Beloslav Riečan

О плотности некоторых внешних мер в топологических пространствах

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 13 (1963), No. 3, 193--204

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126629`

О ПЛОТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ВНЕШНИХ МЕР В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

БЕЛОСЛАВ РИЕЧАН (Beloslav Riečan), Братислава

Пусть X — n-мерное эвклидово пространство, μ — мера Лебега. Обозначим через $c(x, r)$ замкнутый шар с центром x радиуса r. Пусть M — произвольное μ-измеримое множество. Известно, что функция

$$d(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\mu(c(x, r) \cap M)}{\mu(c(x, r))}$$

равна μ-почти всюду характеристической функции χ_M множества M.

Э. Й. Микл (E. J. Mickle) и Т. Радо (T. Rado) в работе [3] дали обзор по подобным теоремам о плотности для некоторых внешних мер в сепарабельном метрическом пространстве.

В настоящей работе мы докажем методами, аналогичными методам, используемым в [3], некоторые теоремы о плотности в топологических, не обязательно метрических пространствах. Эти теоремы сформулированы в разделах 13 и 14. Обозначения и названия, необходимые для их формулировки, находятся в 2,1, 9,1, 10,2 и 12,1. Все теоремы вытекают почти непосредственно из теоремы 12,2, а эта теорема из весьма общей теоремы 6.

1. Пусть X — абстрактное пространство, $\mathbf{X}$ — система всех подмножеств X, $\mathbf{K} \subset \mathbf{X}$, f — отображение, определенное на $\mathbf{K}$ со значениями в $\mathbf{X}$. Мы будем предполагать, что $\mathbf{K}$ и f удовлетворяют следующим предположениям:

a) $\cup \{f(E) : E \in K\} = X$.

b) К произвольному элементу $x \in X$ и к произвольным множествам $E, F \in \mathbf{K}$ таким, что $x \in f(E) \cap f(F)$, существует множество $G \in \mathbf{K}$ такое, что $x \in f(G)$ и $G \subset E \cap F$.

c) $f(E) \subset E$ для всех $E \in \mathbf{K}$.

1,1. Пример. Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, $\mathbf{K}$ — система всех компактных подмножеств X с непустым открытым ядром. Для $E \in \mathbf{K}$ положим $f(E)$ = открытое ядро множества E (т. е. множество всех внутренних точек E).

1,2. Пример. Пусть X метрическое пространство, $\mathbf{K}$ система замкнутых шаров. Для $E \in \mathbf{K}$ положим $f(E)$ равным множеству центров шара E.([1])

До раздела 8 мы будем предполагать, что X — абстрактное пространство и $\mathbf{K}$, f имеют только что определенное значение.

2. Пусть φ действительная функция, определенная на системе $\mathbf{L}$, $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$. Мы будем говорить, что число C является предельной точкой множества $\{\varphi(E) : E \subset \mathbf{L}\}$, если к произвольному $\varepsilon > 0$ и множеству $E \in \mathbf{L}$ существует множество $F \in \mathbf{L}$ такое, что $F \subset E$ и $\varphi(E) \in (C - \varepsilon, C + \varepsilon)$. Через $\limsup \{\varphi(E) : E \in \mathbf{L}\}$ и $\liminf \{\varphi(E) : E \in \mathbf{L}\}$ обозначим соответственно верхнюю и нижнюю грань множества предельных точек $\{\varphi(E) : E \in \mathbf{L}\}$. В случае $\liminf \{\varphi(E) : E \in \mathbf{L}\} = \limsup \{\varphi(E) : E \in \mathbf{L}\}$ мы будем говорить, что множество $\{\varphi(E) : E \in \mathbf{L}\}$ имеет предел и обозначим его через $\lim \{\varphi(E) : E \in L\}$.

