lambda_0}$ haben. Dabei soll $\pi_{\lambda_0}^{-1}$ die Funktion bedeuten, welche dem Punkt $z \in X_{\lambda_0}$ das inverse Bild von z im X_{x,λ_0} zuordnet. Dann hat die Funktion f die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}'$.*

Beweis. Es sei $B \in \mathscr{B}'$, $x, y \in \bar{B}$ und c eine Zahl für die $f(x) < c < f(y)$ gilt. Zuerst beweisen wir, daß zwei solche Punkte $u, v \in B$ existieren für die $f(u) < c < f(v)$ gilt. Es sei $x = (x_\lambda)_{\lambda \in A}$ und $y = (y_\lambda)_{\lambda \in A}$. Es sei $\pi_\lambda(B) = B_\lambda \in \mathscr{B}_\lambda$ für jedes $\lambda \in A$. Dann ist x_λ und y_λ aus $\bar{B}_\lambda$ für jedes $\lambda \in A$. Es sei $A = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Wir bezeichnen durch $x^{(1)} = (x_\lambda^{(1)})_{\lambda \in A}$ den Punkt für den $x_\lambda^{(1)} = x_\lambda$ für $\lambda \neq \lambda_1$ und $x_{\lambda_1}^{(1)} = y_{\lambda_1}$ ist. Es ist evident, daß $x^{(1)} \in \bar{B} \cap \cap X_{x,\lambda_1}$ ist. Die Funktion $f_{x,\lambda_1}(\pi_{\lambda_1}^{-1})$ hat die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}_{\lambda_1}$. In jedem Fall, ob $f(x^{(1)}) \leqq c$ oder $f(x^{(1)}) > c$ gilt, existiert ein solcher Punkt $\bar{x}^{(1)} = (\bar{x}_\lambda^{(1)})_{\lambda \in A}$ für den $\bar{x}_\lambda^{(1)} = x_\lambda$ für $\lambda \neq \lambda_1$ und $\bar{x}_{\lambda_1}^{(1)} \in B_{\lambda_1}$ und $f(\bar{x}^{(1)}) < c$ ist. Jetzt gehen wir von dem Punkt $\bar{x}^{(1)} \in \bar{B}$ aus und machen dasselbe für die Komponente λ_2. Das bedeutet, daß wir den Punkt $x^{(2)} = (x_\lambda^{(2)})_{\lambda \in A}$ so konstruieren, daß $x_\lambda^{(2)} = \bar{x}_\lambda^{(1)}$ für $\lambda \neq \lambda_2$ und $x_{\lambda_2}^{(2)} = y_{\lambda_2}$ ist. Es ist evident, daß $x^{(2)} \in \bar{B} \cap X_{\bar{x}^{(1)},\lambda_2}$ ist. Die Funktion $f_{\bar{x}^{(1)},\lambda_2}(\pi_{\lambda_2}^{-1})$ hat die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}_{\lambda_2}$, also existiert ein solcher Punkt $\bar{x}^{(2)} = (\bar{x}_\lambda^{(2)})_{\lambda \in A}$, für den $\bar{x}^{(2)} = x_\lambda^{(2)}$ für $\lambda \neq \lambda_2$, $\bar{x}_{\lambda_2}^{(2)} \in B_{\lambda_2}$

und $f(\bar{x}^{(2)}) < c$ gilt. Es gilt schon, daß $\bar{x}^{(2)}_{\lambda_1} \in B_{\lambda_1}$ und $\bar{x}^{(2)}_{\lambda_2} \in B_{\lambda_2}$ ist. Wenn wir diese Betrachtung wiederholen, bekommen wir einen Punkt $u \in B$ für den $f(u) < c$ ist. Analog können wir einen Punkt $v \in B$ konstruieren für den $f(v) > c$ ist. Wir müßen nur aus dem Punkt y herausgehen. Wir bezeichnen $u^{(0)} = u = (u^{(0)}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ und $u^{(n)} = v = (u^{(n)}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Wir führen jetzt folgende Punkte $u^{(i)} = (u^{(i)}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$ so ein daß für sie folgendes gilt: $u^{(i+1)}_\lambda = u^{(i)}_\lambda$ für $\lambda \neq \lambda_{i+1}$ und $u^{(i+1)}_{\lambda_{i+1}} = u^{(n)}_{\lambda_{i+1}}$ für $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Für sie gilt $u^{(i)} \in B$ für $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Weil $f(u^{(0)}) < c < f(u^{(n)})$ ist. existiert eine solche Zahl $j \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, daß $f(u^{(j)}) < c < f(u^{(j+1)})$ ist. Aus der Tatsache, daß die Funktion $f^{(j)}_{u,\lambda_{j+1}}(\pi^{-1}_{\lambda_{j+1}})$ die Eigenschaft von Darboux bezüglich des Systems $\mathscr{B}_{\lambda_{j+1}}$ hat, geht die Existenz eines solchen Punktes $\xi' \in B_{\lambda_{j+1}}$ hervor, für den $f^{(j)}_{u,\lambda_{j+1}}(\pi^{-1}_{\lambda_{j+1}}\xi') = c$ ist. Also für den Punkt $\xi = (\xi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, wobei $\xi_\lambda = u^{(j)}_\lambda$ für $\lambda \neq \lambda_{j+1}$ und $\xi_{\lambda_{j+1}} = \xi'$ ist, gilt die Gleichung $f(\xi) = c$. Damit ist der Satz bewiesen.

