Štefan Schwarz

Суммы степеней бинарных отношений

Matematický časopis, Vol. 24 (1974), No. 2, 161--171

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126603

Mat. čas. 24, 1974, No 2, 161—171

СУММЫ СТЕПЕНЕЙ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

ШТЕФАН ШВАРЦ

Пусть $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ конечное множество, содержащее $n > 1$ элементов. Бинарным отношением в Ω называется подмножество декартова произведения $\Omega \times \Omega$. Пустое отношение будем обозначать символом z, универсальное отношение $\Omega \times \Omega$ символом ω.

В множестве $B(\Omega)$ всех бинарных отношений в Ω определим обычным образом умножение отношений, так что $B(\Omega)$ превращается в полугруппу.

Пусть $\varrho \in B(\Omega)$. Рассмотрим последовательность степеней

$$\varrho, \varrho^2, \varrho^3, \ldots \tag{1}$$

Эта последовательность содержит только конечное число различных элементов (бинарных отношений). Пусть $k = k(\varrho)$ — наименьшее натуральное число, для которого $\varrho^k = \varrho^l$ с некоторым $l > k$. Пусть, далее, $l = k + d\,(d \geqq 1)$ — наименьшее натуральное число, для которого имеет место это равенство. Тогда последовательность (1) имеет вид

$$\varrho, \varrho^2, \ldots, \varrho^{k-1} \mid \varrho^k, \ldots, \varrho^{k+d-1} \mid \varrho^k, \ldots \tag{2}$$

Известно, что $G(\varrho) = \{\varrho^k, \varrho^{k+1}, \ldots, \varrho^{k+d-1}\}$ — циклическая группа (с умножением, определенным выше). Единицей группы $G(\varrho)$ является некоторая степень ϱ^r, $k \leqq r \leqq k + d - 1$. Более точно: Пусть $\beta \geqq 1$ однозначно определенное натуральное число, удовлетворяющее условию $k \leqq \beta d \leqq k + d - 1$. Тогда $r = \beta d$. (Для дальнейших свойтсв см. [1]).

Обычное 0—1 матричное представление отношения ϱ будем обозначать символом $\mathbf{M}(\varrho)$.

Ко всякой неотрицательной $n \times n$-матрице $\mathbf{A} = (a_{ij})$ сопоставим в соответствие бинарное отношение $\varrho_{\mathbf{A}}$ посредством условия $(a_i, a_j) \in \varrho_{\mathbf{A}} \Leftrightarrow a_{ij} > 0$.

Соответствие $\mathbf{A} \to \varrho_{\mathbf{A}}$ имеет следующее свойство: Если $\mathbf{A} \to \varrho_{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B} \to \varrho_{\mathbf{B}}$, то $\mathbf{AB} \to \varrho_{\mathbf{A}}\varrho_{\mathbf{B}}$. Изучение степеней $\varrho_{\mathbf{A}}$ эквивалентно исследованию степеней неотрицательной матрицы с точки зрения распределения нулевых и ненулевых элементов в степенях матрицы $\mathbf{A}$. Изучение степеней ϱ можно тоже трактовать как исследование степеней конечного ориентированного графа.

Вернемся к группе $G(\varrho)$. Так как она циклическая, то существует натуральное число u, такое, что $G(\varrho) = \{\varrho^u, \varrho^{2u}, \ldots, \varrho^{du}\}$. Вообще число u определено не однозначно. В дальнейшем (на протяжении всей статьи) мы положим $u = r + 1$. [Это возможно, так как из d/r вытекает $(r + 1, d)$ 1.] Обозначим $\delta = \varrho^{r+1}$.

Лемма 1. а) *Для всякого* $t \geqq 1$ *имеет место* $\delta^t = \varrho^{t+r}$.

б) *Для всяких* $t \geqq 1$, $s \geqq 1$ *имеет место* $\delta^t \,.\, \varrho^s = \delta^{t+s}$.

Доказательство. а) Для $t = 1$ — это определение δ. Для $t > 1$, получаем $\delta^t = \varrho^{(r+1)t} = \varrho^{r(t-1)} \,.\, \varrho^{r+t} = \varrho^r \,.\, \varrho^{r+t} = \varrho^{r+t}$.

б) $\delta^t \,.\, \varrho^s = \varrho^{r+t} \,.\, \varrho^s = \varrho^{r+t+s} = \delta^{t+s}$.

