Ladislav Mišík

Bemerkungen über approximative Ableitung

Matematický časopis, Vol. 19 (1969), No. 4, 283--291

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126660

Matematický časopis 19 (1969), No. 4

BEMERKUNGEN ÜBER APPROXIMATIVE ABLEITUNG

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava

1. Es ist bekannt, daß die Ableitung jeder D*-Funktion aus der Klasse $\mathcal{M}'_*$ ist ([7], S. 397). J. Mařík hat eine allgemeinere Eigenschaft — als die Eigenschaft der D*-Funktion — gegeben, bei welcher die Behauptung über die Ableitung richtig ist ([7], S. 399). Wir werden jetzt zeigen, daß auch im Falle einer approximativen Ableitung eine ähnliche Behauptung gilt.

f wird eine reelle Funktion sein, welche auf einem Intervall J definiert ist. $f'_{\mathrm{ap}}(x)$ wird die endliche oder unendliche approximative Ableitung der Funktion f im Punkte x bedeuten, d. h. $f'_{\mathrm{ap}}(x) = \lim\limits_{t \to x} \mathrm{ap} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$ ([8], S. 218—219).

Es sei $a, b \in J$, $a < b$ und t eine Zahl; dann wird ${}_at^b = \left\{x : x \in \langle a, b), \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} < t\right\}$ und ${}^at_b = \left\{x : x \in (a, b\rangle, \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < t\right\}$ bedeuten. Wenn A eine Teilmenge von $(-\infty, \infty)$ ist, dann wird $|A|$ das äußere Lebesguemaß von A bedeuten.

Es ist evident, daß folgendes Lemma gilt:

Lemma 1. *Es sei $a < b < c$, $a, b, c \in J$. Dann gilt*

$$\min\left(\frac{f(a) - f(b)}{a - b}, \frac{f(b) - f(c)}{b - c}\right) \leqq \frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leqq \max\left(\frac{f(a) - f(b)}{a - b}, \frac{f(b) - f(c)}{b - c}\right). \tag{1}$$

Lemma 2. *Für $a, b \in J$ gilt:*

$$x \in {}_at^b \Rightarrow \langle x, b\rangle \subset {}_xt^b \cup {}^xt_b \Rightarrow |{}_xt^b| + |{}^xt_b| \geqq b - x\,, \tag{2}$$

$$y \in {}^at_b \Rightarrow \langle a, y\rangle \subset {}^at_y \cup {}_at^y \Rightarrow |{}^at_y| + |{}_at^y| \geqq y - a\,. \tag{3}$$

Beweis. Es genügt nur zu zeigen, daß $x \in {}_at^b \Rightarrow \langle x, b\rangle \subset {}_xt^b \cup {}^xt_b$ und $y \in {}_at^b \Rightarrow \langle a, y\rangle \subset {}^at_y \cup {}_at^y$ gilt.

Es sei $x \in {}_a t^b$. Es ist evident, daß $b \in {}^x t_b$ $\left(\text{weil } \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} = \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} < t \text{ ist}\right)$ ist. Es sei $x < u < b$ und $u \notin {}_x t^b$. Dann gilt $\dfrac{f(u)-f(b)}{u-b} \geqslant t$ und aus (1) folgt $\min\left(\dfrac{f(x)-f(u)}{x-u}, \dfrac{f(u)-f(b)}{u-b}\right) \leqq \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} < t$. Es ist also $\dfrac{f(u)-f(x)}{u-x} = \dfrac{f(x)-f(u)}{x-u} < t$, d. h. $u \in {}^x t_b$.

Die Behauptung $y \in {}^a t_b \Rightarrow \langle a, y\rangle \subset {}^a t_y \cup {}_a t^y$ beweist man ähnlich.

Lemma 3. *Es sei* $0 < \eta \leqq \frac{1}{2}$. *Es sei* $|{}_a t^b| > \eta(b-a)$. *Dann existiert ein Punkt* $x_0 \in \langle a, b\rangle$ *und eine Folge von abgeschlossenen Intervallen* $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ *so, daß*

a) $|J_n| \to 0$,
b) $x_0 \in J_n$ *für* $n = 1, 2, 3, \ldots$,
c) $|J_n \cap ({}_a t^{x_0} \cup {}^{x_0} t_b)| \geqq \eta |J_n|$ *für* $n = 1, 2, 3, \ldots$ (1).