Wenn $X_\lambda \in \mathscr{B}_\lambda$ ist, dann ist das System $\mathscr{B}'$ aus dem Satz 1 gleich $\mathscr{B}$. Der Satz 1 ist nicht richtig, wenn die Menge Λ eine unendliche Menge ist. Das geht aus diesem Beispiel hervor: Es sei Λ eine abzählbare Menge und $X_\lambda = (0,1)$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Es sei für jedes $\lambda \in \Lambda$ $\mathscr{B}_\lambda$ das System aller Intervallen, welche im $(0,1)$ enthalten sind. Jetzt definieren wir die Funktion f folgendermaßen: $f(x) = 0$, wenn $x \in X$, $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ und $x_\lambda = \frac{1}{2}$ nur für endlich viele $\lambda \in \Lambda$ gilt und $f(x) = 1$ ist, wenn $x \in X$, $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ und $x_\lambda = \frac{1}{2}$ für unendlich viele $\lambda \in \Lambda$ gilt. Es ist evident, daß $X \in \mathscr{B}$ ist. Die Funktion f nimmt nur zwei Werte an und darum kann sie nicht die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ haben. Für jedes $x \in X$ und jedes $\lambda_0 \in \Lambda$ gilt folgendes: wenn $f(x) = 0$ ist, dann ist $f_{x,\lambda_0}(\pi^{-1}_{\lambda_0} z) = 0$ für jedes $z \in X_{\lambda_0}$; wenn $f(x) = 1$ ist, dann ist $f_{x,\lambda_0}(\pi^{-1}_{\lambda_0} z) = 1$ für jedes $z \in X_{\lambda_0}$. Daraus folgt, daß für jedes $x \in X$ und jedes $\lambda_0 \in \Lambda$ die Funktion $f_{x,\lambda_0}(\pi^{-1}_{\lambda_0})$ die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}_{\lambda_0}$ hat.

Wir möchten darauf aufmerksam machen, daß die Funktion f, welche auf dem topologischen Produkt X definiert ist, die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ haben könnte, aber einige von den Funktionen $f_{x,\lambda}(\pi^{-1}_\lambda)$ haben nicht die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}_\lambda$, siehe zum Beispiel [1]. Der Satz 1 für den Fall $X = E_n$ und für die Basis aller offenen Intervalle ist im Artikel [1].

4. In der Arbeit [1] sind verschiedene Beispiele von Funktionen, welche die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis aller offenen Intervalle haben angeführt. Wir zeigen hier nur, daß die Funktion von zwei reellen Variablen $f(x, y)$ welche die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis aller offenen Intervalle als Funktion von x bei jedem y und auch als Funktion von y bei jedem x hat, die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis aller sphärischen Umgebungen als Funktion von x und y hat. Es sei K eine beliebige

sphärische Umgebung. Es soll (x_1, y_1) und (x_2, y_2) aus $\bar{K}$ und c eine solche Zahl sein, daß $f(x_1, y_1) < c < f(x_2, y_2)$ ist. Wegen der Eigenschaft der Funktion $f(x, y)$ können wir die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) so wählen, daß beide aus K sind und für sie die Ungleichung $f(x_1, y_1) < c < f(x_2, y_2)$ richtig ist. Wenn die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf einer Parallele entweder zu der Achse x oder zu der Achse y liegen, dann geht aus der Eigenschaft der Funktion f hervor, daß ein solches $(\xi, \eta) \in K$ existiert, für das $f(\xi, \eta) = c$ ist. Wenn die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) nicht auf einer Parallele entweder zur Achse x oder zur Achse y liegen, dann liegt mindestens einer der Punkte (x_1, y_2) und (x_2, y_1) im K. Es sei zum Beispiel $(x_1, y_2) \in K$. Dann gilt entweder $f(x_1, y_2) < c$ oder $f(x_1, y_2) > c$. Im ersten Falle existiert selbstverständlich ein solches $\xi \in \langle x_1, x_2)$, wenn $x_1 < x_2$ ist und $\xi \in (x_2, x_1\rangle$, wenn $x_2 < x_1$ ist, für das $f(\xi, y_2) = c$ und $(\xi, y_2) \in K$ ist. Im zweiten Falle existiert ein solches $\eta \in (\min\{y_1, y_2\}, \max\{y_1, y_2\})$ für das $f(x_1, \eta) = c$ und $(x_1, \eta) \in K$ ist.