2,1. Пусть x — произвольный элемент X, $M \subset X$ — произвольное множество, μ положительная и конечная функция на $\mathbf{K}$, ω неотрицательная функция на $\mathbf{X}$. Положим $\mathbf{K}(x) = \{E \in \mathbf{K} : x \in f(E)\}$. Предел

$$d(x) = \lim \left\{ \frac{\omega(E \cap M)}{\mu(E)} : E \in \mathbf{K}(x) \right\}$$

мы будем понимать в только что определенном смысле (с $\mathbf{L} = \mathbf{K}(x)$ и $\varphi(E) = \omega(E \cap M)/\mu(E)$). Аналогичным способом мы определяем $\underline{d}(x) = \liminf\{\ldots\}$ и $\bar{d}(x) = \limsup \{\ldots\}$.

2,2. Примечание. Нетрудно доказать, что функции (1) и (2) тождественны, если системе $\mathbf{K}$ и отображению f придать то же значение, как в примере 1,2.

3. Теорему о плотности в топологическом пространстве мы докажем, грубо говоря, для тех внешних мер, для которых справедлива теорема Витали. Но мы раньше всего докажем теорему о плотности для B_μ-почти всех $x \in X$ (см. теорему 6). Если для μ справедлива теорема Витали, то из сходимости B_μ-почти всюду вытекает сходимость μ-почти всюду (см. лемму 10,3) и, значит, справедлива соответствующая теорема для μ-почти всех $x \in X$ (см. теорему 11).

3,1. Определение. Пусть μ — функция множества, определенная на $\mathbf{K}$. Пусть $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$. Положим

$$B_\mu(L) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i),$$

где верхняя грань берется через все последовательности $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ взаимно непересекающихся множеств из $\mathbf{L}$.

([1]) Под центром шара E мы понимаем всякий элемент $x \in E$ для которого существует число $r > 0$ такое, что $E = C(x, r)$.

Пусть $\emptyset \neq E \subset X$. Обозначим знаком $\mathscr{K}(E)$ множество всех систем $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$, обладающих следующим свойством: Для произвольного элемента $x \in E$ и произвольного множества $F \in \mathbf{K}$ такого, что $x \in f(F)$, существует $G \in \mathbf{L}$ такое, что $G \subset F$ и $x \in f(G)$.

Положим, наконец, $B_\mu(0) = 0$ и для непустого E

$$B_\mu(E) = \inf \{B_\mu(\mathbf{L}) : \mathbf{L} \in \mathscr{K}(E)\}.$$

3.2. **Лемма.** *Если μ неотрицательная на $\mathbf{K}$, то функция множества B_μ является внешней мерой.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать неравенство

$$B_\mu(E) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} B_\mu(E_i) \tag{3}$$

для всех E, E_i таких, что $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. В силу определения B_μ существуют системы $\mathbf{L}_i \in \mathscr{K}(E_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ такие, что

$$B_\mu(E_i) + \varepsilon 2^{-i} > B_{\hat{\mu}}(\mathbf{L}_i). \tag{4}$$

Положим $\mathbf{L} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{L}_i$. Очевидно, $\mathbf{L} \in \mathscr{K}(E)$, значит,

$$B_\mu(E) \leqq B_{\hat{\mu}}(\mathbf{L}). \tag{5}$$

Для системы $\mathbf{L}$ существует согласно определению последовательность множеств $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$, $F_i \cap F_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $F_j \in \mathbf{L}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ такая, что

$$B_\mu(\mathbf{L}) - \varepsilon < \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j). \tag{6}$$

Обозначим $\alpha_i = \{j : F_j \in \mathbf{L}_i\}$. Очевидно $\bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha_i \supset \{1, 2, \ldots\}$.

Из определений α_i и $B_\mu(\mathbf{L}_i)$ вытекает

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j \in \alpha_i} \mu(F_j) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} B_\mu(\mathbf{L}_i). \tag{7}$$

Из соотношений (4)—(7) вытекает

$$B_\mu(E) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} B_{\hat{\mu}}(E_i) + \varepsilon$$

для всякого $\varepsilon > 0$. Из последнего вытекает (3).

