Ladislav Mišík

Über den Mittelwertsatz für additive Zellenfunktionen

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 13 (1963), No. 4, 260--274

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126710`

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 13, 4, 1963

ÜBER DEN MITTELWERTSATZ FÜR ADDITIVE ZELLENFUNKTIONEN

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava

In dieser Arbeit wird die Eigenschaft von Darboux und der Mittelwertsatz für die Ableitung der additiven Zellenfunktionen behandelt. Am Schluß wird auf den Zusammenhang zwischen den Mittelwertsätzen für additive Intervallfunktionen und unseren Ergebnissen hingewiesen.

$(X, \mathscr{A}, m)$ sei ein Maßraum, d. h. X ist eine Menge, $\mathscr{A}$ ist eine σ-Algebra der Teilmengen der Menge X, wobei X zu $\mathscr{A}$ gehört und m ist eine nichtnegative, σ-additive Funktion die auf $\mathscr{A}$ definiert ist. Die Funktion m ist in der leeren Menge Null. In der ganzen Arbeit sei I die Menge aller natürlichen Zahlen. $\mathscr{S}$ sei ein solches Teilsystem des Systems $\mathscr{A}$, daß $0 < m(A) < \infty$ für jedes $A \in \mathscr{S}$ gilt. Jedes Element von S wird eine Zelle genannt.

Es sei $B \in \mathscr{A}$. Ein System $\mathscr{A}_0$ wird eine Teilung [1] der Menge B durch $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$, wenn $\mathscr{A}_0$ höchstens abzählbar ist und $B = \cup\{A : A \in \mathscr{A}_0\}$(1) ist. Weiter muß noch gelten: $A \in \mathscr{S}_0$ für jedes $A \in \mathscr{A}_0$; $m(A_1 \cap A_2) = 0$ für $A_1 \neq A_2$, $A_1, A_2 \in \mathscr{A}_0$; und $C \cap A \neq \emptyset$ (2) für jedes $C \in \mathscr{S}$ nur für endlich viele A aus $\mathscr{A}_0$. Aus der letzten Bedingung geht hervor, daß jede Teilung einer Zelle durch $\mathscr{S}_0$ ein endliches System ist.

Jetzt wollen wir einige Axiome einführen, die im folgenden benützt werden. Diese Axiome sind für mehrere Systeme von Intervallen erfüllt. Einige von ihnen stehen im Zusammenhang mit den Axiomen aus [1].

Axiom I. Auf dem System $\mathscr{S}$ wird eine positive nichtfallende Funktion δ definiert, d. h. $\delta(A) > 0$ für jedes $A \in \mathscr{S}$ und $\delta(A) \leqq \delta(B)$ für $A \subset B$, $A, B \in \mathscr{S}$. Die Funktion δ nennt man eine Norm.

Axiom II. Das Axiom II ist für das System $\mathscr{S}$ erfüllt, wenn folgendes gilt: Jedem $A \in \mathscr{S}$ wird eine nichtleere Menge $N(A)$ vom Maß Null zugeordnet.

In allen weiteren Axiomen ist $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$.

Axiom III. Es sei $A \in \mathscr{A}$. Es sei das Axiom I und II für $\mathscr{S}$ erfüllt. Das Axiom III ist für die Menge A bei dem System $\mathscr{S}_0$ erfüllt, wenn für jedes $B \subset A$, $B \in \mathscr{S}$, jedes $x \in B - N(B)$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $C \in \mathscr{S}_0$ existiert, für das $x \in C - N(C) \subset C \subset B - N(B)$ und $\delta(C) < \varepsilon$ ist.

(1) Die Bezeichnung $\{A : V(A)\}$, bzw. $\{A_\lambda : V(\lambda)\}$ bedeutet das System, für welches $V(A)$, bzw. $V(\lambda)$ gilt. Die Bezeichnung $\cup$, bzw. $\cap$ bedeutet die Summe, bzw. den Durchschnitt der Mengen.

(2) $\emptyset$ bedeutet die leere Menge.

Axiom IV. Es sei $A \in \mathscr{A}$. Das Axiom IV ist für die Menge A bei $\mathscr{S}_0$ erfüllt, wenn folgendes gilt: Es sei $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ein monotones System von Zellen aus $\mathscr{S}_0$, d. h. für jedes $\lambda \neq \tau$, $\lambda, \tau \in \Lambda$ gilt $A_\lambda \subset A_\tau$ oder $A_\tau \subset A_\lambda$, wobei $A_\lambda \subset A$ für jedes $\lambda \in \Lambda$ ist. Dann ist der Durchschnitt $\cap \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ nicht leer.

Axiom V. Es sei $A \in \mathscr{S}$, und es sei das Axiom I und das Axiom II für $\mathscr{S}$ erfüllt. Das Axiom V ist für die Zelle A bei $\mathscr{S}_0$ erfüllt, wenn folgendes gilt: Ferner sei $B \subset A$, $B \in \mathscr{S}$. Weiter sei $B - N(B) = B_1 \cup B_2$ eine Zerlegung der Menge $B - N(B)$ in zwei nichtleere disjunkte Teile B_1 und B_2, so daß für jedes $C \in \mathscr{S}_0$ für das $C - N(C) \subset B_1$, bzw. $C - N(C) \subset B_2$ ist, $C \cap (B - N(B)) \subset B_1$, bzw. $C \cap (B - N(B)) \subset B_2$ gilt. Dann existieren zwei solche Punkte x und y, daß $x \in B_1$, $y \in B_2$ ist und für jede Zelle D, für die $x \in D - N(D)$, bzw. $y \in D - N(D)$ ist, $(D - N(D)) \cap B_2 \neq 0$, bzw. $(D - N(D)) \cap B_1 \neq 0$ gilt.

Axiom VI. Es sei $A \in \mathscr{S}$ und es seien die Axiome I und II für $\mathscr{S}$ erfüllt. Das Axiom VI ist für die Menge A bei $\mathscr{S}_0$ erfüllt, wenn folgendes gilt: Es existiert eine Teilung der Menge A durch $\mathscr{S}_0$, wobei mindestens eine Zelle der Teilung in $A - N(A)$ enthalten ist. Für jedes $B \subset A$, $B \in \mathscr{S}_0$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Teilung $\mathscr{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ der Zelle B durch $\mathscr{S}_0$, wobei $\delta(B_i) < \varepsilon$ für $i = 1, 2, \ldots, k$ und mindestens eine Zelle der Teilung $\mathscr{B}$ eine Teilmange von $B - N(B)$ ist.

Axiom VI'. Es sei $A \in \mathscr{S}$ und es seien die Axiome I und II für $\mathscr{S}$ erfüllt. Das Axiom VI' ist für die Menge A bei $\mathscr{S}_0$ erfüllt, wenn für sie das Axiom VI erfüllt ist, und wenn für jedes System $\{A_1, \ldots, A_k\}$ von Zellen aus $\mathscr{S}_0$ mit $A_i \subset A$ für jedes $i = 1, 2, \ldots, k$, eine solche Teilung $\mathscr{B}$ existiert, daß für jedes $i = 1, 2, \ldots, k$ das System $\{B : B \in \mathscr{B}, m(B \cap A_i) > 0\}$ eine Teilung der Zelle A_i durch $\mathscr{S}_0$ ist.

Es sei $A \in \mathscr{S}$ und $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$. Ferner sei $\gamma_{\mathscr{S}_0}(A)$ das Supremum aller Zahlen γ für welche eine solche Teilung $\{A_1, \ldots, A_k\}$ der Zelle A durch $\mathscr{S}_0$ existiert, daß $m(\cup \{A_i : A_i \cap N(A) = 0\}) \geqq \gamma m(A)$ ist. Die Zahl $\gamma_{\mathscr{S}_0}(A)$ ist sicher positiv, wenn für die Zelle A das Axiom VI bei $\mathscr{S}_0$ gilt. In diesem Fall existiert dann zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $\gamma' < \gamma_{\mathscr{S}_0}(A)$ eine solche Teilung $\{A_1, \ldots, A_k\}$ der Zelle A durch $\mathscr{S}_0$, daß $\delta(A_i) < \varepsilon$ für $i = 1, 2, \ldots, k$ und $m(\cup \{A_i : A_i \cap N(A) = 0\}) > \gamma' m(A)$ ist.