Согласно нашему договору мы будем писать группу $G(\varrho)$ в виде

$$G(\varrho) = \{\delta, \delta^2, \ldots, \delta^d\},$$

где δ^d — единица группы $G(\varrho)$.

Лемма 2. *Никакое из отношений* $\delta, \delta^2, \ldots, \delta^d$ *не является подмножеством ни одного из остальных.*

Доказательство. Предположим, что $\delta^{t_1} \subset \delta^{t_2}$, $1 \leqq t_1 < t_2 \leqq d$. Умножая на δ^{d-t_1}, получаем $\delta^d \subset \delta^{d+u}$, где $u = t_2 - t_1 < d$, откуда следует

$$\delta^d \subset \delta^{d+u} \subset \delta^{d+2u} \subset \ldots \subset \delta^{d+du} = \delta^d.$$

Следовательно, $\delta^d = \delta^{d+u}$, где $0 < u < d$. Это противоречит определению числа $d = d(\varrho)$. Случай $1 \leqq t_2 < t_1 \leqq d$ можно трактовать аналогичным образом.

Если $\varrho \in B(\Omega)$, то легко доказать, что транзитивным замыканием ϱ является отношение $\bar{\varrho} = \varrho \cup \varrho^2 \cup \ldots \cup \varrho^n$, так что для всякого натурального $t \geqq 1$ всегда имеет место $\varrho^t \subset \varrho \cup \ldots \cup \varrho^n$. Отсюда вытекает

$$\delta \cup \delta^2 \cup \ldots \delta^d \subset \varrho \cup \varrho^2 \cup \ldots \cup \varrho^n.$$

Из этого следует, что для всякого $t \geqq 1$

$$\delta \cup \delta^2 \cup \ldots \cup \delta^d \subset \varrho^t \cup \varrho^{t+1} \cup \ldots \cup \varrho^{n+t-1}.$$

В работе [1] показано, что для всякого бинарного отношения всегда имеет место

$$\delta \cup \delta^2 \cup \ldots \cup \delta^d = \varrho^n \cup \varrho^{n+1} \cup \ldots \cup \varrho^{2n-1}$$

и этот результат невозможно улучшить в том смысле, что существуют отношения, для которых $\delta \cup \ldots \cup \delta^d = \varrho^{n-1} \cup \ldots \cup \varrho^{2n-2}$ не имеет места.

В § 1 этой статьи дается новое, более простое, доказательство этого утверждения. В § 2 получена новая формула (см. Теорему 3), которая имеет место для любого бинарного отношения в Ω. [Аналогичная формула в частном случае для так называемых неразложимых отношений была доказана в [1], стр. 665.]

Необходимо заметить, что значение результатов этой работы в том, что они имеют место и в случае разложимых отношений [в терминологии графов: и в случае ориентированных графов, которые не сильно связны].

§ 1.

Припомним, что отношение ϱ в Ω называется неразложимым тогда и только тогда, если $\varrho \cup \varrho^2 \cup \ldots \cup \varrho^n = \Lambda^2, \Lambda \subset \Omega$. В [1] (стр. 663) мы доказали, что для неразложимого отношения всегда имеет место $\varrho \subset \delta$. Это не обязательно верно для любого ϱ в Ω. Однако, мы покажем:

Теорема 1. *Для любого бинарного отношения в Ω и любого $t \geqq n$ имеет место $\varrho^t \subset \delta^t$.*

Доказательство. 1. Покажем во-первых, что $\varrho^n \subset \delta^n$. Если $(a_i, a_i) \in \in \varrho^n$, то (a_i, a_i) содержится тоже в $(\varrho^n)^{r+1} \quad \delta^n$. Пусть (a_i, a_j), $i \neq j$, любая пара $\in \varrho^n$. Тогда существует n пар $(a_{i_h}, a_{i_{h+1}})$ (каждая из которых принадлежит ϱ), так что (полагая $i - i_1$, $j = i_{n+1}$)

$$(a_i, a_j) = (a_{i_1}, a_{i_2})(a_{i_2}, a_{i_3}) \ldots (a_{i_n}, a_{i_{n\ 1}}).$$

Между $n + 1$ элементами $a_i = a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{n+1}} - a_j$ существует самое большее n различных элементов. Поэтому существуют два натуральных числа, скажем p, q, $1 \leqq p < q \leqq n + 1$ таких, что $a_{i_p} = a_{i_q}$. Тогда

$$(a_{i_p}, a_{i_{p+1}}) \ldots (a_{i_{q\ 1}}, a_{i_q}) = (a_{i_p}, a_{i_p})$$

и

$$(a_i, a_j) = (a_{i_1}, a_{i_2}) \ldots (a_{i_{p\ 1}}, a_{i_p})(a_{i_p}, a_{i_p})(a_{i_q}, a_{i_{q+1}}) \ldots (a_{i_n}, a_{i_{n+1}}). \tag{3}$$

Пара (a_{i_p}, a_{i_p}) содержится в ϱ^w, где $1 \leqq w = p - q \leqq n$. [Заметим, что w зависит от (a_i, a_j), так что $w = w(i, j)$.]