4. **Определение.** Знаком $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbf{K})$ мы обозначим систему функций множества μ с областью определения $\mathbf{X}$, обладающих следующим свойством:

Пусть $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность взаимо непересекающихся множеств из $\mathbf{K}$, M — произвольное множество. Тогда справедливо неравенство

$$\mu(M) \geqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(M \cap E_i).$$

4,1. Примечание. В разделе 9 мы приведем два примера функций из $\mathscr{B}$.

5. **Определение.** Пусть $\mathbf{N} \subset \mathbf{X}$, ω — функция множества, определенная на $\mathbf{X}$. Мы будем говорить, что множество $M \subset X$ внешне (внутренне) ($\mathbf{N}$, ω)-регулярно, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $E \in \mathbf{N}$ такое, что $E \supset M$ и $\omega(E - M) < \varepsilon$($E \subset M$, $\omega(M - E) < \varepsilon$).

6. **Теорема.** *Пусть $\mathbf{K} \subset \mathbf{X}$, $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$, f — отображение из $\mathbf{K}$ в $\mathbf{X}$, причем $\mathbf{K}$, f удовлетворяют предположениям* 1. *Пусть для произвольного множества $E \in \mathbf{M}$ и элемента $x \notin E$ существует множество $F \in \mathbf{K}$ такое, что $E \cap F = \emptyset$ и $x \in f(F)$. Пусть μ положительна и конечна на $\mathbf{K}$ и $\omega \in \mathscr{B}(\mathbf{K})$. Пусть M — произвольное внутренне ($\mathbf{M}$, ω)-регулярное множество.*

Тогда для B_μ-почти всех $x \notin M$ справедливо

$$\lim \left\{ \frac{\omega(E \cap M)}{\mu(E)} : E \in \mathbf{K}(x) \right\} = 0.$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 6, мы докажем следующую лемму.

7. **Лемма.** *Пусть X, $\mathbf{K}$, f имеют то же значение, что и в теореме* 6. *Пусть μ — функция множества, положительная и конечная на $\mathbf{K}$, $\omega \in \mathscr{B}(\mathbf{K})$. Для произвольного $t \in (0, \infty)$ и $M \subset X$ положим*

$$G_t = \left\{ x : \left[\limsup \left\{ \frac{\omega(E \cap M)}{\mu(E)} : E \in \mathbf{K}(x) \right\} \right] > t \right\}.$$

Тогда

$$B_\mu(G_t) \leqq \frac{\omega(M)}{t}.$$

Доказательство. Обозначим знаком $\mathbf{N}$ систему тех $F \in \mathbf{K}$, для которых $\omega(F \cap M)/\mu(F) > t$. Пусть $x \in G_t$, $F \in \mathbf{K}$, $x \in f(F)$ (мы следуем определению 3,1). Из свойств $\limsup$ вытекает существование множества $G \in \mathbf{K}(x)$ такого, что $\mu(G \cap M)/\mu(G) > t$, $G \subset F$. Очевидно, $G \in \mathbf{N}$, $x \in f(G)$. Значит, $\mathbf{N} \in \mathscr{K}(G_t)$.

Из последнего вытекает неравенство

$$B_\mu(G_t) \leqq B_\mu(\mathbf{N}). \tag{10}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. По определению $B_\mu(\mathbf{N})$ существует последовательность $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ взаимо непересекающихся множеств из $\mathbf{N}$ такая, что

$$B_\mu(\mathbf{N}) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Так как $E_i \in \mathbf{N}$, то справедливо $\omega(E_i \cap M)/\mu(E_i) > t$ $(i = 1, 2, \ldots)$ значит,

$$B_\mu(\mathbf{N}) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \leqq \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{\infty} \omega(E_i \cap M) \leqq \frac{1}{t}\, \omega(M).$$

Так как последнее неравенство справедливо для всякого $\varepsilon > 0$, то

$$B_\mu(\mathbf{N}) \leqq \frac{1}{t}\, \omega(M). \tag{11}$$

Из (10) и (11) вытекает (9).

