Beloslav Riečan; Zdena Riečanová

Заметка о метрических мультирешетках

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 10 (1960), No. 4, 238--246

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126632

ЗАМЕТКА О МЕТРИЧЕСКИХ МУЛЬТИРЕШЕТКАХ

БЕЛОСЛАВ РИЕЧАН и ЗДЕНА РИЕЧАНОВА, Братислава

М. Бенадо в работах [1] и [2] обобщил известную теорему Гливенко, которая утверждает, что каждая нормированная структура является метрическим пространством. В работе [1] эту теорему он доказал для фильтрующихся мультирешеток с положительной оценкой 3. типа (теорема 5.4) и показал, что такие мультирешетки всегда модулярны (теорема 5.6). В работе [2] он обощил еще теорему Гливенко для фильтрующихся мультирешеток со специальной оценкой 2. типа (теорема 3.1) а также поставил вопрос, должны-ли быть такие мультирешетки модулярными.

В настоящей работе мы приведем пример фильтрующейся мультирешетки, которая не является модулярной, но существует на ней оценка 2. типа, обладающая требуемыми свойствами.

Во второй части этой работы выше приведенная теорема обобщена на частично упорядоченные множества.

1

Сначала мы приведем несколько важных понятий из теории мультирешеток. Понятия 1.2—1.4 впервые ввел М. Бенадо в работе [1].

1.1. Частично упорядоченное множество M мы назовем фильтрующимся множеством, если для каждой пары элементов $a, b \in M$ существуют элементы $u, v \in M$ так, что действительно $u \geqq a \geqq v$, $u \geqq b \geqq v$.

1.2. Частично упорядоченное множество M мы назовем мультирешеткой, если будут выполнены следующие два условия:

1. Пусть $a, b \in M$; если существует такое $u \in M$, что $u \geqq a$, $u \geqq b$, тогда существует тоже такое $d \in M$, что $d \leqq u$, $d \geqq a$, $d \geqq b$ и $d = d'$ для всех $d' \in M$ таких, что $d' \leqq d$, $d' \geqq a$, $d' \geqq b$.

2. Пусть $a, b \in M$; если существует такое $v \in M$ что $v \leqq a$, $v \leqq b$, тогда существует также такое $m \in M$, что $m \geqq v$, $m \leqq a$, $m \leqq b$ и $m = m'$ для всех $m' \in M$ таких, что $m' \geqq m$, $m' \leqq a$, $m' \leqq b$. Множество всех $d \in M$, обладающих свойством 1), обозначим через $(a \vee b)_u$. Множество всех

$m \in M$, обладающих свойством 2), обозначим через $(a \wedge b)_v$. Дальше определяем

$$a \vee b = \bigcup_{u \geq a, b} (a \vee b)_u, \qquad a \wedge b = \bigcup_{v \leq a, b} (a \wedge b)_v,$$

где через „$\cup$" мы обозначим множественное объединение.

1.3. Пусть M — мультирешетка, $v(x)$ — вещественная функция, определена на M. Пусть $a, b \in M$ любые два элементы, для которых $a \vee b \neq 0$, $a \wedge b \neq 0$.

1.3.1. Если существуют элементы $d \in a \vee b$, $m \in a \wedge b$ такие, что

$$v(a) + v(b) = v(d) + v(m), \quad (*)$$

тогда функцию $v(x)$ мы называем оценкой первого типа на M.

1.3.2. Если равенство (*) действительно для всех $d \in a \vee b$ $(m \in a \wedge b)$ и для некоторого $m \in a \wedge b$ $(d \in a \vee b)$, тогда $v(x)$ называем верхней (нижней) оценкой второго типа на M.

1.3.3. Если равенство (*) действительно для всех $d \in a \vee b$ и для всех $m \in a \wedge b$, тогда $v(x)$ называем оценкой третьего типа на M.