Axiom VII. Es sei $A \in \mathscr{A}$ und seien die Axiome I und II für $\mathscr{S}$ erfüllt. Das Axiom VII ist für die Menge A bei $\mathscr{S}_0$ erfüllt, wenn folgendes gilt: Es sei $\{A_i\}_{i \in I}$ eine nichtsteigende Folge von Zellen, wobei $A_i \subset A$ für $i \in I$ und $\lim_{i \to \infty} \delta(A_i) = 0$ gilt. Dann ist entweder $\gamma_{\mathscr{S}_0}(A_i) = 1$ für unendlich viele i oder $\Pi\{1/(1 - \gamma_{\mathscr{S}_0}(A_i)) : \gamma_{\mathscr{S}_0}(A_i) < 1\} = \infty$ [3].

Axiom VIII. Es sei $A \in \mathscr{S}$ und es seien die Axiome I und II für $\mathscr{S}$ erfüllt. Das Axiom VIII ist für die Menge A bei $\mathscr{S}_0$ erfüllt, wenn folgendes gilt: Es sei $\mathscr{S}' \subset \mathscr{S}_0$

[3] $\Pi\{a_n : V(n)\}$ bedeutet das Produkt von den Zahlen a_n mit der Eigenschaft $V(n)$. Ähnlich bedeutet $\sum\{a_n : V(n)\}$ die Summe von den Zahlen a_n mit der Eigenschaft $V(n)$.

ein solches System, daß zu jedem $x \in A - N(A)$ und für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein solches $B \in \mathscr{S}'$ existiert, daß $x \in B \subset A - N(A)$ und $\delta(B) < \varepsilon$ ist. Dann existiert ein höchstens abzählbares System $\bar{\mathscr{S}}' \subset \mathscr{S}'$, daß $C = \cup\{B : B \in \bar{\mathscr{S}}'\} \subset A - N(A)$ und $m((A - N(A)) - C) = 0$ ist.

Wir führen noch eine Funktion ϱ ein. Es sei $\varrho(A_1, A_2) = m(A_1 \Delta A_2)$ (4) für $A_1, A_2 \in \mathscr{S}$.

Lemma 1. *Es sei $A \in \mathscr{S}$, $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$. Die Axiome* I *und* II *seien für das System $\mathscr{S}$ erfüllt. Die Axiome* III *und* VI′ *seien für A bei $\mathscr{S}_0$ erfüllt. Dann gilt $\gamma_{\mathscr{S}_0}(A) = 1$, wenn das Axiom* VIII *für die Menge A bei $\mathscr{S}_0$ erfüllt ist.*

Beweis. Da das Axiom III für die Zelle A bei $\mathscr{S}_0$ erfüllt ist, existiert zu jedem $x \in A - N(A)$ und beliebigen $\varepsilon > 0$ eine solche Zelle $B_\varepsilon(x) \in \mathscr{S}_0$, daß $x \in B_\varepsilon(x) \subset$ $\subset A - N(A)$ und $\delta(B_\varepsilon(x)) < \varepsilon$ ist. Hieraus ist ersichtlich, daß ein System $\mathscr{S}'$ mit den Eigenschaften aus dem Axiom VIII existiert. Dann gibt es aber auch ein höchstens abzählbares System $\bar{\mathscr{S}}'$ mit der Eigenschaft aus dem Axiom VIII.

Es sei nun $\gamma < 1$. Dann existiert ein endliches Teilsystem $\{A_1, \ldots, A_n\}$ des Systems $\bar{\mathscr{S}}'$, daß

$$m(\cup\{A_i : i = 1, 2, \ldots, n\}) > \gamma m(A - N(A)) = \gamma m(A) \tag{1}$$

ist. Aus dem Axiom VI′ geht hervor, daß eine solche Teilung $\{B_1, \ldots, B_k\}$ der Zelle A durch $\mathscr{S}_0$ existiert, daß für $j = 1, 2, \ldots, n$ das System $\{B_i : m(B_i \cap A_j) > 0\}$ eine Teilung der Zelle A_j durch $\mathscr{S}_0$ ist. Aus (1) folgt

$$m(\cup\{B_i : B_i \cap N(A) = 0\}) \geqq m(\cup\{A_j : j = 1, 2, \ldots, n\}) > \gamma m(A). \tag{2}$$

Jetzt ist es klar, daß $\gamma_{\mathscr{S}_0}(A) = 1$ ist.

Das Axiom I sei für das System $\mathscr{S}$ erfüllt. Es sei $x \in X$ und $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$. Weiter sei g eine reelle Funktion die auf dem System $\mathscr{S}_0$ definiert ist. Dann werden wir die Zahl

$$\underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0} g(x) = \sup\{\inf\{g(A)/m(A) : x \in A \in \mathscr{S}_0,\ \delta(A) < \varepsilon\} : \varepsilon > 0\}$$

als untere Ableitung der Funktion g bei $\mathscr{S}_0$ in dem Punkt x, und die Zahl

$$\overline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0} g(x) = \inf\{\sup\{g(A)/m(A) : x \in A \in \mathscr{S}_0,\ \delta(A) < \varepsilon\} : \varepsilon > 0\}$$

als obere Ableitung der Funktion g bei $\mathscr{S}_0$ in dem Punkt x bezeichnen. Wenn $-\infty < \underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0} g(x) = \overline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0} g(x) < \infty$ gilt, dann sagen wir, daß die Funktion g im Punkt x die Ableitung bei $\mathscr{S}_0$ besitzt. Die Funktion g hat die Ableitung bei $\mathscr{S}_0$ auf der Menge A, wenn sie die Ableitung bei $\mathscr{S}_0$ in jedem Punkt der Menge A besitzt. Die Ableitung der Funktion g bei $\mathscr{S}_0$ bezeichnen wir $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} g$.

Es sei $A \subset X$. Ferner sei g eine reelle Funktion die auf dem System $\{B : B \subset A, B \in \mathscr{A}\}$ definiert ist. Die Funktion g wird additiv auf A in bezug $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$ genannt.

(4) $A_1 \Delta A_2$ bedeutet die symetrische Differenz der Mengen A_1 und A_2, d. h. die Menge $(A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_1)$.

wenn für jedes $B \subset A$, $B \in \mathscr{A}$ und für jede ihre Teilung $\mathscr{B}$ durch $\mathscr{S}_0$ die Gleichung

$$g(B) = \sum \{g(C) : C \in \mathscr{B}\} \tag{3}$$

erfüllt ist.

Lemma 2. *Das Axiom* I *sei für das System* $\mathscr{S}$ *erfüllt. Es sei* $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$. *Weiter sei* $A \in \mathscr{S}$ *und die Axiome* IV *und* VI *seien für die Menge* A *bei* $\mathscr{S}_0$ *erfüllt. Ferner sei* g *eine auf* A *additive Funktion in bezug auf* $\mathscr{S}_0$. *Es sei* $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) \geqq 0$ $(\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) \leqq 0)$ *für jedes* $x \in A$. *Dann gilt* $g(A) \geqq 0$ $(g(A) \leqq 0)$.

Beweis. Wir werden nur die Behauptung $g(A) \geqq 0$ beweisen; die Behauptung für $g(A) \leqq 0$ beweist man ähnlich.

Es sei $g(A) < 0$ und $\{A_1, \ldots, A_n\}$ eine beliebige Teilung der Menge A durch $\mathscr{S}_0$. Aus (3) folgt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m(A_i)}{m(A)} \frac{g(A_i)}{m(A_i)} \frac{m(A)}{g(A)} = 1. \tag{4}$$

Es gilt auch

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m(A_i)}{m(A)} = 1. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt, daß ein solches i existiert, daß

$$\frac{g(A_i)}{m(A_i)} \frac{m(A)}{g(A)} \geqq 1 \tag{6}$$

ist. Aus (6) folgt nun

$$g(A_i)/m(A_i) \leqq g(A)/m(A). \tag{7}$$

Auf Grund dieser Betrachtung folgt aus dem Axiom VI, daß man eine Folge $\{A_i\}_{i \in I}$ von Zellen aus $\mathscr{S}_0$ konstruieren kann, welche die folgende Eigenschaft hat:

$$\delta(A_i) < 1/i, \quad A_{i+1} \subset A_i \subset A \quad \text{und} \quad g(A_{i+1})/m(A_{i+1}) \leqq g(A_i)/m(A_i) \tag{8}$$

für jedes $i \in I$. Aus dem Axiom IV folgt nun, daß ein solches $x \in A$ existiert, daß $x \in \cap \{A_i : i \in I\}$ ist. Aus (8) und aus der Definition $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0}g$ folgt

$$\underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}g(x) \leqq g(A_1)/m(A_1) < 0.$$

Das aber widerspricht den Voraussetzungen des Lemmas.