8. Доказательство теоремы 6. Обозначим через H_t множество тех $x \in X - M$, для которых $\limsup \{\omega(E \cap M)/\mu(E) : E \in \mathbf{K}(x)\} > t$. Очевидно, достаточно доказать, что $B_\mu(H_t) = 0$ для всех $t \in (0, \infty)$. Выберем произвольное t. Так как M — внутренне $(\mathbf{M}, \omega)$-регулярное множество, то к произвольному $\varepsilon > 0$ существует множество $E \in \mathbf{M}$ такое, что $\omega(M - E) < \varepsilon$, $E \subset M$.

Положим

$$G_t = \left\{x : \limsup \left\{\frac{\omega(F \cap (M - E))}{\mu(F)} : F \in \mathbf{K}(x)\right\} > t\right\}.$$

Согласно лемме 7 справедливо

$$B_\mu(G_t) \leqq \frac{\omega(M - E)}{t} < \frac{\varepsilon}{t}. \tag{12}$$

Возьмем $x \notin M$. Так как $E \subset M$, то $x \notin E$. В силу предположения существует $F \in \mathbf{K}$ такое, что $E \cap F = \emptyset$ и $x \in f(F)$. Это означает, что для $G \in \mathbf{K}(x)$, $G \subset F$ справедливо $G \cap M = G \cap (M - E)$. Из этого вытекает, что

$$\limsup \left\{\frac{\omega(G \cap (M - E))}{\mu(G)} : G \in \mathbf{K}(x)\right\} =$$
$$= \limsup \left\{\frac{\omega(G \cap M)}{\mu(G)} : G \in \mathbf{K}(x)\right\}.$$

Значит, $H_t \subset G_t$. Кроме того, $B_\mu(H_t) < \varepsilon/t$ вследствие (12). Отсюда вытекает, что $B_\mu(H_t) = 0$.

9. В дальнейшем будет X топологическим пространством.

9,1. Определение. Знаком $\mathscr{C}$ мы обозначим систему всех внешних мер в X, обладающих следующим свойством:

Если U, V — произвольные открытые непересевкающиеся множества, и $\bar{A} \subset U, \bar{B} \subset V$,(²) то

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Примечание. Внешние меры, принадлежащие системе $\mathscr{C}$, мы будем называть внешними мерами Каратэодори. Основные свойства таких мер рассмотрены в работах [1] и [5].

Следующую лемму мы приведем без доказательства.

9,2. Лемма. *Пусть X — хаусдорфово (соотв. нормальное) пространство. Пусть $\mathbf{K}$ — система компактных (соотв. замкнутых) множеств. Тогда $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}(\mathbf{K})$.*

Другой пример функции, принадлежащей системе $\mathscr{B}$, таков:

9,3. Определение.(³) Пусть $\mathbf{K} \subset \mathbf{X}$, μ — функция множества, определенная на $\mathbf{K}$. Для произвольного открытого множества U положим

$$C_\mu(U) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

где верхняя грань берется через все последовательности $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ взаимо непересекающихся множеств из $\mathbf{K}$, $E_i \subset U (i = 1, 2, \ldots)$. Для произвольного множества $E \subset X$ положим

$$C_\mu(E) = \inf \{C_\mu(U) : E \subset U, U \text{ открытое}\}.$$

9,4. Лемма. *Пусть $\mathbf{K}$ — какая-нибудь система компактных подмножеств хаусдорфова пространства X. Пусть μ — неотрицательная функция множества, определенная на $\mathbf{K}$. Тогда $C_\mu \in \mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbf{K})$.*

Примечание. Функция множества C_μ может и не быть внешней мерой. В работе [6] приведено достаточное условие для того, чтобы C_μ была внешней мерой в случае, когда X является метрическим пространством.