Beweis. Wir werden voraussetzen, daß ein solcher Punkt und eine solche Folge nicht existieren. Wir werden zuerst folgende Behauptung beweisen: Es sei $u, v \in J$, $u < v$, $|{}_u t^v| > \eta(v-u)$, bzw. $|{}^u t_v| > \eta(v-u)$; dann existiert ein Punkt x, bzw. y so, daß folgendes gilt: $x \in {}_u t^v$, $u < x < v$, $v - x \leqq (1 - \frac{3}{4}\eta)(v-u)$ und $|{}_z t^v| < \eta(v-z)$ für jedes $z \in \langle x, v)$, bzw. $u < y < v$, $y \in {}^u t_v$, $y - u \leqq (1 - \frac{3}{4}\eta)(v-u)$ und $|{}^u t_z| < \eta(z-u)$ für jedes $z \in (u, y\rangle$.

Wir werden nur den ersten Teil der Behauptung beweisen. Es sei $u, v \in J$, $u < v$ und $|{}_u t^v| > \eta(v-u)$. Aus der Voraussetzung für den indirekten Beweis folgt die Existenz eines $\delta \in (0, \frac{1}{4}(v-u))$ so, daß $|{}_{v-h} t^v| < \eta h$ für $0 < h < \delta$ gilt. Wir setzen $w = v - \delta$. Wenn ${}_w t^v \neq \emptyset$ ist, dann können wir einen beliebigen Punkt aus dieser Menge für x wählen. Es sei jetzt ${}_w t^v = \emptyset$. Es sei σ das Supremum von ${}_u t^v$. Es ist evident, daß $\sigma \leqq w$, $\eta(v-u) < |{}_u t^v| \leqq \sigma - u$ ist. Wir wählen $x \in {}_u t^v$ so, daß $\sigma - \delta\eta < x$ ist. Dann gilt: $x - u > \sigma - u - \delta\eta > \eta(v-u) - \eta\frac{1}{4}(v-u) = \frac{3}{4}\eta(v-u)$. Daraus bekommen wir, daß $v - x \leqq (v-u) - (x-u) < (1 - \frac{3}{4}\eta)(v-u)$ ist. Es sei jetzt $x \leqq z < v$. Wenn $z \leqq \sigma$ ist, dann gilt $|{}_z t^v| \leqq \sigma - x < \delta\eta = \eta(v-w) \leqq \eta(v-z)$; wenn $z > \sigma$ ist, dann ist $|{}_z t^v| = 0 < \eta(v-z)$.

Es sei $x_0 = b$. Jetzt benützen wir den ersten Teil der Behauptung auf ${}_a t^{x_0}$. Dann bekommen wir ein x_1 so, daß $x_1 \in {}_a t^{x_0}$, $a < x_1 < b$, $x_0 - x_1 \leqq (1 - \frac{3}{4}\eta)(x_0 - a)$ und $|{}_z t^{x_0}| < \eta(x_0 - z)$ für $x_1 \leqq z < x_0$ ist. Auf Grund von Lemma 2 gilt $\langle x_1, x_0\rangle \subset {}_{x_1} t^{x_0} \cup {}^{x_1} t_{x_0}$. Da $|{}_{x_1} t^{x_0}| < \eta(x_0 - x_1)$ ist, muß $|{}^{x_1} t_{x_0}| > (1-\eta)(x_0 - x_1) \geqq \frac{1}{2}(x_0 - x_1)$ gelten. Es ist also $|{}^{x_1} t_{x_0}| > \eta(x_0 - x_1)$ und wir können

(1) Wenn $a = x_0$ ist, dann nehmen wir ${}_a t^{x_0} = \emptyset$; im Falle $x_0 = b$ nehmen wir ${}^{x_0} t_b = \emptyset$.

den zweiten Teil der Behauptutng auf ${}^{x_1}t_{x_0}$ benützen. Es existiert ein x_2 so, daß $x_1 < x_2 < x_0$, $x_2 \in {}^{x_1}t_{x_0}$, $x_1 - x_2 \leqq (1 - \frac{3}{4}\eta)(x_0 - x_1)$ und $|{}^{x_1}t_z| < \eta(z - x_1)$ für $x_1 < z \leqq x_2$ gilt. Da $|{}^{x_1}t_{x_2}| < \eta(x_2 - x_1)$ ist, muß folgendes gelten: $|{}_{x_1}t^{x_2}| > > (1 - \eta)(x_2 - x_1) \geqq \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \geqq \eta(x_2 - x_1)$. Daraus bekommen wir einen Punkt x_3 mit folgenden Eigenschaften: $x_1 < x_3 < x_2$, $x_3 \in {}_{x_1}t^{x_2}$, $x_2 - x_3 \leqq \leqq (1 - \frac{3}{4}\eta)(x_2 - x_1)$ und $|{}_z t^{x_2}| < \eta(x_3 - z)$ für $x_3 \leqq z < x_2$. Jetzt ist es klar, daß man in solcher Weise eine Folge $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ von Punkten mit folgenden Eigenschaften definieren kann:

