Hansjoachim Walther

Über eine Anordnung der Knotenpunkte kubischer Graphen

Matematický časopis, Vol. 19 (1969), No. 4, 330--333

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126656

Matematický časopis 19 (1969), No. 4

ÜBER EINE ANORDNUNG DER KNOTENPUNKTE KUBISCHER GRAPHEN

HANSJOACHIM WALTHER, Ilmenau (DDR)

Wir behandeln endliche zusammenhängende, ungerichtete, schlingenlose Graphen. Ein Kreis eines Graphen G ist eine einfache geschlossene Kantenfolge von G. Ein Baum ist ein zusammenhängender, kreisloser Graph. Der Abstand $\mathrm{d}(x, y)$ zweier verschiedener Knotenpunkte von G ist gleich der Minimalzahl der x und y verbindenden Kanten in G. G heisst zweifach zusammenhängend, wenn es durch irgendzwei Knotenpunkte von G mindestens einen Kreis von G gibt. Die Valenz $v(x)$ eines Knotenpunktes x ist die Anzahl der mit x inzidenten Kanten. Ein Faktor p-ten Grades von G ist ein Untergraph G' von G, der dieselben Knotenpunkte wie G hat und dessen Knotenpunkte alle die Valenz p haben.

M. Sekanina [2] bewies, dass man die Knotenpunkte eines zusammenhängenden Graphen G derart in einer Folge $F = (x_1, \ldots, x_m)$ bei beliebiger Wahl von x_1 und x_m schreiben kann, dass $\mathrm{d}(x_i, x_{i+1}) \leqq 3$ $(i = 1, \ldots, m - 1)$ in G gilt.

F. Neuman [1] gab eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass man die Knotenpunkte eines Baumes B derart in einer Folge $F = (x_1, \ldots, x_m)$ anordnen kann, dass $d(x_i, x_{i+1}) \leqq 2$ $(i = 1, \ldots, m - 1)$ in B gilt.

In dieser Arbeit wird der folgende Satz bewiesen:

Satz. *Sei Γ ein zweifach zusammenhängender kubischer* (1) *Graph. Dann kann man die Knotenpunkte von Γ derart in einer Folge $F = (x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1} = x_1)$ anordnen, dass $d(x_i, x_{i+1}) \leqq 2$ $(i = 1, \ldots, m)$ ist.*

Zunächst beweisen wir einen Hilfssatz:

Hilfssatz. *Sei G ein planarer, zusammenhängender Graph mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Für einen beliebigen Knotenpunkt x gilt entweder $v(x) = 2$ oder $v(x) = 3$,*

(b) *Die Kantenmenge setzt sich aus zwei Mengen K und E zusammen, wobei K*

(1) d. h. ein Graph, in dem jeder Knotenpunkt mit genau drei Kanten inzidiert.

die Vereinigung von n disjunkten Kreisen k_i der Länge $\geqq 2$ ist, und eine Kante $e \in E$ verbindet verschiedene Kreise von K,

(c) *Nach Entfernen einer beliebigen Kante von E ist der entstehende Graph nicht mehr zusammenhängend (Abb. 1 zeigt einen solchen Graphen).*

Dann gibt es eine Anordnung $F = (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1} = x_1)$ der Knotenpunkte von G mit folgenden Eigenschaften:

(1) *Für den Abstand $d(x_i, x_{i+1})$ zweier in F aufeinanderfolgender Knotenpunkte gilt*

$$d(x_i, x_{i+1}) \leqq 2 \text{ in } G, i = 1, \ldots, m ,$$

(2) *Sei $W = (x, c_1, c_2, \ldots, c_l, y)$ ein Weg von G, wobei $v(x) = v(y) = 3$ und $v(c_i) = 2$, $i = 1, 2, \ldots, l$ in G gelte. Dann gibt es einen Folgenabschnitt F' von F mit*

$$F' = (x, c_1, \ldots, c_l) \text{ oder } F' = (c_1, \ldots, c_l, y) .$$

Es kann auch $x = y$ sein. Am Ende der Arbeit wird gezeigt, dass jeder Graph mit den Eigenschaften (a), (b), (c) planar ist.