10. Теперь мы докажем теорему о плотности для некоторых топологических пространств. Одновременно мы заменим сходимость B_μ-почти всюду сходимостью μ-почти всюду.

10,1. Определение. Пусть $\mathbf{L}$ — система замкнутых подмножеств X. Мы скажем, что $\mathbf{L}$ покрывает множество $M \subset X$ в смысле Витали, если для произволь-

(²) $\bar{A}$ обозначает замыкание множества A.

(³) См. также [3], 4.3 на стр. 20 и 4.10 на стр. 26, [6], теорема 3 на стр. 55.

ного $x \in M$ и произвольного открытого множества U, такого, что $x \in U$, существует $G \in \mathbf{L}$ такое, что $G \subset U$ и $x \in G^{\circ}$.(⁴)

10,2. Определение. Пусть $\mathbf{K}$ — система замкнутых подмножеств X. Через $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\mathbf{K})$ мы обозначим систему всех внешних мер удовлетворяющих следующему условию:

Пусть $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$, $M \subset X$, $\mathbf{L}$ покрывает множество M в смысле Витали. Тогда существует последовательность $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ взаимо непересекающихся множеств из $\mathbf{L}$ такая, что $\mu(M - \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i) = 0$.

Примечание. Мы будем говорить, что для внешней меры $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{K})$ справедлива теорема Витали с системой $\mathbf{K}$. В метрических пространствах хорошо известны условия достаточные для того чтобы $\mu \in \mathscr{D}$ (см. напр. [4]).

10,3. Лемма. *Пусть $\mathbf{K}$ система замкнутых подмножеств X покрывающая X в смысле Витали. Пусть f — отображение из $\mathbf{K}$ в $\mathbf{X}$, обладающее свойствами 1 и следующим свойством: $\bigcup \{f(F) : F \subset E, F \in \mathbf{K}\} = E^{\circ}$, для всякого $E \in \mathbf{K}$. Пусть $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{K})$.*

Тогда $B_\mu(M) = 0 \Rightarrow \mu(M) = 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Возьмем $\mathbf{L} \in \mathscr{K}(M)$ так, чтобы $B_\mu(\mathbf{L}) < \varepsilon$. Мы докажем, что $\mathbf{L}$ покрывает множество M в смысле Витали. Пусть $x \in M$, $x \in U$, U — открытое множество. Возьмем $E \in \mathbf{K}$ так, чтобы $x \in E^{\circ}$, $E \subset U$. В силу предположения теоремы существует $F \in \mathbf{K}$, $F \subset E$ такое, что $x \in f(F) \subset E^{\circ}$. По определению 3,1 существует $G \in \mathbf{L} \subset \mathbf{K}$ такое, что $x \in f(G) \subset G^{\circ} \subset G \subset F \subset E \subset U$. Значит, для произвольного открытого U и произвольного $x \in M \cap U$ существует $G \in \mathbf{L}$ такое, что $x \in G^{\circ}$, $G \subset U$, т. е. $\mathbf{L}$ покрывает M в смысле Витали.

Так как $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{K})$, то существует последовательность $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ взаимо непересекающихся множеств из $\mathbf{L}$ такая, что $\mu(M - \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i) = 0$. Отсюда вытекает

$$\mu(M) \leqq \mu(M - \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i) + \mu(M \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(L_i) \leqq B_\mu(\mathbf{L}) < \varepsilon$$

для всякого $\varepsilon > 0$, значит, $\mu(M) = 0$.

11. Теорема. *Пусть X — хаусдорфово (соотв. нормальное) пространство. Пусть $\mathbf{K}$ — система компактных (соотв. замкнутых) множеств, покрывающая X в смысле Витали. Пусть $\mu \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}(\mathbf{K})$.(⁵) μ конечна и положительна*

(⁴) G° является открытым ядром G.