(i) $x_{2i+2} \in {}^{x_{2i+1}}t_{x_{2i}}$ und $x_{2i+3} \in {}_{x_{2i+1}}t^{x_{2i+2}}$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$,
(ii) $x_{2i+1} < x_{2i+3} < x_{2i+2} < x_{2i}$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$,
(iii) $x_{i+1} - x_i \leqq (1 - \frac{3}{4}\eta)(x_i - x_{i-1})$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$,
(iv) $|{}^{x_{2i+1}}t_z| < \eta(z - x_{2i+1})$ für $x_{2i+1} < z \leqq x_{2i+2}$ und $|{}_z t^{x_{2i}}| < \eta(x_{2i} - z)$ für $x_{2i+1} \leqq z < x_{2i}$ und für $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Die Folge $\{\langle x_{2i+1}, x_{2i}\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ ist eine nichtsteigende Folge von abgeschlossenen Intervallen (nach (ii)), deren Länge gegen 0 konvergiert (nach (iii)). Ihr Durchschnitt ist eine Menge mit einem einzigen Punkt, den wir mit ξ bezeichnen. Es ist klar, daß $\xi = \lim_{i\to\infty} x_{2i+1} = \lim_{i\to\infty} x_{2i}$ ist. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine solche natürliche Zahl j, daß $x_{2j}, x_{2j+1} \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ ist. Da $\xi - \varepsilon < < x_{2j+1} < \xi < x_{2j+2} < \xi + \varepsilon$ und $x_{2j+2} \in {}^{x_{2j+1}}t_{x_{2j}}$ ist, ist $\langle x_{2j+1}, x_{2j+2}\rangle \subset \subset {}^{x_{2j+1}}t_{x_{2j+2}} \cup {}_{x_{2j+2}}t^{x_{2j+1}}$ nach dem Lemma 2. Es ist also entweder $\xi \in {}^{x_{2j+1}}t_{x_{2j+2}}$ oder $\xi \in {}_{x_{2j+1}}t^{x_{2j+2}}$. Nach dem Lemma 2 ist $\langle x_{2j+1}, \xi\rangle \subset {}^{x_{2j+1}}t_{\xi} \cup {}_{x_{2j+1}}t^{\xi}$ im ersten Falle und $\langle \xi, x_{2j+2}\rangle \subset {}^{\xi}t_{x_{2j+2}} \cup {}_{\xi}t^{x_{2j+2}}$ im zweiten Falle. Es ist also $|{}_{x_{2j+1}}t^{\xi}| \geqq \xi - x_{2j+1} - |{}^{x_{2j+1}}t_{\xi}|$ im ersten Falle und $|{}^{\xi}t_{x_{2j+2}}| \geqq x_{2j+2} - \xi - - |{}_{\xi}t^{x_{2j+2}}|$ im zweiten Falle. Wir wählen $Y = \langle x_{2j+1}, \xi\rangle$ im ersten Falle und $Y = \langle \xi, x_{2j+2}\rangle$ im zweiten Falle. Dann ist $|Y| < \varepsilon$, $\xi \in Y$ und

$$\frac{|Y \cap ({}_a t^{\xi} \cup {}^{\xi}t_b)|}{|Y|} = \begin{cases} \dfrac{|{}_{x_{2j+1}}t^{\xi}|}{|Y|} \geqq \dfrac{|Y| - |{}^{x_{2j+1}}t_{\xi}|}{|Y|} = 1 - \dfrac{|{}^{x_{2j+1}}t_{\xi}|}{\xi - x_{2j+1}} > 1 - \eta \geqq \frac{1}{2} \geqq \eta \\[2ex] \dfrac{|{}^{\xi}t_{x_{2j+2}}|}{|Y|} \geqq \dfrac{|Y| - |{}_{\xi}t^{x_{2j+2}}|}{|Y|} = 1 - \dfrac{|{}_{\xi}t^{x_{2j+2}}|}{x_{2j+2} - \xi} > 1 - \eta \geqq \frac{1}{2} \geqq \eta \end{cases}$$

im ersten, bzw. zweiten Falle. Dabei haben wir die Behauptung benützt, daß nach (iv) $|{}^{x_{2j+1}}t_{\xi}| < \eta(\xi - x_{2j+1})$, bzw. $|{}_{\xi}t^{x_{2j+2}}| < \eta(x_{2j+2} - \xi)$ ist, weil $x_{2j+1} < \xi < x_{2j+2}$, bzw. $x_{2j+3} < \xi < x_{2j+2}$ ist.