1.4. Мультирешетку M мы называем модулярной, если из условий

$$u \geqq a \geqq v, \qquad u \geqq b \geqq b' \geqq v, \qquad (a \vee b')_u = u, \qquad (a \wedge b)_v = v,$$

вытекает $b' = b$.

1.5. Приведем еще одну теорему, которую доказал М. Бенадо в работе [2] (теорема 3.1).

Предположения: Пусть M фильтрующаяся мультирешетка (фильтрующееся множество и одновременно мультирешетка). Пусть $v(x)$ — вещественная функция, определена на M свойствами:

$V1$. Для каждой пары элементов $a, b \in M$ существует $d_0 \in a \vee b$ такое, что

$$v(d_0) \leqq v(d) \text{ для всех } d \in a \vee b.$$

$V2$. Для всех d_0, обладающих свойством $V1$, и для всех $m \in a \wedge b$ действительно

$$v(a) + v(b) = v(d_0) + v(m).$$

$V3$. Если $a, b \in M$, $a < b$ тогда $v(a) < v(b)$.[1])

Утверждение: M является метрическим пространством. Метрика определена формулой $\varrho(a, b) = v(d_0) - v(m)$, где $d_0 \in a \vee b$ обладает свойством $V1$ и $m \in a \wedge b$.

1.6. Как мы уже сказали в предисловии, М. Бенадо в работе [2] поставил вопрос: должна-ли быть мультирешетка, удовлетворяющая предположениям $V1$—$V3$, модулярна.

[1]) Оценку, удовлетворяющую условиям $V3$, мы называем положительной.

На рис. 1 приведен пример мультирешетки, которая удовлетворяет предположениям теоремы 1.5, но не является модулярной.

Сначала мы проверим выполнены-ли предположения теоремы.

1. M будет фильтрующаяся мультирешетка, так как она имеет наименьший элемент m, наибольший элемент g и выполняет условия из 1.2.

2. На M определена вещественная функция $v(x)$. Значения функции $v(x)$ определены числами в скобках на рис. 1. Функция $v(x)$ очевидно выполняет условия $V1$ и $V3$. Условие $V2$ достаточно проверить для несравнимых элементов. Например, для элементов a, b' действительно $a \vee b' = \{e, u\}$, $a \wedge b' = \{m\}$. Свойство $V1$ имеет только элемент e, потому что $v(e) < v(u)$. Равенство $v(a) + v(b') = v(e) + v(m)$ действительно. Подобно этому можно поступать и в остальных случаях.

M не является модулярной потому что $u \geqq a \geqq m$, $u \geqq b \geqq b' \geqq m$, $(a \vee b')_u = u$, $(a \wedge b)_m = m$ но $b' \neq b$.

1. 7. *Пусть M мультирешетка. Пусть $v(x)$ вещественная функция,определена на M, которая выполняет следующие условия.*

М1. *Для каждой пары элементов a, $b \in M$ существует $d_0 \in a \vee b$ такое что*

$$v(a) + v(b) = r(d_0) + v(m)$$

для всех $m \in a \wedge b$.

М2. *Пусть a, b, b', u, m елементы из M такие, что действительно $u \geqq a \geqq m$, $u \geqq b \geqq b' \geqq m$, $(a \vee b')_u = u$, $(a \wedge b)_m m$. Пусть элементы $d_0 \in a \vee b$, $d'_0 \in a \vee b'$ имеют свойство М1. Потом действительно $v(d_0) = v(d'_0)$.*

М3. $v(a) < v(b)$ *для всех $a, b \in M$ таких, что $a < b$.*[2]

Утверждение: M является модулярной мультирешеткой.