(⁵) См. 9,1 и 10,2.

на $\mathbf{K}$. Пусть $\mathbf{M}$ — система всех замкнутых множеств в X. Пусть M — произвольное $(\mathbf{M}, \mu)$-регулярное множество. Для $E \in \mathbf{K}$ положим $f(E) = E^{\circ}$.

Тогда

$$\lim \left\{ \frac{\mu(E \cap M)}{\mu(E)} : E \in \mathbf{K}(x) \right\} = 0 \ (^6)$$

для μ-почти всех $x \in X - M$.

Доказательство. В теореме 6 положим $\omega = \mu$. В силу леммы 9,2 справедливо $\mu \in \mathscr{B}(\mathbf{K})$. Из теоремы 6 вытекает (13) для B_μ-почти всех $x \in X - M$, значит, в силу леммы 10,3 справедливо (13) для μ-почти всех $x \in X - M$.

Примечание. Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство. Тогда система $\mathbf{K}$ всех компактных множеств удовлетворяет условиям теоремы 11.

12. Попытаемся теперь доказать теорему, аналогичную теореме, приведенной нами в введении.

12,1. Определение. Пусть $\mathbf{M}$ — система всех замкнутых множеств в X, $\mathbf{N}$ — система всех открытых множеств в X. Мы будем говорить, что множество $E \subset X$ регулярно, если оно внутренне $(\mathbf{M}, \mu)$-регулярно и внешне $(\mathbf{N}, \mu)$-регулярно.(7)

Примечание. Если E регулярно, то регулярно и множество $X - E$. Если E регулярно в смысле книги [2], а X хаусдорфово пространство, то E регулярно также в смысле определения 12,1.

12,2. Теорема. *Пусть X — хаусдорфово (соотв. нормальное) пространство, $\mathbf{K}$ — система компактных (соотв. замкнутых) подмножеств X покрывающая X в смысле Витали, f — отображение из $\mathbf{K}$ в $\mathbf{X}$, причем $\mathbf{K}$, f удовлетворяют предположениям 1. Пусть, кроме того, $\bigcup\{f(F) : F \subset E,\ F \in \mathbf{K}\} = E^{\circ}$ для всякого $E \in \mathbf{K}$. Пусть $\mu \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}(\mathbf{K})$, μ положительна и конечна на $\mathbf{K}$. Пусть M — произвольное регулярное μ-измеримое множество.*

Тогда

$$\lim \left\{ \frac{\mu(E \cap M)}{\mu(E)} : E \in \mathbf{K}(x) \right\} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{для } \mu\text{-почти всех } x \in X - M, \\ 1 & \text{для } \mu\text{-почти всех } x \in M. \end{cases} \qquad (14)$$

---

(6) Предел был определен в 2,1.

(7) См. определение 5.

Доказательство. Положим в теореме 6 $\omega = \mu$, $\mathbf{M}$ равным системе всех замкнутых множеств. Тогда из теоремы 6 (с учетом леммы 9,2 и 10,3) вытекает первая строчка в (14).

Так как множество $X - M$ внутренне $(\mathbf{M}, \mu)$-регулярно, то приведенные рассуждения могут быть применены и для него, значит,

$$\lim \left\{ \frac{\mu(E \cap (X - M))}{\mu(E)} : E \in \mathbf{K}(x) \right\} = 0 \tag{15}$$

для μ-почти всех $x \in M$. Так как M, μ-измеримо, то

$$\mu(E) = \mu(E \cap M) + \mu(E \cap (X - M))$$

для всякого $E \in \mathbf{K}(x)$ и, значит, $(0 < \mu(E) < \infty)$

$$\frac{\mu(E \cap M)}{\mu(E)} = 1 - \frac{\mu(E \cap (X - M))}{\mu(E)} . \tag{16}$$

Из (16) и (15) вытекает вторая строчка в (14).