Aus dieser Betrachtung ist klar, daß ein Punkt $\xi \in (a, b)$ und eine Folge $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ von abgeschlossenen Intervallen so existieren, daß a) $|J_n| \to 0$; b) $\xi \in J_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und c) $|J_n \cap ({}_a t^{\xi} \cup {}^{\xi}t_b)| > \eta |J_n|$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Das ist aber ein Widerspruch, weil wir vorausgesetzt haben, daß es im Intervall

$\langle a, b\rangle$ keinen Punkt x_0 und keine Folge $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ von abgeschlossenen Intervallen mit den Eigenschaften a), b) und c) gibt.

Eine Funktion f ist aus der Klasse $\mathscr{M}'_*$ im Intervall J, wenn aus der Inklusion $(a, b) \subset \{x : f(x) \geqq k\}$, bzw. $(a, b) \subset \{x : f(x) \leqq k\}$ die Inklusion $\langle a, b\rangle \cap J \subset \subset \{x : f(x) \geqq k\}$, bzw. $\langle a, b\rangle \cap J \subset \{x : f(x) \leqq k\}$ für alle $a, b \in J$, $a < b$ und jede Zahl k folgt.

Satz 1. *Es sei f eine solche Funktion, welche am Intervall J definiert ist, in keinem Punkt von J einen uneigentlichen Limes weder von links noch von rechts hat und in jedem Punkt von J, in welchem ihr eigentlicher Limes von links, bzw. von rechts existiert, von links, bzw. von rechts stetig ist. Wenn die Funktion f in jedem Punkt von J die approximative Ableitung hat, dann ist $f'_{\mathrm{ap}} \in \mathscr{M}'_*$.*

Beweis. Es sei $\langle a, b\rangle \subset J$ und $f'_{\mathrm{ap}}(x) \geqq k$ für jedes $x \in (a, b)$. Jetzt werden wir zeigen, daß $f'_{\mathrm{ap}}(a) \geqq k$ und $f'_{\mathrm{ap}}(b) \geqq k$ ist. Wir werden die Ungleichungen $f'_{\mathrm{ap}}(a) \geqq k$ und $f'_{\mathrm{ap}}(b) \geqq k$ mit Hilfe des Lemma 4 (siehe S. 287) beweisen (2). Wir definieren: $g(x) = f(x) - kx$. Dann ist $g'_{\mathrm{ap}}(x) \geqq 0$ für jedes $x \in (a, b)$. Nach dem Lemma 4 muß g eine nichtfallende Funktion sein. Es existieren also $\lim_{x\to a^+} f(x)$ und $\lim_{x\to b^-} f(x)$. Nach der Voraussetzung über f ist $f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$ und $f(b) = \lim_{x\to b^-} f(x)$. Es ist also auch $\lim_{x\to a^+} g(x) = g(a)$ und $\lim_{x\to b^+} g(x) = g(b)$ und die Funktion g ist auf $\langle a, b\rangle$ nichtfallend. So bekommen wir, daß $g'_{\mathrm{ap}}(a) \geqq 0$ und $g'_{\mathrm{ap}}(b) \geqq 0$ ist. Daraus folgt, daß $f'_{\mathrm{ap}}(a) \geqq k$ und $f'_{\mathrm{ap}}(b) \geqq k$ gilt.

Es ist jetzt leicht zu sehen, daß $f'_{\mathrm{ap}} \in \mathscr{M}^*$ ist.

Eine Funktion ist eine D**-Funktion am Intervall J, wenn $\overline{f(\langle a, b\rangle)} \subset \langle \min (f(a), f(b)), \max (f(a), f(b))\rangle$ für jedes a und jedes b aus J, $a < b$, gilt.* Jede D*-Funktion ist aus der Klasse $\mathscr{M}'_*$ ([5], S. 412) und jede Funktion aus der Klasse $\mathscr{M}'_*$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 1.

2. Z. Zahorski hat eine solche reelle Funktion einer reellen Veränderlichen aus der ersten Baireschen Klasse mit der Eigenschaft von Darboux (d. h. das Bild jeder zusammenhängenden Menge ist eine zusammenhängende Menge) konstruiert, welcher eine approximative Ableitung aus der zweiten Baireschen Klasse ist und die Eigenschaft von Darboux hat ([9], S. 321—323) (3). A. M. Bruckner ([1], S. 24) hat bewiesen: Wenn f und f'_{ap} Funktionen aus der

---

(2) Für den Gedanken des Beweises danke ich Herrn J. Mařík. Mein ursprünglicher Beweis war länger als der jetzige.