Доказательство: Пусть a, b, b', u, m элементы из M такие, что $u \geqq a \geqq m$, $u \geqq b \geqq b' \geqq m$, $(a \vee b')_u = u$, $(a \wedge b)_m = m$. Согласно М1 существуют элементы d_0, d'_0 такие, что $d_0 \in a \vee b$, $d'_0 \in a \vee b$, и действительно

$$v(a) + v(b) = v(d_0) + v(m),$$
$$v(a) + v(b) = v(d_0) + v(m), \qquad (**)$$

из этого вытекает:

$$v(b) - v(b') = v(d_0) - v(d'_0).$$

Согласно М2 однако действительно $v(d_0) = v(d'_0)$, итак тоже $v(b) = v(b')$. Согласно М3 и предположеню $b' \leqq b$ следует $b = b'$.

1.8. Если M модулярная мультирешетка, на которой существует вещественная функция $v(x)$, которая имеет свойства М1 и М3, тогда $v(x)$ имеет также свойство М2.

---

[2]) Условия M_1 и M_3 равносильны утверждению, что $v(x)$ является положительной нижней оценкой 2. типа.

Утверждение вытекает непосредственно из равенств(**) и из того, что M модулярная мультирешетка.

1.9. На рис. 2 приведен пример мультирешетки с оценкой, которая обладает свойствами M1, M2, M3, но не является оценкой 3. типа.

Значения функции $v(x)$ определены числами в скобках на рис. 2. Для элементов b, c действительно $b \vee c = \{d, e\}$, $b \wedge c = \{a\}$. Но $v(b) + v(c) = 2$, $v(e) + v(a) = 3$, значит $v(x)$ не является оценкой 3. типа (см. 1.3.3).

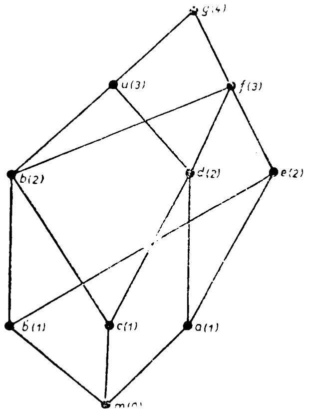

Рис. 1.

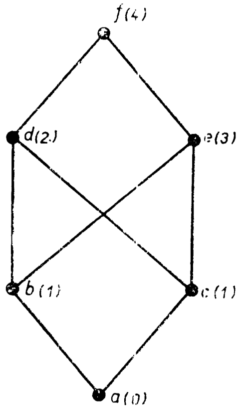

Рис. 2.

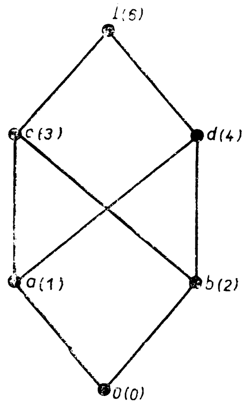

Рис. 3.

2

Естественным является вопрос, можно-ли обобщить теорему 1.5 в случае, когда M является частично упорядоченным множеством. Сначала мы приведем два такие обобщения.

2. 1. *Пусть M фильтрующееся ч. у. м. Пусть $v(x)$ вещественная функция, определена на M, выполняющая следующие условия:*

1. *Пусть $a, b \in M$. Потом существует $d \in M$, $d \geqq a$, $d \geqq b$ такое, что для всех $y \geqq a$, $y \geqq b$ действительно $v(d) \leqq v(y)$.*

2. *Пусть $a, b \in M$. Потом существует $m \in M$, $m \leqq a$, $m \leqq b$ такое, что для всех $y \leqq a$, $y \leqq b$ действительно $v(m) \geqq v(y)$.*

3. *Для всех $a, b \in M$ и для всех d или же $m \in M$ выполняющих 1 или же 2 соответственно выполняется равенство*

$$v(a) + v(b) = v(d) + v(m).$$

4. $x < y \Rightarrow v(x) < v(y)$.

Потом функция $\varrho(a, b) = v(d) - v(m)$ (где d обладает свойством 1, m свойством 2) является метрикой на M, значит M является метрическим пространством.

Это утверждение вытекает из теоремы 2.3, которую мы докажем позже.