Равенство (3) остается верным, если вставить вместо (a_{i_p}, a_{i_p}) любое число этих пар. Это значит, что (a_i, a_j) содержится не только в ϱ^n но также в ϱ^{n+wx}, причем x — любое натуральное число. Положим $x = r = r(\varrho)$, где $r(\varrho)$ определено выше. Тогда $(a_i, a_j) \in \varrho^{n+wr}$. Если $w = 1$, то $(a_i, a_j) \in \in \varrho^{n+r} \quad \delta^n$. Если $w > 1$, мы имеем $(a_i, a_j) \in \varrho^{(w-1)r}\varrho^{r+n} = \delta^d \,.\, \delta^n = \delta^n$. Так как (a_i, a_j) любой элемент $\in \varrho^n$, то $\varrho^n \subset \delta^n$.

2. Умножим теперь $\varrho^n \subset \delta^n$ на ϱ^{t-n}, где $t > n$. Пользуясь леммой 1, мы получаем $\varrho^t \subset \delta^n \varrho^{t-n} = \delta^t$. Это и доказывает нашу теорему.

Пример 1. Теорема 1 не всегда имеет место, если $t < n$. Пусть, например, $\Omega = \{a_1, a_2, a_3\}$ и ϱ — отношение в Ω с матричным представлением

$$\mathbf{M}(\varrho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{M}(\varrho^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}(\varrho^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, $d = 1$, $k(\varrho) = 3$ и $\delta = \varrho^3 = z$. Очевидно, что ни $\varrho \subset \delta$, ни $\varrho^2 \subset \delta^2$ не имеет место.

Пример 2. Пусть $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и

$$\mathbf{M}(\varrho) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{M}(\varrho^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}(\varrho^3) = \mathbf{M}(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $d = 1$, $\varrho \not\subset \delta$, $\varrho^2 \not\subset \delta^2$, $\varrho^3 = \delta^3 = \delta$.

Нам будет нужна еще следующая лемма.

Лемма 3. *Для любого ϱ^t, $t \geqq n$, существует единственный элемент $\in G(\varrho)$ (а именно δ^t), который содержит ϱ^t.*

Доказательство. Предположим $\varrho^t \subset \delta^{t_1}$ с некоторым t_1, $1 \leqq t_1 \leqq d$. Умножая на $\varrho^r = \delta^d$, мы получаем $\varrho^{t+r} \subset \delta^{t_1}$. По лемме 1 $\varrho^{t+r} = \delta^t$, следовательно, $\delta^t \subset \delta^{t_1}$. По лемме 2 $\delta^t = \delta^{t_1}$.

Теорема 2. *Для всякого бинарного отношения имеет место*

$$\varrho^n \cup \varrho^{n+1} \cup \ldots \cup \varrho^{2n-1} = \delta \cup \delta^2 \cup \ldots \cup \delta^d.$$

Доказательство. 1. Из теоремы 1 непосредственно следует

(4) $$\varrho^n \cup \ldots \cup \varrho^{2n-1} \subset \delta^n \cup \ldots \cup \delta^{2n-1} \subset \delta \cup \delta^2 \cup \ldots \cup \delta^d.$$

2. Как мы уже заметили, всегда справедливо

(5) $$\delta \cup \delta^2 \cup \ldots \cup \delta^d \subset \varrho \cup \varrho^2 \cup \ldots \cup \varrho^n.$$

Умножая обе части на ϱ^{n-1} и учитывая лемму 1, мы получаем

$$\delta\varrho^{n-1} \cup \delta^2\varrho^{n-1} \cup \ldots \cup \delta^d\varrho^{n-1} = \delta^n \cup \delta^{n+1} \cup \ldots \cup \delta^{d+n-1} \subset$$
$$\subset \varrho^n \cup \varrho^{n+1} \cup \ldots \cup \varrho^{2n-1}.$$

Так как

$$\{\delta^n, \delta^{n+1}, \ldots, \delta^{d+n-1}\} = \{\delta, \delta^2, \ldots, \delta^d\},$$

то

(6) $$\delta \cup \delta^2 \cup \ldots \cup \delta^d \subset \varrho^n \cup \varrho^{n+1} \cup \ldots \cup \varrho^{2n-1}.$$

Включения (4) и (6) доказывают теорему 2.