C. J. Neugebauer hat bewiesen (Satz 10 aus [1]), daß die approximative Ableitung einer Funktion von zwei reellen Variablen, welche als Funktion einer reellen Variable bei festem Wert der zweiten Variable approximativ stetig ist, die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis aller offenen Intervalle in zweidimensionalem euklidischen Raum hat. Hier werden wir einen analogen Satz über partielle Ableitung nach einer Variable beweisen. In unserem Fall ändert sich die zweite Variable in einem allgemeineren Raum.

Es sei Y ein solcher vollständiger metrischer Raum, in dem eine Basis $\mathscr{B}$ mit folgender Eigenschaft existiert:

1. *Zu jedem $x \in Y$ und zu jeder offenen Menge O, welche durch die Relation $x \in O$ verbunden sind, existiert ein $B \in \mathscr{B}$ für das $B \subset O$ und $x \in \bar{B} - B$ ist.*

2. *Für jedes $B \in \mathscr{B}$ und für jede Zerlegung B auf zwei nicht leere disjunkte Mengen A_1 und A_2, $B = A_1 \cup A_2$, für welche $\bar{C} \cap B \subset A_1$, bzw. $\bar{C} \cap B \subset A_2$ ist, wenn $C \subset A_1$ bzw. $C \subset A_2$ und $C \in \mathscr{B}$ ist, sind die Mengen $A_1' \cap A_2$ und $A_1 \cap A_2'$ nicht leer* (³).

Zum Beispiel im n-dimensionalen euklidischen Raum E_n haben die Basis aller offenen Intervalle als auch die Basis aller sphärischen Umgebungen die Eigenschaft 1. und 2. (siehe [2]). Wir möchten bemerken, daß das Postulat 2. stärker als das Postulat von Zusammenhängigkeit ist.

Wenn nämlich $B \in \mathscr{B}$ nicht zusammenhängend wäre, dann müßte $B = O_1 \cup O_2$ sein, wobei O_1 und O_2 relativ bezüglich zu B offene zu einander disjunkte Mengen sind. Dann gilt für jedes $C \in \mathscr{B}$ mit der Eigenschaft $C \subset O_1$, bzw. $C \subset O_2$, $\bar{C} \cap B \subset \bar{O}_1 \cap B = O_1$, bzw. $\bar{C} \cap B \subset \bar{O}_2 \cap B = O_2$. Also die Mengen $O_1' \cap O_2$ und $O_1 \cap O_2'$ sollen nicht leer sein. Das aber widerspricht der Annahme, daß O_1 und O_2 relativ offen in B sind.

(³) Das zeichen A' bedeutet die Ableitung der Menge A.

Satz 2. *Es sei Y ein vollständiger metrischer Raum und $\mathscr{B}$ eine Basis darin mit den Eigenschaften 1. und 2. Es sei $\mathscr{B}_0$ das System aller Mengen der Form $(a, b) \times B$ (4), wobei $a < b$ Zahlen sind und $B \in \mathscr{B}$ ist. Dann ist $\mathscr{B}_0$ eine Basis in $E_1 \times Y$. Es sei $f(x, y)$ eine Funktion die auf $E_1 \times Y$ definiert ist, und es soll $\frac{\partial f}{\partial x}$ für jedes $y \in Y$ und jedes $x \in E_1$ existieren. Es soll $f(x, y)$ als Funktion von x bei festem $y \in Y$ die Eigenschaft von Darboux haben und als Funktion von y bei festem $x \in E_1$ stetig sein. Dann hat $\frac{\partial f}{\partial x}$ die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}_0$.*

Beweis. Es ist evident, daß $\mathscr{B}_0$ eine Basis im $E_1 \times Y$ ist. Die Funktion $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ hat für jedes $y \in Y$ als Funktion von x die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis aller offenen Intervalle, weiter ist sie aus der ersten Baireschen Klasse, und es gilt für sie der Mittelwertsatz [(3)]. Aber $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ist für jedes $x \in E_1$ als Funktion von y aus der ersten Baireschen Klasse, weil $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_n n\left(f\left(x + \frac{1}{n}, y\right) - f(x, y)\right)$ und $n\left(f\left(x + \frac{1}{n}, y\right) - f(x, y)\right)$ eine stetige Funktion für jedes n als Funktion von y ist.