Ähnlich beweist man folgendes Lemma:

Lemma 3. *Das Axiom* I *sei für das System* $\mathscr{S}$ *erfüllt. Es sei* $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$. *Ferner sei* $A \in \mathscr{S}$ *und die Axiome* IV *und* VI *seien für die Menge* A *bei* $\mathscr{S}_0$ *erfüllt. Weiter sei* g *eine auf* A *additive Funktion in bezug auf* $\mathscr{S}_0$. *Es sei* $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) > 0$ $(\overline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}g(x) < 0)$ *für jedes* $x \in A$. *Dann gilt* $g(A) > 0$ $(g(A) < 0)$.

Lemma 4. *Die Axiome* I *und* II *seien für das System* $\mathscr{S}$ *erfüllt. Es sei* $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$. *Ferner sei* $A \in \mathscr{S}$ *und die Axiome* IV, VI *und* VII *seien für die Menge* A *bei* $\mathscr{S}_0$ *erfüllt.*

Es sei g eine auf A additive Funktion in bezug auf $\mathscr{S}_0$. Weiter sei $-\infty < \overline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x)$ $(\overline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) < \infty)$ für jedes $x \in A$ und $\overline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) \geqq 0$ $(\overline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) \leqq 0)$ für jedes $x \in \in A - N(A)$. Dann gilt $\underline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) \geqq 0$ $(\overline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) \leqq 0)$ für jedes $x \in A$.

Beweis. Wir werden nur die Behauptung bezüglich $\underline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x)$ beweisen.

Es sei $x_0 \in A$ und $\underline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) < 0$. Dann kann eine Folge $\{A_i\}_{i \in I}$ von Zellen aus $\mathscr{S}_0$ und zwei Zahlenfolgen $\{\varepsilon_i\}_{i \in I}$ und $\{\gamma'_i\}_{i \in I}$ mit den Eigenschaften (9)–(12) konstruiert werden:

Es gilt

$$A_{i+1} \subset A_i \subset A, \qquad \delta(A_i) < 1/i, \tag{9}$$

$$0 < \varepsilon_i \leqq 1, \qquad \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i > 1/2 \qquad \text{für} \qquad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$0 \leqq (1 - \gamma_{\mathscr{S}_0}(A_i))/\varepsilon_i < 1. \tag{10}$$

Falls $\gamma_{\mathscr{S}_0}(A_i) = 1$ ist, dann gilt $\varepsilon_i = 1$ und $\gamma'_i = 1/2$, wenn $\gamma_{\mathscr{S}_0}(A_i) < 1$ ist, dann gilt

$$\gamma'_i = 1 - (1 - \gamma_{\mathscr{S}_0}(A_i))/\varepsilon_i. \tag{11}$$

Weiter gilt

$$g(A_{i+1})/m(A_{i+1}) \leqq (1/(1 - \gamma'_i))\,(g(A_i)/m(A_i)) \tag{12}$$

für jedes $i \in I$.

Aus der Voraussetzung $\underline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x_0) < 0$ geht hervor, daß mindestens ein $A_1 \in \mathscr{S}_0$ mit $\delta(A_1) < 1$, $A_1 \subset A$ und $g(A_1) < 0$ existiert. Die Zellen $A_1, \dots, A_n$ aus $\mathscr{S}_0$, die Zahlen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ und $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{n-1}$ seien schon so konstruiert werden. Dann muß $g(A_n) < 0$ sein, weil $g(A_1) < 0$ ist. Falls $\gamma_{\mathscr{S}_0}(A_n) = 1$ ist, dann sei $\varepsilon_n = 1$ und $\gamma'_n = 1/2$. Wenn $0 < \gamma_{\mathscr{S}_0}(A_n) < 1$ ist, dann wählt man ε_n und γ'_n so, daß

$$0 < \varepsilon_n < 1, \qquad 1/2 < \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i, \qquad (1 - \gamma_{\mathscr{S}_0}(A_n))/\varepsilon_n < 1$$

und

$$\gamma'_n = 1 - (1 - \gamma_{\mathscr{S}_0}(A_n))/\varepsilon_n \tag{13}$$

ist.

Es ist

$$\gamma'_n < \gamma_{\mathscr{S}_0}(A_n). \tag{14}$$

Aus (14) und aus dem Axiom VI folgt, daß eine solche Teilung $\{B_1, \dots, B_k\}$ der Zelle A_n durch $\mathscr{S}_0$ existiert, daß $\delta(B_i) < 1/(n+1)$ für $i = 1, 2, \dots, k$ und

$$m(\cup \{B_i : B_i \cap N(A_n) = 0\}) > \gamma'_n m(A_n) \tag{15}$$

gilt. Da die Funktion g additiv auf A in bezug auf $\mathscr{S}_0$ ist, so gilt die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m(B_i)}{m(A_n)} \, \frac{g(B_i)}{m(B_i)} \, \frac{m(A_n)}{g(A_n)} = 1. \tag{16}$$

Aus dem Lemma 2 geht hervor, daß $g(B_i)$ für jedes i aus der Menge $\{1, 2, \ldots, k\}$, für welches $B_i \cap N(A_n) = \emptyset$ gilt, nicht negativ ist. Demnach gilt

$$\sum \left\{ \frac{m(B_i)}{m(A_n)} \frac{g(B_i)}{m(B_i)} \frac{m(A_n)}{g(A_n)} : B_i \cap N(A_n) \neq \emptyset \right\} \geqq 1. \tag{17}$$

Aus (15) folgt

$$\Sigma\{m(B_i) : B_i \cap N(A_n) \neq \emptyset\} < (1 - \gamma_n') \, m(A_n).$$

Somit gilt auch

$$\Sigma \{m(B_i)/m(A_n) : B_i \cap N(A_n) \neq \emptyset\} < 1 - \gamma_n'. \tag{18}$$

Aus den Ungleichheiten (17) und (18) folgt, daß mindestens ein i_0 aus der Menge $\{1, 2, \ldots, k\}$ existiert, daß

$$(g(B_{i_0})/m(B_{i_0}))(m(A_n)/g(A_n)) \geqq 1/(1 - \gamma_n') \tag{19}$$

ist. Jetzt setzt man $A_{n+1} = B_{i_0} \subset A_n$. So ist $\delta(A_{n+1}) < 1/(n + 1)$, und aus (19) folgt

$$g(A_{n+1})/m(A_{n+1}) \leqq 1/(1 - \gamma_n') \, g(A_n)/m(A_n).$$

Es ist nun klar, daß man durch vollständige Induktion die Folge $\{A_i\}_{i \in I}$ und die Zahlenfolgen $\{\varepsilon_i\}_{i \in I}$ und $\{\gamma_i'\}_{i \in I}$ mit den Eigenschaften (9)–(12) konstruieren kann.

Aus (9) und aus dem Axiom IV folgt, daß ein $\bar{x} \in \cap \{A_i : i \in I\}$ existiert. Aus (9) und (12) folgt auf Grund der Definition von $\underline{D}_{\mathscr{S}_0} g(\bar{x})$

$$\underline{D}_{\mathscr{S}_0} g(\bar{x}) - 1 \leqq g(A_{n+1})/m(A_{n+1}) \qquad \text{für} \qquad n \geqq N \tag{20}$$

wobei N eine geeignete Zahl ist. Aus (12) und (20) folgt

$$\underline{D}_{\mathscr{S}_0} g(\bar{x}) - 1 \leqq \left(\prod_{i=1}^{n} 1/(1 - \gamma_i')\right) g(A_1)/m(A_1) \qquad \text{für} \qquad n \geqq N \tag{21}$$

Aus dem Axiom VII erhält man auf Grund der Definition der Zahlen ε_n und γ_n'

$$\prod_{i=1}^{\infty} 1/(1 - \gamma_i') = \infty. \tag{22}$$

Man bekommt das durch diese Betrachtung: Wenn für unendlich viele n gilt $\gamma_{\mathscr{S}_0}(A_n) = 1$, dann ist $\gamma_n' = 1/2$ für unendlich viele n und in dem Produkt gibt es unendlich viele Zahlen die gleich 2 sind. Wenn $\gamma_{\mathscr{S}_0}(A_n) = 1$ nur für endlich viele n ist, dann gilt

$$\Pi\{1/(1 - \gamma_n') : \gamma_{\mathscr{S}_0}(A_n) < 1\} = \Pi\{\varepsilon_n/(1 - \gamma_{\mathscr{S}_0}(A_n)) : \gamma_{\mathscr{S}_0}(A_n) < 1\} \geqq$$
$$\geqq (\liminf_{n \to \infty} \Pi\{\varepsilon_i : i = 1, 2, \ldots, n\}) \, \Pi\{1/(1 - \gamma_{\mathscr{S}_0}(A_n)) : \gamma_{\mathscr{S}_0}(A_n) < 1\}$$

und

$$\Pi\{1/(1 - \gamma_n') : \gamma_{\mathscr{S}_0}(A_n) < 1\} = \infty,$$

weil

$$\liminf_{n \to \infty} \Pi\{\varepsilon_i : i = 1, 2, \ldots, n\} \geqq 1/2$$

und

$$\Pi\{1/(1-\gamma_{\mathscr{S}_0}(A_n)) : \gamma_{\mathscr{S}_0}(A_n) < 1\} = \infty$$

ist.