2.1.1. В случае, когда M является мультирешеткой, из предположений $V1$—$V3$ теоремы 1.5 следуют предположения 1—4 утверждения 2.1, но обратное неверно, что мы и покажем на следующем примере. Пусть M мультирешетка, график которой изображен на рис. 3.

Функцию $v(x)$ определим следующим образом: $v(0) = 0$, $v(a) = 1$, $v(b) = 2$, $v(c) = 3$, $v(d) = 4$, $v(I) = 6$. Легко установить, что $v(x)$ выполняет условия 1—4. Но условие $V2$ не действительно, так как $v(c) + v(d) = 7$ и $v(b) + v(I) = 8$.

В случае, если M мультирешетка, теорема 1.5 является следствием теоремы 2.1.

2.1.2. Ч. у. м. выполняющее предположения теоремы 2.1 не должно быть мультирешеткой, что покажем на следующем примере.

Пусть $M = \{0, a, b, I\} \cup \langle 1,2) \cup \langle 3,4)$, где $\langle 1,2)$ и $\langle 3,4)$ обозначают множества всех действительных чисел, выполняющих неравенства $1 \leqq x < 2$ или же $3 \leqq x < 4$ соответственно. Отношение $\leqq$ определим на M вот как: $x \leqq x$ $0 \leqq x \leqq I$ для всех $x \in M$; для всех $x \in \langle 1, 2)$ и всех $y \in \langle 3, 4)$ $x \leqq y$, $x \leqq b$, $a \leqq y$; элементы из $\langle 1, 2)$ и $\langle 3, 4)$, упорядоченных как действительные числа; $a \leqq b$. Отношение $\leqq$ является таким образом частичным упорядочением M. На M мы определим вещественную функцию $v(x)$ следующим способом: $v(x) = x$ для всех $x \in \langle 1, 2) \cup \langle 3, 4)$, $v(0) = 0$, $v(a) = 2$, $v(b) = 3$, $v(I) = 5$. Легко проверить, что $v(x)$ выполняет предположения теоремы 2.1, но M не является мультирешеткой, ибо $(b \wedge 3)_1 = \emptyset$.

2.1.3. Полезно заметить еще следующее. Если M является мультирешеткой, в которой $a \vee b$ и $a \wedge b$ конечны для любых a, $b \in M$, то предположения 1, 2 вытекают из предположения 4.

2.2. Чтобы высказаться более коротко, мы введем несколько вспомогательных обозначений.

2.2.1. Пусть M — фильтрующееся, частично упорядоченное множество. Пусть a, $b \in M$. Мы напишем $d \} (a, b)$ если действительно: α) $d \geqq a$, $d \geqq b$; β) $x \geqq a, x \geqq b, x \leqq d \Rightarrow x = d$. Двойственным образом определяем $m \{ (a, b)$.

2.2.2. Пусть M — ч. у. м. Мы скажем, что M выполняет условие (P), если для любых двух элементов a, $b \in M$ существуют элементы d, $m \in M$, такие что $m \{ (a, b) \in$ $d \} (a, b)$. (Если M выполняет (P), тогда M фильтрующееся).

2.2.3. В терминах работы [3] является ч. у. м. M выполняющее условие (P) „конфигурацией, наделенной универсальной, хаусдорфовской (Γ, Σ)-геометрической структурой". Причем $d \} (a, b)$ обозначают через $d\Gamma\{a, b\}$ и $m \{ (a, b)$ через $m\Sigma\{a, b\}$.

2.2.4. Заметим, что ч. у. м., выполняющее условие (P) не должно быть мультирешеткой, как это вытекает из примера приведенного в 2.1.2.

2.2.5. Пусть M ч. у. м. выполняющее условие (P) (см. 2.2.2.). Пусть $v(x)$ вещественная функция, определенная на M и выполняющая следующие предположения.

1. Пусть $a, b \in M$. Потом существует $d \nmid (a, b)$ такой, что $v(y) \geqq v(d)$ для всех $y \geqq a$, $y \geqq b$.