(3) In dem Beispiel von Z. Zahorski existiert leider nicht in jedem Punkt eine approximative Ableitung. D. Preiss hat gezeigt, daß die approximative Ableitung einer beliebigen Funktion, wenn sie auf einem Intervall existiert, aus der ersten Baireschen Klasse sein muß. Ich bin nur schriftlich über dieses Resultat informiert.

ersten Baireschen Klasse sind, dann hat f'_{ap} die Eigenschaft von Darboux und ist noch dazu aus der Klasse $\mathcal{M}_2$. *Eine Funktion f ist aus der Klasse $\mathcal{M}_2$ am Intervall J, wenn sie aus der ersten Baireschen Klasse ist und wenn die Ungleichung* $|\{x : x \in \langle a, b\rangle, f(x) > \alpha\}| > 0$, bzw. $|\{x : x \in \langle a, b\rangle, f(x) < \alpha\}| > 0$ *aus* $\{x : x \in \in \langle a, b\rangle, f(x) > \alpha\} \neq \emptyset$, *bzw.* $\{x : x \in \langle a, b\rangle, f(x) < \alpha\} \neq \emptyset$ *folgt.* Wir werden jetzt eine allgemeinere Behauptung beweisen.

A. Khintchine hat im [4], S. 243 folgenden Satz bewiesen:

Eine approximative Ableitung f'_{ap} ist am Intervall J eine Ableitung einer Funktion dann und nur dann, wenn f'_{ap} durch eine Ableitung majorisierbar ist.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf folgenden zwei Behauptungen:

I. **Lemma.** ([4], S. 242) *Wenn eine Funktion f eine nichtfallende Funktion ist und wenn sie im Punkte a eine approximative Ableitung $f'_{ap}(a)$ besitzt, dann hat sie im a eine Ableitung $f'(a)$ und es ist $f'(a) = f'_{ap}(a)$.*

II. *Wenn $f'_{ap}(x) \geqq 0$ für jedes $x \in J$ ist, dann ist die Funktion f am Intervall J nichtfallend.*

A. Khintchine hat nur endliche approximative Ableitungen zugelassen. Dieser Satz von Khintchine gilt aber für den Fall endlicher oder unendlicher approximativer Ableitungen (4). A. Khintchine benützt den Mittelwertsatz zum Beweis der zweiten Beahuptung. Den Mittelwertsatz kann man im Falle endlicher approximativer Ableitungen benützen, aber für den Fall unendlicher approximativer Ableitungen gilt der Mittelwertsatz im Allgemeinen nicht. Wir werden hier einen kurzen Beweis der zweiten Behauptung geben, welcher auf dem Lemma 1 und 3 beruht.

Lemma 4. *Es sei f eine Funktion, welche am Intervall J eine approximative Ableitung hat. Es sei $f'_{ap}(x) \geqq 0$ für jedes $x \in J$. Dann ist f eine auf J nichtfallende Funktion und hat in jedem Punkt von J die Ableitung $f'(x) = f'_{ap}(x)$.*

---

(4) Z. Zahorski behauptet in [10], daß der Satz von Khintchine für diesen Fall nicht gilt. Er leitet seine Behauptung aus einem seiner Beispiele aus [10] ab. Leider existiert auch bei diesem Beispiel eine approximative Ableitung der betrachteten Funktion nicht in jedem Punkt. Für den Fall der ersten Behauptung muß diese nur für den Fall $f'_{ap}(a) = \infty$ bewiesen sein. Hier ist ein kurzer Beweis, daß $f'_{ap}(a) = f'(a)$ auch im Falle $f'_{ap}(a) = \infty$ gilt, gegeben: Nehmen wir an, daß $f'^{+}(a) \neq \infty$ ist (den Fall $f'^{-}(a) \neq \infty$ behandelt man ähnlich). Dann existiert ein $k > 0$ so, daß für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches h, $0 < h < \varepsilon$, existiert, für das $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} < k$ ist. Dann gilt $\dfrac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} \leqq \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}\,\dfrac{k+1}{k} < k + 1$ für jedes $\xi \in < a + h\,\dfrac{k}{k+1}, a + h>$. Daraus folgt, daß $\left|\left\{\xi : \xi \in < a, a + h >, \dfrac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} < k + 1\right\}\right| \geqq \dfrac{1}{k+1}\,h$ gilt. Das ist aber im Widerspruch mit $f'_{ap}(a) = \infty$.

Beweis. Es sei $a, b \in J$, $a < b$ und $f(a) > f(b)$. Es sei t eine solche Zahl, daß $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} < t < 0$ ist. Dann ist $a \in {}_at^b$. Da $f'_{\mathrm{ap}}(a) \geqq 0$ ist, so ist die Menge $\left\{x : x \in \langle a, b\rangle, \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > t\right\}$ vom positiven Lebesguemaß. Auf Grund von Lemma 1 ist $\left\{x : x \in \langle a, b\rangle, \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > t\right\} \subset {}_at^b$. Bezeichnen wir $\frac{1}{2(b - a)} |{}_at^b|$ mit η. Dann ist $\eta > 0$ und $\frac{1}{b - a} |{}_at^b| > \eta$.Aus dem Lemma 3 geht die Existenz eines Punktes $x_0 \in \langle a, b\rangle$ hervor, für welchen $f'_{\mathrm{ap}}(x_0) \leqq t < 0$ ist. Das ist aber ein Widerspruch.