Aus (21) und (22) folgt, daß $\underline{D}_{\mathscr{S}_0}g(\bar{x}) = -\infty$ ist, was unmöglich wäre.

Lemma 5. *Die Axiome* I *und* II *seien für das System $\mathscr{S}$ erfüllt. Es sei $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$. Es sei $A \in \mathscr{S}$ und die Axiome* III, IV, V *und* VII *seien für die Zelle A bei $\mathscr{S}_0$ erfüllt. Ferner sei das Axiom* VI *für jedes $B \subset A$, $B \in \mathscr{S}_0$ erfüllt. Weiter sei g eine auf A additive Funktion in bezug auf $\mathscr{S}_0$. Es gelte $-\infty < \underline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) \leqq \overline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) < \infty$ für jedes $x \in A$. Es sei $\underline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) > 0$ oder $\overline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) < 0$ für jedes $x \in A - N(A)$. Dann gilt entweder $\underline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) > 0$ überall in $A - N(A)$ oder $\overline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) < 0$ überall in $A - N(A)$.*

Beweis. Wir werden annehmen, das Lemma sei ungültig. Dann existieren in $A - N(A)$ mindestens zwei solche Punkte x und y, daß $\underline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) > 0$ und $\overline{D}_{\mathscr{S}_0}g(y) < < 0$ ist. Zuerst wir beweisen, daß in $A - N(A)$ zwei Punkte x_1 und y_1 existieren, für welche folgendes gilt:

a) $$\underline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x_1) > 0 \quad \text{und} \quad \overline{D}_{\mathscr{S}_0}g(y_1) < 0, \tag{23}$$

b) für jedes $B \in \mathscr{S}_0$ mit der Eigenschaft $x_1 \in B - N(B)$, bzw. $y_1 \in B - N(B)$ existiert ein $z_1' \in B - N(B)$, bzw. $z_1'' \in B - N(B)$, so daß

$$\overline{D}_{\mathscr{S}_0}g(z_1') < 0, \quad \text{bzw.} \quad \underline{D}_{\mathscr{S}_0}g(z_1'') > 0 \tag{24}$$

gilt.

Es sei A_1, bzw. A_2 die Menge aller Punkte x aus $A - N(A)$ für welche $\underline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) > > 0$, bzw. $\overline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) < 0$ ist. Dann stellt $A - N(A) = A_1 \cup A_2$ eine Zerlegung der Menge $A - N(A)$ in zwei nichtleere disjunkte Teile dar. Es sei $B \in \mathscr{S}_0$, $B - N(B) \subset \subset A_1$, bzw. $B - N(B) \subset A_2$. Alsdann folgt aus dem Lemma 4, daß $B \cap (A - - N(A)) \subset A_1$, bzw. $B \cap (A - N(A)) \subset A_2$ ist. Aus dem Axiom V ist man die Existenz zwei solcher Punkte x_1 und y_1 evident.

Jetzt kann man durch vollständige Induktion vier Punktfolgen $\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_i\}_{i\in I}$, $\{z_i'\}_{i\in I}$ und $\{z_i''\}_{i\in I}$ und zwei Folgen $\{A_i\}_{i\in I}$ und $\{B_i\}_{i\in I}$ von Zellen aus $\mathscr{S}_0$ derart konstruieren, daß für jedes $i \in I$ gilt:

$$\begin{gathered}\delta(A_i) < 1/(2i-1), \quad \delta(B_i) < 1/(2i), \quad B_{i+1} \subset A_{i+1} - N(A_{i+1}) \subset \\ \subset A_{i+1} \subset B_i - N(B_i) \subset B_i \subset A - N(A),\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}x_i \in A_i - N(A_i), \quad y_i \in B_i - N(B_i), \quad g(A_i) > 0, \quad g(B_i) < 0, \\ \underline{D}_{\mathscr{S}_0}g(x_i) > 0, \quad \overline{D}_{\mathscr{S}_0}g(y_i) < 0,\end{gathered} \tag{26}$$

$$z_i' \in A_i - N(A_i), \quad z_i'' \in B_i - N(B_i), \quad \overline{D}_{\mathscr{S}_0}g(z_i') < 0, \quad \underline{D}_{\mathscr{S}_0}g(z_i'') > 0. \tag{27}$$

Es seien schon die Punkte $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$, $z_1', \ldots, z_n'$ und $z_1'', \ldots, z_n''$ und die Zellen $A_1, \ldots, A_n$ und $B_1, \ldots, B_n$ aus $\mathscr{S}_0$ so konstruiert, daß für sie (25), (26) und (27) gilt. Die Tatsache daß für B_n alle Axiome erfüllt sind welche für A erfüllt sind und daß $y_n \in B_n - N(B_n)$, $\overline{D}_{\mathscr{S}_0}g(y_n) < 0$, $z_n'' \in B_n - N(B_n)$, $\underline{D}_{\mathscr{S}_0}g(z_n'') > 0$ ist, ermöglicht uns für B_n ähnlich wie für A einen Punkt $x_{n+1} \in B_n - N(B_n)$ mit folgender Eigenschaft auszusuchen: $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} g(x_{n+1}) > 0$ und für jedes $B \in \mathscr{S}_0$, $x_{n+1} \in B - N(B)$ existiert ein Punkt $z \in B - N(B)$, daß $\underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0} g(z) < 0$ ist. Auf Grund der Annahme über x_{n+1} und des Axioms III existiert zu $1/(2n+1)$ eine Zelle $A_{n+1} \in \mathscr{S}_0$ und ein solcher Punkt $z'_{n+1} \in A_{n+1} - N(A_{n+1})$, daß $x_{n+1} \in A_{n+1} - N(A_{n+1})$, $\delta(A_{n+1}) < 1/(2n+1)$, $A_{n+1} \subset B_n - N(B_n)$, $g(A_{n+1}) > 0$ und $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} g(z'_{n+1}) < 0$ ist. Jetzt aber folgt ähnlich wie bei A auf Grund Annahme über x_{n+1} und z'_{n+1}, daß ein Punkt $y_{n+1} \in A_{n+1} - N(A_{n+1})$ mit folgender Eigenschaft existiert: $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} g(y_{n+1}) < 0$ und für jedes $B \in \mathscr{S}_0$, $y_{n+1} \in B - N(B)$, existiert ein solcher Punkt $z \in B - N(B)$, daß $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} g(z) > 0$ ist. Aus dem Axiom III und aus der Eigenschaft des Punktes y_{n+1} geht hervor, daß zu $1/(2n+2)$ eine Zelle $B_{n+1} \in \mathscr{S}_0$ und ein Punkt $z''_{n+1} \in B_{n+1} - N(B_{n+1})$ existieren, für welche die Bedingungen (25), (26) und (27) erfüllt sind.

Das System $\mathscr{S}^* = \{A_i : i \in I\} \cup \{B_i : i \in I\}$ ist ein monotones System von Zellen aus $\mathscr{S}_0$. Alle Elemente des Systems $\mathscr{S}^*$ sind Teilmengen von A. Aus dem Axiom IV folgt, daß der Durchschnitt $\cap \{C : C \in \mathscr{S}^*\}$ nicht leer ist. In diesem Durchschnitt existiert also mindestens ein Punkt $\bar{x}$. Aus (26) folgt, daß für den Punkt $\bar{x}$ folgendes gilt:

$$\underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0} g(\bar{x}) \leq \liminf_{i \to \infty} g(B_i)/m(B_i) \leq 0,$$

und

$$\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} g(\bar{x}) \geq \limsup_{i \to \infty} g(A_i)/m(A_i) \geq 0.$$

Da $\bar{x} \in B_1 \subset A - N(A)$ ist, widersprechen die beiden letzten Ungleichheiten der Voraussetzung, daß $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} g(x) > 0$ oder $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} g(x) < 0$ für jedes $x \in A - N(A)$ ist.