13. Приведем несколько следствий теоремы 12,2. Притом мы положим $f(E) = E$ и предел будем понимать в смысле определения 2,1.

13,1. Теорема. *Пусть X — нормальное (соотв. хаусдорфово) пространство, $\mathbf{K}$ — система замкнутых (соотв. компактных) множеств, покрывающая X в смысле Витали. Пусть $\mu \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}(\mathbf{K})$, μ конечна и положительна на $\mathbf{K}$.*

Тогда для любого регулярного μ-измеримого множества M справедливо μ-почти всюду

$$\lim \left\{ \frac{\mu(E \cap M)}{\mu(E)} : E \in \mathbf{K}(x) \right\} = \chi_M(x). \tag{17}$$

Доказательство вытекает из теоремы 12,2.

13,2. Теорема. *Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, $\mathbf{K}$ — система компактных множеств, покрывающая X в смысле Витали. Пусть $\mu \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}(\mathbf{K})$, μ положительна и конечна на $\mathbf{K}$.*

Тогда для произвольного бэровского(8) *множества M справедливо μ-почти всюду* (17).

Доказательство. В [5] доказана следующая теорема (при приведенных здесь предположениях о X): Если $\mu \in \mathscr{C}$, то каждое бэровское множество μ-измеримо. Далее, так как μ конечна и положительна на компактных G_δ множествах, то μ на бэровских множествах является бэровской, значит, регулярной

(8) См. [2].

мерой.(9) Отсюда легко вытекает, что все бэровские множества регулярны. Так как M μ-измеримо и регулярно, то требуемый результат следует из теоремы 13,1.

13,3. Теорема. *Пусть X — метрическое пространство, $\mathbf{K}$ — система всех замкнутых шаров. Пусть $\mu \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}(\mathbf{K})$, μ положительна и конечна на $\mathbf{K}$.*

Тогда для любого регулярного μ-измеримого множества M справедливо (17) *μ-почти всюду.*

Доказательство вытекает из теоремы 13,1.

13,4. Теорема. *Пусть X — эвклидово n-мерное пространство, $\mathbf{K}$ — система всех замкнутых кубов. Пусть μ n-мерная мера Лебега.*

Тогда для любого борелевского множества M справедливо почти всюду (17).

Доказательство вытекает из теоремы 13,2.

14. В следующих следствиях $f(E)$ равно множеству центров соответственно шара и куба E.

14,1. Теорема. *Пусть X — метрическое пространство, $\mathbf{K}$ — система замкнутых шаров. Пусть $\mu \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}(\mathbf{K})$, μ положительна и конечна на $\mathbf{K}$. Пусть M — произвольное регулярное μ-измеримое множество.*

Тогда

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu(c(x, r) \cap M)}{\mu(c(x, r))} = \chi_M(x)$$

μ-почти всюду в X.

Доказательство. В теореме 12,2 положим $\mathbf{K}$ равным системе всех замкнутых шаров и для $E \in \mathbf{K}$ положим $f(E)$ равным множеству центров шара E. Нетрудно усмотреть, что

$$\lim \left\{ \frac{\mu(E \cap M)}{\mu(E)} : E \in \mathbf{K}(x) \right\} = \lim_{r \to 0} \frac{\mu(c(x, r) \cap M)}{\mu(c(x, r))}.$$

14,2. Теорема. *Пусть X — эвклидово n-мерное пространство. Обозначим через $K(x, r)$ куб с центром x с длиной ребра $2r$, через μ n-мерную меру Лебега.*

Тогда для всякого борелевского множества M справедливо μ-почти всюду

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu(K(x, r) \cap M)}{\mu(K(x, r))} = \chi_M(x).$$

(9) Если $\mathbf{K}$ покрывает X в смысле Витали и μ конечна на $\mathbf{K}$ то из этого легко следует, что μ конечна на всех компактных множествах.