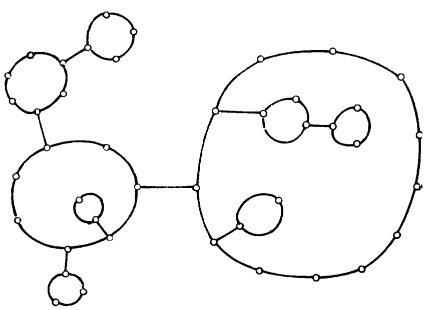

Abb. 1

Beweis des Hilfssatzes: Besteht die Menge K der Kreise nur aus einem Element k, dann ist der Hilfssatz sicher richtig, da in dem Fall G nur aus einem Kreis

$$k = (x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1} = x_1)$$

besteht. $F = k$ ist dann die gesuchte Knotenpunktanordnung. Besteht K aus genau zwei Kreisen und E aus einer diese beiden Kreise verbindenden Kante (Abb. 2), dann ist

$$F = (x, b_1, b_2, \ldots, b_s, y, a_1, a_2, \ldots, a_r, x)$$

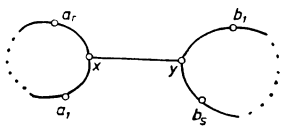

Abb. 2

eine zulässige Knotenpunktanordnung. Wir nehmen an, dass der Hilfssatz für alle Graphen richtig ist, die $\leqq n$ Kreise k_i besitzen.

Es sei nun die Anzahl der Kreise von K gleich $n + 1$ $(n \geqq 2)$. Man sieht unschwer, dass E dann genau n Kanten enthält. Dann gibt es aber einen hängenden Kreis $k \in K$, das ist ein Kreis, der nur einen Knotenpunkt x der Valenz 3 besitzt. Es sei $e = (x, y)$ die Kante von E, die k mit dem Rest von G verbindet, dabei liege y auf dem zu k „benachbarten" Kreis k' (Abb. 3).

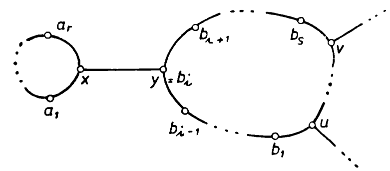

Abb. 3

Seien u und v die Knotenpunkte der Valenz 3 von k', so dass es zwischen y und u (bzw. v) höchstens Knotenpunkte der Valenz 2 gibt. (evtl. ist $u = v$). Mindestens einen solchen Knotenpunkt gibt es, da G zusammenhängend ist und da $n \geqq 2$, also $|E| \geqq 2$ ist.

Der Graph $G' = G - k - (x, y)$ besitzt nach Induktionsvoraussetzung o. B. d. A. eine Knotenpunktanordnung

$$F' = (\ldots, u, b_1, \ldots, b_i = y, b_{i+1}, \ldots, b_s, \ldots)\,,$$

dabei ist $i \geqq 1$ (denn in G' hat y die Valenz 2). Evtl. ist

$$s = i\,.$$

1. $i = 1$. Dann ist

$$F = (\ldots u, x, a_1, \ldots, a_r, y = b_1, b_2, \ldots, b_s, \ldots)$$

eine zulässige Knotenpunktanordnung in G.

2. $i > 1$. Dann ist

$$F = (\ldots, u, b_1, \ldots, b_{i-1}, x, a_1, \ldots, a_r, y = b_i, b_{i+1}, \ldots, b_s, \ldots)$$

eine zulässige Knotenpunktanordnung von G. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Der Beweis des Satzes ergibt sich nun unmittelbar. Wir haben nur zu zeigen, dass ein beliebiger kubischer, zweifach zusammenhängender Graph Γ einen Teilgraphen G besitzt, der den Voraussetzungen des Hilfssatzes genügt.

Nach dem bekannten Petersenschen Satz zerfällt Γ in einen Faktor K zweiten Grades, bestehend aus isolierten Kreisen und in einen Faktor $E' = \Gamma - K$ ersten Grades. Wählt man nun eine solche Teilmenge $E \subset E'$, die die Eigenschaft besitzt, dass der Graph $K \cup E$ zusammenhängend ist, jedoch nach Entfernen einer beliebigen Kante von E zerfällt, dann kann man den so entstehenden Graphen G sicher auf der Ebene zeichnen (Man bilde etwa aus G einen Graphen G' wie folgt: Jedem Kreis k_i von K ordne man einen Knotenpunkt k'_i von G' zu. Man verbinde in G' die Knotenpunkte k'_i und k'_j, wenn die ihnen entsprechenden Kreise in G durch eine Kante aus E verbunden sind. G' ist ein Baum, den man in der Ebene zeichnen kann. Nun „blase" man die Knotenpunkte k'_i von G' wieder zu den entsprechenden Kreisen k_i auf. Der entstehende Graph ist isomorph zu G). Damit ist der Satz bewiesen.

LITERATUR

[1] Neuman F., *On a certain ordering of the vertices of a tree*, Časop. pěst. mat. *89* (1964), 323—339.

[2] Sekanina M., *On an ordering of the set of vertices of a connected graph*, Publ. Fac. Sci. Univ. Brno, No. *4* (1960), 137—141.

Eingegangen am 9. 2. 1968.

Institut für Mathematik
Technische Hochschule Ilmenau,
Ilmenau, DDR