Aus dem Lemma 5 folgt unmittelbar das Lemma 6.

Lemma 6. *Es seien die Axiome* I *und* II *für das System* $\mathscr{S}$ *erfüllt. Ferner sei* $\mathscr{S}_0$ *ein Teilsystem des Systems* $\mathscr{S}$. *Weiter sei* $A \in \mathscr{S}$ *und die Axiome* III, IV, V *und* VII *seien für die Zelle* A *bei* $\mathscr{S}_0$ *erfüllt. Das Axiom* VI *sei für jedes* $B \subset A$, $B \in \mathscr{S}_0$ *erfüllt. Es sei* g *eine auf* A *additive Funktion in bezug auf* $\mathscr{S}_0$ *und für jedes* $x \in A$ *gelte* $-\infty < \underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0} g(x) \leq \mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} g(x) < \infty$. *Wenn zwei solche Punkte* x *und* y *aus* $A - N(A)$ *existieren, daß* $\underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0} g(x) > 0$ *und* $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} g(y) < 0$ *ist, dann existiert ein solcher Punkt* $\xi \in A - N(A)$, *für welchen* $\underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0} g(\xi) \leq 0 \leq \mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} g(\xi)$ *gilt.*

Beweis. Für jeden Punkt u aus A trifft genau eine von diesen drei Möglichkeiten zu: 1. $\underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0} g(u) \leq \mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} g(u) < 0$, 2. $\underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0} g(u) \leq 0 \leq \mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} g(u)$ oder 3. $0 < \underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0} g(u) \leq \mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} g(u)$. Aus dem Lemma 5 und aus der Existenz der Punkte x und y folgt, daß mindestens für einen Punkt aus $A - N(A)$ die zweite Möglichkeit zutrifft.

Die Punktfunktion g, die auf der Zelle $A \in \mathscr{S}$ definiert ist, hat auf A die Eigenschaft von Darboux im starken Sinne, wenn sie folgende Eigenschaft hat: Es sei $a = g(x) < c < b = g(y)$, $x, y \in A$. Dann existiert ein Punkt $\xi \in A - N(A)$ in dem $g(\xi) = c$ ist.

Satz 1. *Es seien die Axiome* I *und* II *für das System* $\mathscr{S}$ *erfüllt. Ferner sei* $\mathscr{S}_0$ *ein Teilsystem des Systems* $\mathscr{S}$. *Es sei* $A \in \mathscr{S}$ *und die Axiome* III, IV, V *und* VII *seien für die Zelle* A *bei* $\mathscr{S}_0$ *erfüllt. Das Axiom* VI *sei für jedes* $B \subset A$, $B \in \mathscr{S}_0$ *erfüllt. Es sei* g *eine auf* A *additive Funktion in bezug auf* $\mathscr{S}_0$. *Wenn die Funktion* g *die Ableitung bei* $\mathscr{S}_0$ *auf der Zelle* A *besitzt, dann hat die Ableitung* $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0}g$ *auf* A *die Eigenschaft von Darboux im starken Sinne.*

Beweis. Es sei $a = \mathrm{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) < c < b = \mathrm{D}_{\mathscr{S}_0}g(y)$. Ferner sei $h(B) = g(B) - cm(B)$ für jedes $B \in \mathscr{A}$ für das g definiert ist. Dann gilt $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0}h(u) = \mathrm{D}_{\mathscr{S}_0}g(u) - c$ für jedes $u \in A$. Weiter ist $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) = a - c < 0$ und $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0}g(y) = b - c > 0$. Aus dem Lemma 4 folgt, daß man Punkte $\bar{x}$ und $\bar{y}$ aus $A - N(A)$ mit $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0}h(\bar{x}) < 0$, bzw. $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0}h(\bar{y}) > 0$ finden kann. Aus dem Lemma 6 folgt, daß ein solcher Punkt $\xi \in$ $\in A - N(A)$ existiert, für den $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0}h(\xi) = 0$ ist. Es gilt demnach $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0}g(\xi) = c$.

Lemma 7. *Die Axiome* I *und* II *seien für das System* $\mathscr{S}$ *erfüllt. Ferner sei* $\mathscr{S}_0$ *ein Teilsystems* $\mathscr{S}$. *Weiter sei* $A \in \mathscr{S}$ *und die Axiome* IV, V *und* VII *seien für die Zelle* A *bei* $\mathscr{S}_0$ *erfüllt. Es sei* g *eine auf* A *additive Funktion in bezug auf* $\mathscr{S}_0$. *Es sei* $-\infty < \underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}g(x) \leqq \overline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}g(x) < \infty$ *für jeden* $x \in A$ *und* $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) > 0$ $(\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0}g(x) < 0)$ *für jedes* $x \in A - N(A)$. *Dann gilt* $g(A) > 0$ $(g(A) < 0)$.

Beweis. Wir werden die Behauptung bezüglich $g(A) > 0$ beweisen. Zunächst wird gezeigt, daß für keine Zelle $B \subset A$, $B \in \mathscr{S}_0$, $g(B)$ negativ sein kann.

Aus den Voraussetzungen des Lemmas und aus dem Lemma 4 geht hervor, daß $\underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}g(x) \geqq 0$ für jedes $x \in A$. So gilt auch $\underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}g(x) \geqq 0$ für jedes $x \in B$. Aus dem Lemma 2 folgt nun, daß $g(B) \geqq 0$.

Aus dem Axiom VI folgt, daß eine solche Teilung $\mathscr{B}$ der Zelle A durch $\mathscr{S}_0$ existiert, für die mindestens eine Zelle von $\mathscr{B}$ eine Teilmenge von $A - N(A)$ ist. Aus dem Lemma 3 und aus dem bereits bewiesenen geht hervor, daß die Ungleichheit

$$g(A) = \Sigma\{g(b) : B \in B,\ B \cap N(A) \neq 0\} + \Sigma\{g(B) : B \in \mathscr{B},$$
$$B \cap N(A) = 0\} \geqq \Sigma\{g(B) : B \in B,\ B \cap N(A) = 0\} > 0$$

gilt.

Satz 2. *Es seien die Axiome* I *und* II *für das System* $\mathscr{S}$ *erfüllt. Ferner sei* $\mathscr{S}_0$ *ein Teilsystem des Systems* $\mathscr{S}$. *Weiter sei* $A \in \mathscr{S}$ *und die Axiome* III, IV, V, VI *und* VII *seien für die Zelle* A *bei* $\mathscr{S}_0$ *erfüllt. Es sei* g *eine auf* A *additive Funktion in bezug* $\mathscr{S}_0$. *Es gelte* $-\infty < \underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}g(x) \leqq \overline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}g(x) < \infty$ *für jedes* $x \in A$. *Dann existiert mindestens ein Punkt* $\xi \in A - N(A)$ *für den* $\underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}g(\xi) \leqq g(A)/m(A) \leqq \overline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}g(\xi)$ *gilt.*

Beweis. Es sei $h(B) = g(B) - (g(A)/m(A))\, m(B)$ für jedes $B \in \mathscr{A}$, für welches die Funktion g definiert ist. Dann ist $h(A) = 0$, $\underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}h(x) = \underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}g(x) - g(A)/m(A)$ und $\overline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}h(x) = \overline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}u(x) - g(A)/m(A)$ für jedes $x \in A$. Für jeden Punkt $x \in A$ trifft genau eine von den folgenden drei Möglichkeiten zu: 1. $\underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}h(x) \leqq \overline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}h(x) < 0$, 2. $\underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}h(x) \leqq 0 \leqq \overline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}h(x)$ oder 3. $0 < \underline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}h(x) \leqq \overline{\mathrm{D}}_{\mathscr{S}_0}h(x)$. Wir wollen jetzt zeigen, daß die erste Möglichkeit nicht in jedem Punkt aus $A - N(A)$ gelten kann. Wenn die erste Möglichkeit in jedem Punkt aus $A - N(A)$ gilt, dann folgt aus dem

Lemma 7, daß $h(A) < 0$ ist. Das widerspricht jedoch der Gleichung $h(A) = 0$. Aus ähnlichen Gründen kann nicht überall in $A - N(A)$ die dritte Möglichkeit gelten. Wenn also die erste oder die dritte Möglichkeit in irgendeinem Punkt aus $A - N(A)$ gilt, dann muß auch die zweite Möglichkeit mindestens in einem Punkt aus $A - N(A)$ bestehen. Dies folgt aus dem Lemma 6. So haben wir bewiesen, daß bei unseren Voraussetzungen mindestens für einen Punkt $\xi \in A - N(A)$ die zweite Möglichkeit erfüllt ist, d. h.

$$\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} h(\xi) \leqq 0 \leqq \mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} h(\xi). \tag{28}$$

Aus (28) folgt jetzt unsere Behauptung.