2. Пусть $a, b \in M$. Потом существует $m \nmid (a, b)$ такой, что $v(y) \leqq v(m)$ для всех y таких, что $y \leqq a$, $y \leqq b$.

3. Для всех $a, b \in M$ и всех d или же m, выполняющих соответственно 1 или же 2 действительно

$$v(a) + v(b) = v(d) + v(m).$$

4. $x < y \Rightarrow v(x) < v(y)$.

Потом функция $\varrho(a, b) = v(d) - v(m)$ (d обладает свойством 1, m свойством 2) является метрикой на M и M является метрическим пространством.

2.2.6. Теорема 2.2.5. является следствием теоремы 2.1 в случае, что M выполняет условие (P). Мы ее здесь привели только для того, чтобы объяснить способ, которым формулирована следующая теорема.

2.3. *Пусть M ч. у. м. Пусть $\circ, *$ многозначные бинарные операции, которые к каждым двум элементам $a, b \in M$ присоединяют не пустые множества $a \circ b$, $a * b$*[3]. *Пусть $v(x)$ вещественная функция на M. Пусть $v(x)$ и операции $\circ$, $*$ выполняют следующие предположения:*

1. *Операции $\circ$ $*$ являются коммутативными (т. е. для всех $a, b \in M$ действительно $a \circ b = b \circ a$, $a * b = b * a$).*
2. *Если $x \in a * b$, $y \in a \circ b$, тогда $x \leqq a$, $x \leqq b$, $y \geqq a$, $y \geqq b$.*
3. *Пусть $x \geqq a$, $x \geqq b$. Потом $v(x) \geqq v(d)$ для всех $d \in a \circ b$.*
4. *Пусть $x \leqq a$, $x \leqq b$. Потом $v(x) \leqq v(m)$ для всех $m \in a * b$.*
5. *Для всех $a, b \in M$ и всех $d \in a \circ b$, $m \in a * b$ действительно $v(a) + v(b) = $*
$$= v(d) + v(m).$$
6. $x < y \Rightarrow v(x) < v(y)$.

Утверждение: Формула $\varrho(a, b) = v(d) - v(m)$ (где $d \in a \circ b$, $m \in a * b$) определяет вещественную функцию, которая является метрикой на M; M является метрическим пространством.

2.3.1. Теорему 2.3 мы бы могли формулировать подобным образом, как 2.2.5 или же 2.1. Значит так:

Предположения: как b 2.3, только b 3 и 4 нужно заменить выражение „для всех" выражением „для некоторого" и в 6 выражение „для всех $d \in a \circ b$, $m \in a * b$" выражением „для всех d или же m выполняющих соответственно 3 или же 4".

Утверждение: M является метрическим пространством.

---

[3] Алгебраическими системами с такими операциями занимается работа [5].

Дело в том, что если обозначим

$$a \circ' b = \{d \in a \circ b : x \geqq a, \quad x \geqq b \Rightarrow v(x) \geqq v(d)\}$$
$$a *' b = \{m \in a * b : x \leqq a, \quad x \leqq b \Rightarrow v(x) \leqq v(m)\},$$

то операции $\circ', *'$ выполняют предположения теоремы 2.3 и, значит, из 2.3 вытекает 2.3.1.

2.3.2. Теорему 2.3 можно перефразировать в термины работы [3]. Предположения 1—6 обозначают, что „M есть конфигурация, наделенная универсальной, (Γ, Σ)-геометрической структурой с положительной оценкой". Отношения Γ и Σ определены следующим образом: $d\Gamma\{a, b\} \Leftrightarrow d \in a \circ b$, $m\Sigma\{a, b\} \Leftrightarrow m \in a * b$.

2.3.3. Доказательство теоремы 2.3. Из 5 следует, что $v(d)$ и $v(m)$ имеют одинаковое значение для всех $d \in a \circ b (m \in a * b)$. Формула $\varrho(a, b) = v(d) - v(m)$ определяет таким образом функцию. Первая аксиома метрики следует из 2, 3, 4 и 6, вторая из 1. Нам довольно указать, что неравенство треугольника действительно.