Lemma 5. *Es sei $f'_{\mathrm{ap}}(x) \geqq 0$ fast überall im J und $f'_{\mathrm{ap}}(x) \geqq K$ für jedes $x \in J$. Dann ist f eine monotone Funktion und es gilt: $f'_{\mathrm{ap}}(x) \geqq 0$ für jedes $x \in J$* (5).

Beweis. Wir setzen $g(x) = f(x) - Kx$. Dann ist $g'_{\mathrm{ap}}(x) \geqq 0$ für jedes $x \in J$. Es ist also nach dem Lemma 4 g auf J monoton und $g'_{\mathrm{ap}}(x) = g'(x)$ für jedes $x \in J$. Es sei $a, b \in J$. Nach dem Satz (7.4) von [8], S. 119 gilt: $\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x \leqq$ $\leqq g(b) - g(a)$. Es ist aber $g'(x) = g'_{\mathrm{ap}}(x) = f'_{\mathrm{ap}}(x) - K \geqq -K$ fast überall im J und darum muß $-K(b - a) \leqq \int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x \leqq f(b) - f(a) - K(b - a)$ sein. Daraus folgt nun, daß $f(a) \leqq f(b)$ ist. Damit haben wir bewiesen, daß f auf J eine nichtfallende Funktion ist.

Wir werden jetzt einen Satz beweisen, der allgemeiner ist als der Satz von A. M. Bruckner:

Satz 2. *Es sei f eine Funktion, die auf dem Intervall J eine approximative Ableitung hat und es sei f'_{ap} aus der ersten Baireschen Klasse. Wenn f'_{ap} aus der Klasse $\mathscr{M}'_*$ am Intervall J ist, dann gilt:*

1. *f'_{ap} hat die Eigenschaft von Darboux;*

2. *f'_{ap} erfüllt den Mittelwertsatz, d. h. wenn $a, b \in J$ und $a < b$ ist, dann gilt: $f(b) - f(a) = f'_{\mathrm{ap}}(\xi)\,(b - a)$, wobei ξ eine geeignete Zahl aus (a, b) ist;*

(5) Dieses Lemma hat J. Mařík formuliert und bewiesen. In meinem ursprünglichen Lemma 5 habe ich die Erfüllung der Voraussetzungen des Satzes 1 für f verlangt (dann ist aber f auf J stetig). Das muß te ich darum verlangen, weil ich in meinem Beweis des Lemma 5 den Satz (7.9) von [8], S. 206 benützt habe. Im Teil 3 des Satzes 2 habe ich noch die Erfüllung der Voraussetzungen des Satzes 1 für die Funktion f verlangt. Diese Forderung kann man infolge der neuen Formulierung des Lemma 5 weglassen. Unser Beweis des Lemma 5 stammt von J. Mařík.

3. f'_{ap} *hat die Eigenschaft von Denjoy, d. h.* $|\{x : x \in \langle a, b\rangle, \alpha < f'_{\text{ap}}(x) < \beta\}| > 0$, *wenn* $\{x : x \in \langle a, b\rangle, \alpha < f'_{\text{ap}}(x) < \beta\} \neq \emptyset$ *ist* (6).

Beweis. Die Behauptung 1. folgt aus den Sätzen 1 und 2 ([5], S. 45 und 47), wonach eine Funktion f aus der ersten Baireschen Klasse die Eigenschaft von Darboux dann und nur dann hat, wenn sie aus der Klasse $\mathscr{M}'_*$ ist. Dieser Satz gilt auch für den Fall, wenn die Funktion f als Funktionswerte $\pm\infty$ annimmt ([7], S. 398) (7).

Es ist leicht zu sehen, daß man sich im Beweise der Behauptung 2. auf den Fall $f(a) = f(b)$ beschränken kann. Aber für diesen Fall geht diese Behauptung aus dem Lemma 5 und aus der Behauptung 1. hervor.

Die Behauptung 3. werden wir indirekt beweisen. Es sei $E = \{x : x \in \langle a, b\rangle, \alpha < f'_{\text{ap}}x) < \beta\} \neq 0$ und $|E| = 0$, wobei $a, b \in J$ und $a < b$ ist.