Zusatz. *Die Axiome* I *und* II *seien für das System* $\mathscr{S}$ *erfüllt. Es sei* $A \in \mathscr{S}$ *und* $\mathscr{S}_0$ *ein Teilsystems* $\mathscr{S}$. *Die Axiome* III, IV, V, V *und* VII *seien für die Zelle* A *bei* $\mathscr{S}_0$ *erfüllt. Ferner sei* g *eine auf* A *additive Funktion in bezug auf* $\mathscr{S}_0$. *Wenn* g *auf* A *die Ableitung bei* $\mathscr{S}_0$ *besitzt, dann existiert mindestens ein Punkt* $\xi \in A - N(A)$ *für den* $g(A) = \mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} g(\xi)\, m(A)$ *ist.*

Satz 3. *Die Axiome* I *und* II *seien für das System* $\mathscr{S}$ *erfüllt. Es sei* $A \in \mathscr{S}$ *und* $\mathscr{S}_0$ *ein Teilsystem des Systems* $\mathscr{S}$. *Die Axiome* III, IV, V *und* VII *seien für die Zelle* A *bei* $\mathscr{S}_0$ *erfüllt. Es sei* g *eine auf* A *additive Funktion in bezug auf* $\mathscr{S}_0$. *Ferner sei für* g *und* $\mathscr{S}$ *noch die folgende Bedingung erfüllt: Es existiert seine Folge* $\{A_i\}_{i \in I}$ *von Zellen aus* $\mathscr{S}$ *für welche*

$$A_i \subset A_{i+1} \subset A - N(A), \tag{29}$$

$$\lim_{i \to \infty} \varrho(A, A_i) = 0, \tag{30}$$

$$\lim_{i \to \infty} g(A_i) = g(A) \tag{31}$$

und das Axiom VI *für jedes* A_i *bei* $\mathscr{S}_0$ *erfüllt ist. Für die Folge* $\{A_i\}_{i \in I}$ *existiert weiter für jedes* A_{i+1} *eine solche Teilung* $\mathscr{B}$ *der Zelle* A_{i+1} *durch* $\mathscr{S}_0$, *daß System* $\{B : B \in \mathscr{B}, m(B \cap A_i) > 0\}$ *eine Teilung der Zelle* A_i *ist. Wenn die Funktion* g *auf* A *die Ableitung bei* $\mathscr{S}_0$ *besitzt, dann existiert mindestens ein Punkt* $\xi \in A - N(A)$ *für den*

$$g(A) = \mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} g(\xi)\, m(A) \tag{32}$$

gilt.

Beweis. Wir führen die Funktion

$$h(B) = g(B) - (g(A)/m(A))\, m(B) \tag{33}$$

für jedes $B \in \mathscr{A}$, für welches die Funktion g definiert ist, ein, Es ist $h(A) = 0$ und $\mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} h(x) = \mathrm{D}_{\mathscr{S}_0} g(x) - g(A)/m(A)$ für $x \in A$. Es existiert eine steigende Folge $\{A_i\}_{i \in I}$ von Zehlen aus $\mathscr{S}$, für welche (29), (30) und (31) sowie das Axiom VI erfüllt sind.

Aus (33) folgt

$$|h(A) - h(A_i)| \leqq |g(A) - g(A_i)| + (|g(A)|/m(A))\,|m(A) - m(A_i)| \leqq$$
$$\leqq |g(A) - g(A_i)| + (|g(A)|/m(A))\,\varrho(A, A_i). \tag{34}$$

Aus (30), (31) und (34) folgt

$$\lim_{i \to \infty} h(A_i) = h(A) = 0.$$

Aus den Definitionen der Axiome ist ersichtlich, daß für A_i, $i \in I$, die Axiome III, IV, V und VII erfüllt sind. Es kann nicht für jedes $x \in A_i$ und jedes $i \in I$ $D_{\mathscr{S}_0}h(x) > 0$ sein. Wäre es der Fall, dann müßte nach dem Lemma 3 $h(A_i) > 0$ sein. Wegen der Voraussetzung über A_i folgt dann für jedes A_i aus dem Lemma 2, daß für $i \in I$ $h(A_i) \leqq h(A_{i+1})$ ist. Dies widerspricht jedoch der Gleichung (35), weil $\lim_{i \to \infty} h(A_i) \geqq h(A_1) > 0$ ist. Aus denselben Gründen kann für jedes $x \in A_i$ und jedes $i \in I$ $D_{\mathscr{S}_0}h(x) < 0$ nicht gelten. Es muß also ein i und zwei Punkte x_1, x_2 existieren für welche x_1, $x_2 \in A_i - N(A_i)$, $D_{\mathscr{S}_0}h(x_1) > 0$ und $D_{\mathscr{S}_0}h(x_2) < 0$ ist. Aus dem Satz 1 folgt jetzt, daß mindestens ein Punkt $\xi \in A_i - N(A_i)$ existiert, für den

$$D_{\mathscr{S}_0}h(\xi) = 0 \tag{36}$$

ist. Aus (36) ist die Gleichung (32) bereits evident.

Satz 4. *Die Axiome* I *und* II *seien für das System $\mathscr{S}$ erfüllt. Es sei $A \in \mathscr{S}$ und $\mathscr{S}_0$ ein Teilsystem des Systems $\mathscr{S}$. Die Axiome* III, IV, V, VI *und* VII *seien für die Zelle A bei $\mathscr{S}_0$ erfüllt. Ferner seien f und g zwei auf A additive Funktionen in bezug auf $\mathscr{S}_0$. Wenn f und g auf A die Ableitung bei $\mathscr{S}_0$ haben, und für jedes $x \in A$ $D_{\mathscr{S}_0}g(x) \neq 0$ ist, dann existiert ein Punkt $\xi \in A - N(A)$, für den*

$$D_{\mathscr{S}_0}f(\xi)/D_{\mathscr{S}_0}g(\xi) = f(A)/g(A) \tag{37}$$

gilt.

Beweis. Es sei $h(B) = f(B)\,g(A) - f(A)\,g(B)$ für jedes $B \in \mathscr{A}$, für welches die Funktionen f und g definiert sind. Dann ist $h(A) = 0$, $D_{\mathscr{S}_0}h(x) = g(A)\,D_{\mathscr{S}_0}f(x) - f(A)\,D_{\mathscr{S}_0}g(x)$ und h ist eine auf A additive Funktion in bezug auf $\mathscr{S}_0$. Laut des Zusatzes existiert ein Punkt $\xi \in A - N(A)$ für den $D_{\mathscr{S}_0}h(\xi) = 0$ ist, d. h. $g(A)\,D_{\mathscr{S}_0}f(\xi) - f(A)\,D_{\mathscr{S}_0}g(\xi) = 0$ ist. Da $D_{\mathscr{S}_0}g(\xi) \neq 0$ ist, gilt (37).

Es sei $X = E_n$ der Euklidische n-dimensionale Raum. Ferner sei $\mathscr{A}$ das System aller Mengen die im Sinne von Lebesgue meßbar sind, und m sei das Maß von Lebesgue. Es seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ Zahlen für welche $a_i < b_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt. Dann ist ein n-dimensionales abgeschlossenes Intervall $J = \langle a_1, b_1, \ldots a_n, b_n \rangle$ die Menge aller Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$ für welche $a_i \leqq x_i \leqq b_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt. Die Zahlen $b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n$ nennt man die Kanten des Intervalls J. Wenn das Verhältnis $b_1 - a_1 : b_2 - a_2 : \ldots : b_n - a_n$ rational ist, nennt man J ein Intervall mit rationalem Verhältnis der Kanten. Wenn alle Kanten gleich sind, bezeichnet man das Intervall als einen Würfel. Die Zahl $\Pi\{l_i/l : i = 1, 2, \ldots, n\}$, wobei $l =$

$= \max(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ und $l_1, l_2, \ldots, l_n$ die Kanten des Intervalls J sind, nennt man Parameter der Regularität des Intervalls J und man bezeichnet ihn mit $r(J)$. Man kann für das System $\mathscr{S}$ das System aller n-dimensionalen abgeschlossenen Intervalle wählen.