Den Satz werden wir indirekt beweisen. Es soll $\frac{\partial f}{\partial x}$ nicht die Eigenschaft von Darboux bezüglich $\mathscr{B}_0$ haben. Dann existieren die Zahlen a und b, $a < b$, das Element $O \in \mathscr{B}$, die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) aus $(a, b) \times O$ und die Zahl c so, daß $\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) < c < \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2)$ und $\{(x, y) : (x, y) \in (a, b) \times O, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = c\} = \emptyset$ ist. Es sei $A = \{y : y \in O$, wofür ein $x \in (a, b)$ so existiert, daß $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \leq c$ ist$\}$ und $B = \{y : y \in O$, wofür ein $x \in (a, b)$ so existiert, daß $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \geq c$ ist$\}$. Es ist evident, daß $O = A \cup B$ ist. Weiter muß $A \cap B = \emptyset$ gelten. Wäre nämlich $y_0 \in A \cap B$, dann müßten zwei Zahlen x_1 und x_2 aus (a, b) so existieren, daß $\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_0) \leq c \leq \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_0)$ sein soll.

(4) $(a, b) \times B$ bedeutet den kartesischen Produkt von dem Intervall (a, b) und der Menge B.

Aber die Funktion $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$ hat die Eigenschaft von Darboux und darum soll ein $\xi \in (a, b)$ so existieren, daß $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0) = c$ ist. Das wäre aber ein Widerspruch.

Jetzt zeigen wir, daß folgendes gilt: wenn $U \in \mathscr{B}$ und $U \subset A$, bzw. $U \subset B$ ist, dann ist $\overline{U} \cap O \subset A$, bzw. $\overline{U} \cap O \subset B$. Es sei $U \subset A$ und $y_0 \in \overline{U} \cap O$. Wäre nämlich $y_0 \in B$, müßte $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) > c$ für jedes $x \in (a, b)$ gelten. Weil $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) > c$ ist, wobei $x_0 \in (a, b)$ ist, existiert ein solches h für das $x_0 + h \in (a, b)$ und $\frac{1}{h}(f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)) > c$ ist. Wegen der Relation $y_0 \in \overline{U}$ und wegen der Stetigkeit von Funktion $\frac{1}{h}(f(x_0 + h, y) - f(x, y))$ existiert ein solches $y_1 \in U$ für das $\frac{1}{h}(f(x_0 + h, y_1) - f(x_0, y_1)) > c$ gilt. Aus dem Mittelwertsatz geht hervor, daß ein $\xi \in (a, b)$ so existiert, daß $\frac{1}{h}(f(x_0 + h, y_1) - f(x_0, y_1)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_1) > c$ ist. Es folgt daraus, daß $y_1 \in B$ ist, was wegen der Relation $U \subset A$ unmöglich ist. Analog beweist man die Behauptung bezüglich B.

Wir führen $F = A' \cap B'$ ein. Ähnlich wie im Beweise des Satzes 2 aus [2] beweist man, daß $F \cap A$ und $F \cap B$ dicht in der nicht leeren Menge $F \cap O$ liegen. Die Funktion $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)$ bei $x_0 \in (a, b)$ ist aus der ersten Baireschen Klasse als Funktion von y. Also die partielle Funktion $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)$, welche nur auf F betrachtet wird, muß auf einer dichten Teilmenge von F stetig sein. Es sei $u \in F \cap O$. Dann existieren in jeder Umgebung des Punktes u die Punkte aus $F \cap A$ und aus $F \cap B$. Weil $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u) \neq c$ ist, kann die betrachtete partielle Funktion nicht in u stetig sein. Also die partielle Funktion $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)$ kann in keinem Punkte aus $F \cap O$ stetig sein, und deswegen kann sie auf keiner dichten Teilmenge von der Menge F stetig sein. Daraus würde jetzt folgen, daß $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)$ nicht aus der ersten Baireschen Klasse ist, was unmöglich ist.

LITERATUR

[1] Neugebauer C. J., *Darboux property for functions of several variables*, Trans. Amer. Math. Soc. *107* (1963), 30—39.
[2] Mišík L., *Über die Funktionen der ersten Baireschen Klasse mit der Eigenschaft von Darboux*, Mat.-fyz. časop. *14* (1964), 44—49.
[3] Mišík L., *Über die Ableitung der additiven Intervallfunktionen*, Časop. pěstov. mat. *91* (1966), (im Druck).

Eingegangen am 20. 1. 1965.

ČSAV, Matematický ústav
Slovenskej akadémie vied,
Bratislava