Es sei $E_\alpha = \{x : x \in \langle a, b\rangle, f'_{\text{ap}}(x) \leqq \alpha\}$ und $E^\beta = \{x : x \in \langle a, b\rangle, f'_{\text{ap}}(x) \geqq \beta\}$. Dann gilt $\langle a, b\rangle = E_\alpha \cup E \cup E^\beta$. Wir werden jetzt zeigen, daß $E \subset (E_\alpha)' \cap \cap (E^\beta)'$ ist, wobei $(E_\alpha)'$, bzw. $(E^\beta)'$ die Ableitung der Menge E_α, bzw. E^β bedeutet. Es sei $x_0 \in E$ und $x_0 \notin (E_\alpha)'$. Dann existiert ein Intervall $J_1 \subset \langle a, b\rangle$ so, daß $x_0 \in J_1$ und $J_1 \cap E_\alpha = \emptyset$ ist. Dann ist $f'_{\text{ap}}(x) \geqq \beta$ fast überall in J_1 und $f'_{\text{ap}}(x) \geqq \alpha$ für jedes $x \in J_1$. Nach dem Lemma 5 ist $f'_{\text{ap}}(x) \geqq \beta$ für jedes $x \in J_1$. Da $x_0 \in J_1$ ist, bedeutet das, daß $x_0 \notin E$ ist. Das ist aber unmöglich. Ähnlich beweist man, daß $E \subset (E^\beta)'$ ist.

Es sei jetzt $A_0 = E \cap (a, b)$. Die Menge A_0 ist nicht leer, weil $\{x : x \in \langle a, b\rangle, \alpha < f'_{\text{ap}}(x) < \beta\} \neq \emptyset$, $f'_{\text{ap}} \in \mathscr{M}'_*$ ist und f'_{ap} die Eigenschaft von Darboux nach **1.** hat. Es sei $y \in A_0$ und I ein beliebiges Intervall, welches den Punkt y im Inneren enthält, und es sei $I \subset (a, b)$. Dann existieren im I Punkte wie aus E_α als aus E^β. Es ist also $\alpha = \inf\{f'_{\text{ap}}(x) : x \in A_0 \cap I\}$ und $\beta = \sup\{f'_{\text{ap}}(x) : x \in A_0 \cap \cap I\}$, weil f'_{ap} nach 1. die Eigenschaft von Darboux hat. Daraus folgt jetzt, daß die partielle Funktion $f'_{\text{ap}}/\bar{A}_0$ in keinem Punkte von $\bar{A}_0$ stetig ist. Das ist aber ein Widerspruch, weil die Funktion f'_{ap} aus der ersten Baireschen Klasse ist.

Wir bemerken, daß C. Goffmann und C. J. Neugebauer ([3]) für den Fall endlicher approximativer Ableitungen die äquivalenz von Behauptungen 1. und 2. aus dem Satz 2 bewiesen haben. Wir haben im Beweise des Satzes 2 gezeigt, daß die Behauptung 2. aus der Behauptung 1. für beliebige approxi-

(6) Nach dem Satz von D. Preiss, daß *jede approximative Ableitung auf jedem Intervall aus der ersten Baireschen Klasse ist*, kann man die Voraussetzung, daß f'_{ap} aus der ersten Baireschen Klasse ist, weglassen. Dann geben aber die Sätze 1 und 2 eine positive Lösung eines Problems von A. M. Bruckner ([1], s. 25), d. h., daß *jede approximative Ableitung einer Funktion mit der Eigenschaft von Darboux auf jedem Intervall die Eigenschaft von Darboux hat.*

(7) Man kann das auch direkt wie in [7] beweisen.

mative Ableitungen (d. h. ohne Voraussetzungen, daß f'_{ap} aus der ersten Baireschen Klasse und aus der Klasse $\mathscr{M}'_{*}$ ist) folgt. Es ist klar, daß der Satz 2 die äquivalenz der Behauptungen 1. und 2. unter viel allgemeineren Voraussetzungen als in [3] gibt. Es ist nicht bekannt, ob im Allgemeinen die äquivalenz der Behauptungen 1. und 2. gilt ([8]).