Für $A \in \mathscr{S}$ definieren wir die Norm $\delta(A)$ durch die Gleichung

$$\delta(A) = \sup \{\varrho(x, y) : x, y \in A\}.$$

Für $A \in \mathscr{S}$ kann man die Grenze der Menge A für $N(A)$ nehmen. Bei diesen Definitionen sind die Axiome I und II erfüllt.

Es sei $0 < \alpha \leqq 1$ und $\mathscr{S}_\alpha$ das System aller Intervalle J für welche $r(J) \geqq \alpha$ ist. Es ist evident, daß $\mathscr{S}_1$ das System aller Würfel ist. Es ist leicht zu zeigen, daß die Axiome III, IV und VII für jedes $A \in \mathscr{S}$ bei dem System $\mathscr{S}_\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$, erfüllt sind. Das Axiom VI ist für jedes Intervall mit rationalem Verhältnis der Kanten bei $\mathscr{S}_1$ erfüllt. Das Axiom VII ist für jedes Intervall aus $\mathscr{S}$ bei $\mathscr{S}_\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$ und auch bei $\mathscr{S}$ erfüllt.

Jetzt werden wir zeigen, daß das Axiom VI' für jedes $A \in \mathscr{S}$ bei $\mathscr{S}_\alpha$, $0 < \alpha < 1$ und das Axiom V für jedes $A \in \mathscr{S}$ bei $\mathscr{S}_\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$ und auch bei $\mathscr{S}$, erfüllt ist.

Man kann leicht beweisen, daß das Axiom VI' für jedes $A \in \mathscr{S}$ bei $\mathscr{S}_\alpha$, $0 < \alpha < 1$ gilt, wenn für jedes $A \in \mathscr{S}$ eine Teilung durch $\mathscr{S}_\alpha$ existiert. Dies geht aus dem folgenden Lemma hervor:

Lemma 8. *Es sei $n = 2, 3, 4, \ldots$. Es gelte $0 \leqq c_1 < c_2 \leqq \ldots \leqq c_n$ und $0 < \alpha < 1$. Dann existieren natürliche Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$, daß gilt:*

$$0 < c_1/p_1 \leqq c_2/p_2 \leqq \ldots \leqq c_n/p_n$$

und

$$(p_n^{n-1}/c_n^{n-1}) \prod \{c_i/p_1 : i = 1, 2, \ldots, n-1\} \geqq \alpha. \tag{38}$$

Beweis. Es sei $n = 2$. Da $\alpha < 1$ ist, gilt $\alpha c_2/c_1 < c_2/c_1$. Dann existieren mindestens zwei solche natürliche Zahlen p_1 und p_2, so daß

$$\alpha c_2/c_1 \leqq p_2/p_1 \leqq c_2/c_1 \tag{39}$$

gilt. Aus (39) folgt (38) für $n = 2$.

Es sei $n \geqq 3$ und die Behauptung für $n - 1$ sei bereits gültig. Da $0 < \sqrt[n]{\alpha} < 1$ ist, existieren natürliche Zahlen $p'_1, p'_2, \ldots, p'_{n-1}$, daß gilt:

$$0 < c_1/p'_1 \leqq c_2/p'_2 \leqq \ldots \leqq c_{n-1}/p'_{n-1}$$

und

$$(p'^{n-2}_{n-1}/c^{n-2}_{n-1}) \prod \{c_i/p_i : i = 1, 2, \ldots, n-2\} \geqq \sqrt[n]{\alpha}. \tag{40}$$

Für $\sqrt[n]{\alpha}$ und $0 < c_{n-1} \leqq c_n$ existieren zwei natürliche Zahlen p und q für die die Ungleichheiten

$$0 < c_{n-1}/p \leqq c_n/q \qquad \text{und} \qquad (q/c_n)(c_{n-1}/p) \geqq \sqrt[n]{\alpha} \tag{41}$$

gelten. Für die Zahlen $p_1 = p'_1 p$, $p_2 = p'_2 p$, ..., $p_{n-1} = p'_{n-1} p$ und $p_n = p'_{n-1} q$ folgt aus (40) und (41) die Gültigkeit von (38).

Lemma 9. *Es sei $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}' \subset \mathscr{S}$ und $A \in \mathscr{S}$. Ferner sei $A - N(A) = A_1 \cup A_2$ eine Zerlegung von $A - N(A)$ in zwei nichtleere disjunkte Teile mit der Eigenschaft: Für jedes $B \in \mathscr{S}'$ für welches $B - N(B) \subset A_1$, bzw. $B - N(B) \subset A_2$ ist, gilt $B \cap (A - N(A)) \subset A_1$, bzw. $B \cap (A - N(A)) \subset A_2$. Es sei A'_1, bzw. A'_2 die Menge aller Häufungspunkte der Menge A_1, bzw. A_2. Dann gilt $A_1 \cap A'_2 \neq 0$ und $A'_1 \cap A_2 \neq 0$.*

Beweis. Es sei $(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n) \in A_1$ und $(\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_n) \in A_2$. Betrachten wir die Punkte $(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_i, \bar{d}_{i+1}, \ldots, \bar{d}_n)$ für $i = 0, 1, 2, \ldots, n$(5). Es gibt offensichtlich ein derartiges i, für welches gilt $(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_{i+1}, \bar{d}_{i+2}, \ldots, \bar{d}_n) \in A_1$ und $(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_i, \bar{d}_{i+1}, \ldots, \bar{d}_n) \in A_2$. Es gibt also sogar zwei derartige Punkte $X_1 = (c_1, \ldots, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ und $X_2 = (c_1, \ldots, c_{i-1}, d_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ aus $A - N(A)$, daß $X_1 \in A_1$ und $X_2 \in A_2$ ist. Es sei $U(X_1, X_2)$ der Abschnitt mit den Endpunkten X_1 und X_2.

Es sei $Y_1 \in A_1 - A'_2$, bzw. $Y_2 \in A_2 - A'_1$. Dann ist das System $\mathscr{W}_1$, bzw. $\mathscr{W}_2$ aller Würfel $B \in \mathscr{S}_1$ mit dem Mittelpunkt im Y_1, bzw. Y_2 für welche $B - N(B)$ eine Teilmenge von A_1, bzw. A_2 ist, nicht leer. Die abgeschlossene Hülle von der Sume $\cup \{B : B \in \mathscr{W}_1\}$, bzw. $\cup \{B : B \in \mathscr{W}_2\}$ ist ebenfalls ein Würfel. Diesen Würfel werden wir mit $B_1(Y_1)$, bzw. $B_2(Y_2)$ bezeichnen. Für ihn gilt $B_1(Y_1) - N(B_1(Y_1)) \subset A_1$, bzw. $B_2(Y_2) - N(B_2(Y_2)) \subset A_2$. Es ist klar, daß aus der Definition von $B_1(Y_1)$, bzw. $B_2(Y_2)$ und aus der Beziehung $B_1(Y_1) \subset A - N(A)$, bzw. $B_2(Y_2) \subset A - N(A)$ die Existenz eines Punktes $Z_1 \in N(B_1(Y_1)) \cap A'_2$, bzw. $Z_2 \in N(B_2(Y_2)) \cap A'_1$ folgt. Da im Falle $B_1(Y_1) \subset A - N(A)$, bzw. $B_2(Y_2) \subset A - N(A)$ der Würfel $B_1(Y_1)$, bzw. $B_2(Y_2)$ eine Teilmenge von A_1, bzw. A_2 ist, ist Z_1, bzw. Z_2 aus $A_1 \cap A'_2$, bzw. $A'_1 \cap A_2$.

Wenn $X_1 \in A_1 \cap A'_2$, bzw. $X_2 \in A'_1 \cap A_2$ ist, dann ist die Menge $A_1 \cap A'_2$, bzw. $A'_1 \cap A_2$ nicht leer. Es sei $X_1 \in A_1 - A'_2$, bzw. $X_2 \in A_2 - A'_1$. Falls jetzt gilt $B_1(X_1) \subset A - N(A)$, bzw. $B_2(X_2) \subset A - N(A)$, dann ist $A_1 \cap A'_2 \neq 0$, bzw. $A'_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Wenn $B_1(X_1) \cap N(A) \neq \emptyset$, bzw. $B_2(X_2) \cap N(A) \neq 0$ gilt, dann wiederholen wir diese Betrachtung für den Durchschnitt der Menge $N(B_1(X_1))$ bzw. $N(B_2(X_2))$ mit dem Abschnitt $U(X_1, X_2)$.