Пусть a, $b \in M$ любые элементы. Возмем $d_1 \in a \circ b$, $d_2 \in a \circ c$, $d_3 \in b \circ c$, $m_1 \in a * b$, $m_2 \in a * c$, $m_3 \in b * c$. В силу 5

$$v(a) + v(b) = v(d_1) + v(m_1),$$
$$v(a) + v(c) = v(d_2) + v(m_2),$$
$$v(b) + v(c) = v(d_3) + v(m_3).$$

Наконец, если возмем еще $d \in m_2 \circ m_3$, $m \in m_2 * m_3$, то получим

$$v(m_2) + v(m_3) = v(d) + v(m).$$

В силу определения и постепенного использования этих соотношений следует

$$\varrho(a, c) + \varrho(c, b) - \varrho(a, b) =$$
$$= 2[v(c) + v(m_1) - v(m_2) - v(m_3)] =$$
$$= 2[v(c) - v(d) + v(m_1) - v(m)].$$

В силу 2 $m_2 \leqq c$, $m_3 \leqq c$. Значит, в силу 3 $v(d) \leqq v(c)$, или же $v(c) - v(d) \geqq 0$. Также в силу 2 $m \leqq m_2$, $m \leqq m_3$, $m_2 \leqq a$, $m_3 \leqq b$, значит $m \leqq a$, $m \leqq b$. В силу 4 $v(m) \leqq v(m_1)$, или $v(m_1) - v(m) \geqq 0$. Но потом $\varrho(a, c) + \varrho(c, b) - \varrho(a, b) \geqq 0$ откуда непосредственно следует неравенство треугольника.

2.4. Наконец мы приведем некоторые следствия теоремы 2.3. Покажем, что обе теоремы М. Бенадо и теоремы настоящей работы из нее следуют.

2.4.1. Пусть M — структура, $\cup$, $\cap$ структурные операции. Если положить $a \circ b = a \cup b$, $a * b = a \cap b$, то из теоремы 2.3 получим теорему Гливенко (см. [4], V).

2.4.2. Пусть M — фильтрующаяся мультирешетка. Если положить $a \circ b = a \vee b$, $a * b = a \wedge b$, то из теоремы 2.3 — получим теорему 5.4 работы [1].

2.4.3. Пусть M — фильтрующаяся мультирешетка, выполняющая условия $V1$—$V3$ из 1.5. Положим

$a \circ b = \{d \in a \vee b : x \geqq a, \quad x \geqq b \Rightarrow v(x) \geqq v(d)\}, \qquad a * b = a \wedge b.$

Тогда легко увидеть, что из 2.3 следует 1.5.

2.4.4. Пусть M ч. у. м., выполняющее предположения теоремы 2.2.5. Положим

$$a \circ b = \{d : d \nmid (a, b); \quad x \geqq a, \quad x \geqq b \Rightarrow v(x) \geqq v(d)\},$$
$$a * b = \{m : m \nmid (a, b); \quad x \leqq a, \quad x \leqq b \Rightarrow v(x) \leqq v(m)\},$$

(в фильтрующейся мультирешетке $a \circ b = a \vee b$, $a * b = a \wedge b$). Легко видеть, что из теоремы 2.3 следует 2.2.5.

2.4.5. Пусть M будет ч. у. м., удовлетворяющее предположениям теоремы 2.1. Положим

$$a \circ b = \{d : d \geqq a, \quad d \geqq b; \quad x \geqq a, \quad x \geqq b \Rightarrow v(x) \geqq v(d)\}$$
$$a * b = \{m : m \leqq a, \quad m \leqq b; \quad x \leqq a, \quad x \leqq b \Rightarrow v(x) \leqq v(m)\}.$$

Опять легко проверить, что из 2.3 следует 2.1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Benado M., *Les ensembles partiellement ordonés et le théorème de raffinement de Schreier II* (Théorie des multistructures), Чехослов. мат. ж. 5 (80) (1955), 308—344.