3. T. Światkowski hat im [9] folgende zwei Lemmata bewiesen:

Lemma 1. (T. Światkowski) *Es sei f eine meßbare Funktion im Intervall (a, b) und f soll in jedem Punkt einer Residualmenge $H \subset (a, b)$ eine approximative Ableitung besitzen. Es seien M und N zwei Zahlen und $M > N$. Dann ist mindestens eine von diesen zwei Mengen $A = \{x : f'_{ap}(x) \geqq M\}$ und $B = \{x : f'_{ap}(x) \leqq N\}$ im (a, b) nicht dicht.*

Lemma 2. (T. Światkowski) *Es sei f eine solche Funktion aus J (J ist die Klasse aller Funktionen aus der ersten Baireschen Klasse, die die Eigenschaft von Darboux haben), welche eine approximative Ableitung im (a, b) mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Punkten besitzt. Es sei $M > 0$ und es soll die Ungleichung $f'_{ap}(x) \geqq M$ auf (a, b) mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Punkten gelten. Dann ist f am (a, b) nichtfallend.*

Im Beweise des Lemma 2 benützt T. Światkowski eine Behauptung von Z. Zahorski [11], wonach eine Funktion aus der ersten Baireschen Klasse die Eigenschaft von Darboux dann und nur dann hat, wenn sie aus der Klasse $\mathscr{M}_1$, die Z. Zahorski definiert hat, ist. *Eine Funktion f ist aus der Klasse $\mathscr{M}_1$ am Intervall J, wenn f aus der ersten Baireschen Klasse ist und wenn $\{x : x \in \langle a, b \rangle,\ f(x) > \alpha\}$ und $\{x : x \in \langle a, b \rangle,\ f(x) < \alpha\}$ entweder leer oder von der Mächtigkeit des Kontinuums für alle $a, b \in J$, $a < b$ und jede reelle Zahl α sind.* In dem Beweis des Lemma 2 benützt T. Światkowski nur die Eigenschaft der Funktion f, daß die Mengen $\{x : x \in \langle a, b \rangle,\ f(x) > \alpha\}$ und $\{x : x \in \langle a, b \rangle,\ f(x) < \alpha\}$ entweder leer oder von der Mächtigkeit des Kontinuums sind. Also benützt man an keiner Stelle, daß die Funktion aus der ersten Baireschen Klasse ist. Wenn wir die Klasse $\mathscr{M}'_1$ als die Klasse *aller Funktionen f definieren, die am Intervall J definiert sind und für welche die Mengen $\{x : x \in \langle a, b \rangle,\ f(x) > \alpha\}$ und $\{x : x \in \langle a, b \rangle,\ f(x) < \alpha\}$ für alle a, $b \in J$, $a < b$ und jede reelle Zahl α entweder leer oder von der Mächtigkeit des Kontinuums sind,* dann können wir die Behauptung, welche T. Światkowski wirklich bewiesen hat, in folgender Weise formulieren:

Lemma 6. (T. Światkowski) *Es sei f eine meßbare Funktion aus $\mathscr{M}'_1$ am Intervall (a, b) und f soll auf (a, b) mit Ausnahme von höchstens abzählbar*

([8]) Aus dem Satz von D. Preiss über approximative Ableitung folgt, daß die Äquivalenz der Behauptungen 1., 2. und 3. allgemein gilt.

vielen Punkten eine approximative Ableitung besitzen. Es sei $M > 0$ und es soll die Ungleichung $f'_{\text{ap}}(x) \geqq M$ auf (a, b) mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Punkten gelten. Dann ist die Funktion f auf (a, b) nichtfallend.

LITERATUR

[1] Bruckner A. M., *An affirmative answer to a problem of Zahorski and some consequences*, Michig. Math. Jour. *13* (1966), 15—26.

[2] Bruckner A. M., Leonard J. L., *Derivatives*, Amer. Math. Monthly *73* (1966), Part II., 24—56.

[3] Goffmann C. and Neugebauer C. J., *On approximate derivatives*, Proc. Amer. Math. Soc. *11* (1960), 962—966.

[4] Khintchine A., *Recherches sur la structure des fonctions mesurables*, Fund. Math. *9* (1927), 212—279.

[5] Mišík L., *Über die Funktionen der ersten Baireschen Klasse mit der Eigenschaft von Darboux*, Mat.-fyz. časop. *14* (1964), 44—49.

[6] Mišík L., *Über die Eigenschaft von Darboux und einiger Klassen von Funktionen*, Revue roumaine Math. pures et appl. *11* (1966), 411—430.

[7] Mišík L., *Über die Ableitung der additiven Intervallfunktion*, Čas. pěst. mat. *91* (1966), 394—411.

[8] Saks S., *Theory of the Integral*, New York, 1937.

[9] Świątkowski T., *On the condition of monotonicity of functions*, Fund. Math. *59* (1966), 189—201.

[10] Zahorski Z., *Sur la classe de Baire des dérivées approximatives d'une fonction quelconque*, Annal. Soc. Polon. Math. *21* (1948), 306—323.

[11] Zahorski Z., *Sur la première dérivée*, Trans. Amer. Math. Soc. *69* (1950), 1—54.

Eingegangen am 11. 10. 1967.

Matematický ústav
Slovenskej akadémie vied
Bratislava