Da der Abschnitt $U(X_1, X_2)$ eine endliche Länge und einen positiven Abstand von $N(A)$ hat, bekommt man durch Wiederholung dieser Methode die Behauptung des Lemmas.

Aus dem Lemma 9 folgt nun unmittelbar die Behauptung bezüglich des Axioms V.

Der Satz 1 befindet sich für additive Intervallfunktionen in den Arbeiten [2], S. 66 und [4]. In diesen Arbeiten nimmt man $\mathscr{S}_1$ für das System $\mathscr{S}_0$. In der Arbeit [2] wird von der Funktion g überdies noch die Stetigkeit verlangt. Der Satz 2 ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von [3] und des Satzes 3 aus [4]. In der Arbeit [3] wird von der Funktion g überdies noch die Stetigkeit verlangt. Nimmt man in dem

(5) Für den Fall $i = 0$ nehmen wir statt des Punktes $(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_i, \bar{d}_{i+1}, \ldots, \bar{d}_n)$ den Punkt $(\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_n)$.

Satz 2 $\mathscr{S}_1$ für $\mathscr{S}_0$, dann gilt der Satz 2 für jedes Intervall A mit rationalem Verhältnis der Kanten. Nimmt man in dem Satz 2 $\mathscr{S}_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, oder $\mathscr{S}$ für $\mathscr{S}_0$, dann gilt der Satz für jedes Intervall. Der Satz 3 ist eine Verallgemeinerung eines Satzes aus [2], S. 67. In dem Satz aus [2] wird die Stetigkeit von g gebraucht. Unsere Bedingung für die Funktion g im Satze 3 ist schwächer. Unsere Bedingung für die Funktion g im Satze 3 ist schwächer. Der Satz 4 ist eine Verallgemainerung des Satzes 4 aus [4].

LITERATUR

[1] Pauc Ch., Rutovitz D., *Essai d'une théorie de Ward-Denjoy pour fonctions de cellule*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 240 (1955), 1956—1958.

[2] Ridder J., *Über stetige, additive Intervallfunktionen in der Ebene*, Nieuv. Arch. Wiskde (2) 16 (1929), 55—69.

[3] Kametani Shunji, *A new formulation of mean value theorem*, Natur. Science Report of the Ochanomizu University, Tokyo, 1 (1951), 1—5.

[4] Mišík L., *Der Mittelwertsatz für additive Intervallfunktionen*, Fund. Math., XLV (1957), 64—70.

Eingelangt am 23. Jänner 1963.

ČSAV, Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied v Bratislave

К ТЕОРЕМЕ О СРЕДНЕМ ДЛЯ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ ЯЧЕЕК

Ладислав Мишик

Резюме

Пусть $(X, \mathscr{A}, m)$ — пространство с мерой. Пусть $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ — такая система, что $0 < m(A) < \infty$ для $A \in \mathscr{S}$. Элементы из $\mathscr{S}$ называются ячейками. Пусть $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$. Система $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{S}_0$ называется делением множества $A \in \mathscr{A}$, если $\mathscr{A}_0$ не более чем счетная система, $A = \cup \{C : C \in \mathscr{A}_0\}$, $m(B \cap C) = 0$ для $B, C \in \mathscr{A}_0$ и $C \cap B \neq 0$ для $C \in \mathscr{S}$ только при конечном числе множеств $B \in \mathscr{A}_0$.

Пусть δ — такая положительная функция, заданная на $\mathscr{S}$, что $\delta(A) \leqq \delta(B)$ для $A \subset B$ и $A, B \in \mathscr{S}$. Каждой ячейке поставлено в соответствие множество $N(A)$, причем $m(N(A)) = 0$. Пусть g — функция, заданная на $\mathscr{S}$. Положим $\underline{D}_{\mathscr{S}_0} g(x) = \sup \{\inf \{g(A)/m(A) : x \in A \in \mathscr{S}_0, \delta(A) < \varepsilon\} : \varepsilon > 0\}$ и $D_{\mathscr{S}_0} g(x) = \inf \{\sup \{g(A)/m(A) : x \in A \in \mathscr{S}_0, \delta(A) < \varepsilon\} : \varepsilon > 0\}$. Функция g называется аддитивной на A, если для всякого $B \subset A$ и для всякого деления $\mathscr{A}_0$ множества B имеет место $g(B) = \sum \{g(C) : C \in \mathscr{A}_0\}$.

Для ячейки A имеет место аксиома III, если для всякого $B \subset A$, $B \in \mathscr{S}$, для всякого $x \in B - N(B)$ и для всякого $\varepsilon > 0$ существует $C \in \mathscr{S}_0$, что $x \in C - N(C) \subset C \subset B - N(B)$ и $\delta(C) < \varepsilon$.

Для чяейки A имеет место аксиома IV, если выполняется: пусть $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — монотонная система ячеек из $\mathscr{S}_0$, содержащихся в A, тогда $\cap \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ непусто.

Для чяейки A имеет место аксиома V, если выполняется: пусть $B \subset A$, $B \in \mathscr{S}$, пусть $B - N(B) = B_1 \cup B_2$ — такое разбиение на два непустых непересекающихся слагаемых, что для каждого $C \in \mathscr{S}_0 \subset C - N(C) \subset B_1 (C - N(C) \subset B_2)$ имеет место $C \cap (B - N(B)) \subset$

$\subset B_1 (C \cap (B - N(B)) \subset B_2)$, тогда существуют такие точки $x \in B_1$ и $y \in B_2$, что для каждой ячейки D, для которой $x \in D - N(D)$ $(y \in D - N(D))$, имеет место $(D - N(D)) \cap B_2 \neq 0$ $((D - N(D)) \cap B_1 \neq 0)$.

Для ячейки A имеет место аксиома VI, если выполняется:

(а) существует деление ячейки A, причем хотя бы одна ячейка деления содержится в $A - N(A)$

(б) для каждого $B \subset A$, $B \in \mathscr{S}_0$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует деление $\mathscr{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ ячейки B, причем $\delta(B_i) < \varepsilon$ и хотя бы одна ячейка этого деления содержится в $B - N(B)$.

Пусть $\gamma_{\mathscr{S}_0}(A)$, $A \in \mathscr{S}$ — верхняя грань всех чисел γ, для которых существует такое деление $\{A_1, \ldots, A_k\}$ ячейки A, что $m(\cup \{A_i : A_i \cap N(A) = 0\}) \geqq \gamma m(A)$.

Для ячейки A имеет место аксиома VII, если выполняется: пусть $\{A_i\}$ — невозрастающая последовательность ячеек, содержащихся в A и $\lim \delta(A_i) = 0$, тогда либо $\gamma_{\mathscr{S}_0}(A_i) = 1$ для бесконечно многих i, либо $\Pi\{1/(1 - \gamma_{\mathscr{S}_0}(A_i)) : \gamma_{\mathscr{S}_0}(A_i) < 1\} = \infty$.

В работе доказаны, в частности (кроме других), следующие две теоремы:

Теорема 1. Пусть для $A \in \mathscr{S}$ имеют место аксиомы III, IV, V, VII. Пусть для каждого $B \subset A$, $B \in \mathscr{S}_0$ имеет место аксиома VI. Пусть g — аддитивная функция на A. Пусть $-\infty < \underline{D}_{\mathscr{S}_0} g(x) = D_{\mathscr{S}_0} g(x) = \overline{D}_{\mathscr{S}_0} g(x) < \infty$ для каждого $x \in A$. Тогда $D_{\mathscr{S}_0} g(x)$ имеет свойство Дарбу.

Теорема 2. Пусть для $A \in \mathscr{S}$ имеют место аксиомы III, IV, V, VI, VII, и пусть g — аддитивная функция на A. Пусть $-\infty < \underline{D}_{\mathscr{S}_0} g(x) \leqq \overline{D}_{\mathscr{S}_0} g(x) < \infty$ для каждого $x \in A$. Тогда существует такая точка $x \in A - N(A)$, что $\underline{D}_{\mathscr{S}_0} g(x) \leqq g(A)/m(A) \leqq \overline{D}_{\mathscr{S}_0} g(x)$.

Теоремы в настоящей работе являются обобщением некоторых теорем из работ [2], [3] и [4].