Доказательство. В теореме 12,2 положим **K** равным системе всех замкнутых кубов, а для $E \in \mathbf{K}$, $f(E)$ равным множеству состоящему из одного элемента — центра куба E.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bourbaki N., *Sur un théoreme de Carathéodory et la mesure dans les espaces topologiques*, C. R. Acad. sci. Paris *201* (1935), 1309—1311.

[2] Halmos P. R., *Measure Theory*, New York 1950 (Халмош П. Р., *Теория меры*, Москва 1953).

[3] Mickle E. J., Rado T., *On density theorems for outer measures*, Rozprawy matematyczne XXI, Warszawa 1960.

[4] Morse A. P., *A theory of covering and differentiation*, Trans. Amer. Math. Soc. *55* (1944), 205—235.

[5] Riečanová Z., *О внешней мере Каратеодори*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV *12* (1962), 246—252.

[6] Riečan B., *Poznámka ku konštrukcii miery*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV *12* (1962), 47—59.

Поступило 17. V. 1962 г.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebnej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

ON THE DENSITY OF OUTER MEASURES IN THE TOPOLOGICAL SPACE

Beloslav Riečan

Summary

Let X be a topological space. Denote by $\mathscr{C}$ the system of all outer measures fulfilling the following condition: If U, V are open, disjoint sets, and $\bar{A} \subset U$, $\bar{B} \subset V$, then $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

We say **K** covers $M \subset X$ in the sense of Vitali if and only if **K** is such a family of closed subsets of X that coresponding to each open set U and each $x \in M$ there is a set $E \subset \mathbf{K}$ for which $x \in E^{\circ}$ (E° being the interior of E) and $E \subset U$.

Let **K** be any family of closed sets covering X in the sense of Vitali. Denote by $\mathscr{D}(\mathbf{K})$ the system of all outer measures fulfilling the following condition: If $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$, $M \subset X$, **L** covers M in the sense of Vitali, then there is a sequence $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ of disjoint sets from **L** such that $\mu(M - \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i) = 0$.

A set M will be called regular if and only if coresponding to each positive number ε there is an open set U and a closed set C for which $C \subset M \subset U$ and $\mu(U - M) < \varepsilon$ and $\mu(M - C) < \varepsilon$.

Finally, let **K** be any family of sets in X. Let x be any element of X. Let us denote by $\mathbf{K}(x)$ the family of such $E \in \mathbf{K}$ for which $x \in E^{\circ}$. Let μ be a real-valued set-function defined on **K**. We say

that number L is the limit of μ in the point x if for each positive number ε there exists $E \in K(x)$ such that $|\mu(F) - L| < \varepsilon$ for any $F \in \mathbf{K}(x)$, $F \subset E$.

In this article a general theorem has been proved (theorem 6) from which the following theorems follow:

Theorem 13.1. *Let X be a Hausdorff (resp. normal) topological space, $\mathbf{K}$ the family of compact (resp. closed) sets covering X in the sense of Vitali. Let $\mu \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}(\mathbf{K})$, μ be positive and finit on $\mathbf{K}$.*

Then for any regular μ-measurable set M holds

$$\lim \left\{ \frac{\mu(E \cap M)}{\mu(E)} : E \in \mathbf{K}(x) \right\} = \chi_M(x)(^{10})$$

μ-almost everywhere in X.

Theorem 14,1. *Let X be a metric space, $\mathbf{K}$ be the family of all closed spheres. Let $\mu \in \mathscr{C} \cup \mathscr{D}(\mathbf{K})$, μ be positive and finit on $\mathbf{K}$.*

Then for any regular μ-measurable set M is

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu\big(c(r, x) \cap M\big)}{\mu\big(c(x, r)\big)} = \chi_M(x)(^{11}).$$

μ-almost everywhere in X.

---

[10] χ_M is the characteristic function of M.

[11] If ϱ is the metric function in X, then $c(x, r) = \{y : \varrho(y, x) \leqq r\}$.