[2] Benado M., *Bemerkungen zur Theorie der Vielverbände*, Math. Nachr. 20 (1959), 1—16.

[3] Бенадо М, *К общей теории упорядоченных множеств*. Acta fac. rer. nat. Univ. Comen. Mathem. (V tlači.)

[4] Birkhoff G., *Lattice theory. Rev. ed.*, New York 1948 (rusky, *Теория структур*, Moskva 1952).

[5] Brunovský P., *O zovšeobecnených algebraických systémoch*, Acta fac. rer. nat. Univ Comen. Mathem. 3 (1958), 41—54.

Поступило 10. 3. 1960.

Katedra matematiky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

UNE REMARQUE SUR LES MULTITREILLIS MÉTRIQUES

BELOSLAV RIEČAN, ZDENA RIEČANOVÁ, Bratislava

Résumé

Dans ses travaux [1], [2] M. Benado a adapté pour les multitreillis le théorème connu de Glivenko, affirmant, que chaque treillis normé est un espace métrique. Dans son travail [1] il a démontré ce théorème pour les multitreillis avec la valuation positive de troisième espèce. Il a démontré aussi, que tous les multitreillis jouissants ces propriétés lont modulaires. (Toutes ces notions sont déterminées dans [1] et aussi dans [2].)

Dans [2] on a démontré le théorème suivant: Soit M le multitreillis filtrant. Soit $v(x)$ sa fonction réele, déterminée sur M jouissante les propriétés suivantes:

V 1. Pour chaque couple $a, b \in M$ il y a un $d_0 \in a \vee b$ tel que la condition $d \in a \vee b$ entrainet $v(d_0) \leqq v(d)$.

V 2. Pour chaque d_0 jouissant la propriété V 1 et pour tout $m \in a \wedge b$ on a

$$v(a) + v(b) = v(m) + v(d_0).$$

V 3. $x < y \Rightarrow v(x) < v(y)$.

Affirmation: M est un espace métrique.

M. Benado a posé encore la question suivante (dans [2]): Est-ce que le multitreillis satisfait les conditions V 1—V 3 est modulaire?

Dans la figure 1 se trouve la schéma du multitreillis satisfaisant les conditions V 1—V 3 et en même temps n'etant pas modulaire.

Dans la deusième partie de notre travail est démontré le théorème suivant:

Soit M l'ensemble partiellement ordoné. Soient $\circ, *$ les opérations binaires multivoques et universelles, ajoutant à chaque couple $a, b \in M$ les ensembles non vides $a \circ b$, $a * b$. Soit $v(x)$ la fonction réele déterminée pour chaque $x \in M$. Soient la fonction $v(x)$ et les opérations $\circ$, $*$ tels que les conditions suivantes sont satisfaites:

1. Les opérations $\circ, *$ sont commutatives, c'est a dire pour chaque couple $a, b \in M$ $a \circ b = b * a$ et $a * b = b * a$.
2. On a $x \leqq a$, $x \leqq b$, $y \geqq a$, $y \geqq b$ pour chaque $x \in a * b$ et chaque $y \in a \circ b$.
3. Si $x \geqq a$, $x \geqq b$, pour chaque $d \in a \circ b$ on a $v(x) \geqq v(d)$.
4. Si $x \leqq a$, $x \leqq b$, pour chaque $m \in a * b$ on a $v(x) \leqq v(m)$.
5. Pour tous les éléments $a, b \in M$ et tous $d \in a \circ b$, $m \in a * b$ on a

$$v(a) + v(b) = v(m) + v(d).$$

6. $x < y \Rightarrow v(x) < v(y)$.

Affirmation: Par la formule $\varrho(a, b) = v(d) - v(m)$ $(d \in a \circ b,\ m \in a * b)$ est déterminée une fonction réele, satisfaite les axiomes de la métrique.