§ 2.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующим обозначением. Если $a_i \in \Omega$, то $a_i\varrho = \{x \in \Omega / (a_i, x) \in \varrho\}$. Если N — подмножество Ω, то $N\varrho = \bigcup_{a_i \in N} a_i\varrho$.

Заметим для дальнейших целей: Если a_i — любой элемент $\in \Omega$ и $a_i\delta^h \neq \emptyset$ для некоторого h, $1 \leqq h \leqq d$, то каждое из множеств $a_i\delta$, $a_i\delta^2$, $\ldots$, $a_i\delta^d$ не пусто. В самом деле, $a_i\delta^l = \emptyset$ для некоторого l, $1 \leqq l \leqq d$, влечет за собой $a_i\delta^l \,.\, \delta^{d+h-l} = a_i\delta^h = \emptyset$, что противоречит предположению.

По теореме 1 мы имеем $\varrho^n \subset \delta^n$. Отсюда $\varrho^{n+d} = \varrho^n \,.\, \varrho^d \subset \delta^n\varrho^d = \delta^n$, т. е. $\varrho^{n+d} \subset \delta^n$. Аналогично $\varrho^{n+2d} \subset \delta^n$ и т. д. Следовательно:

(7) $$\varrho^n \cup \varrho^{n+d} \cup \varrho^{n+2d} \cup \ldots \subset \delta^n.$$

Так как $\varrho^{n+\beta d} = \delta^n$ (где $\beta d = r$), то, очевидно, что в (7) имеет место знак равенства, если в левой части взять достаточно много слагемых. В частности тривиально, что

(8) $$\varrho^n \cup \varrho^{n+d} \cup \ldots \cup \varrho^{n+\beta d} = \delta^n.$$

Целью следующих рассуждений является доказательство того, что в (7) нам не нужно брать очень много слагаемых для того, чтобы получить знак равенства.

Сначала мы докажем более слабый результат (который мы потом улучшим в теореме 3).

Предложение 1. *Для всякого бинарного отношения в Ω существует натуральное $l \leqq n - 1$, такое что*

$$(9)\qquad \varrho^n \cup \varrho^{n+d} \cup \varrho^{n+2d} \cup \ldots \cup \varrho^{n+ld} = \delta^n.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого $a_i \in \Omega$

$$a_i\varrho^n \cup a_i\varrho^{n+d} \cup \ldots \cup a_i\varrho^{n+(n-1)d} = a_i\delta^n.$$

Если $a_i\varrho^n$ — пустое множество, то $a_i\delta^n$ тоже пустое, и утверждение тривиальным образом верно. Поэтому предположим, что $a_i\varrho^n$ содержит, по крайней мере, один элемент $\in \Omega$. Рассмотрим цепочку

$$a_i\varrho^n \subset (a_i\varrho^n \cup a_i\varrho^{n+d}) \subset (a_i\varrho^n \cup a_i\varrho^{n+d} \cup a_i\varrho^{n+2d}) \subset \ldots,$$

Так как любой член этой цепочки содержит самое большее n элементов, то существует целое число l_i, $0 \leqq l_i \leqq n-1$, так что

$$a_i\varrho^n \cup a_i\varrho^{n+d} \cup \ldots \cup a_i\varrho^{n+l_id} = a_i\varrho^n \cup a_i\varrho^{n+d} \cup \ldots \cup a_i\varrho^{n+(l_i+1)d},$$

значит,

$$(10)\qquad a_i\varrho^{n+(l_i+1)d} \subset a_i\varrho^n \cup \ldots \cup a_i\varrho^{n+l_id}.$$

Если $l_i = n-1$, то

$$(11)\qquad a_i\varrho^{n+nd} \subset a_i\varrho^n \cup \ldots \cup a_i\varrho^{n+(n-1)d}.$$

Если $l_i < n-1$, то умножая (10) на $\varrho^{(n-1-l_i)d}$, мы получаем опять (11). Следовательно, (11) имеет место для всякого $a_i \in \Omega$. Отсюда следует:

$$(12)\qquad \varrho^{n+nd} \subset \varrho^n \cup \varrho^{n+d} \cup \ldots \cup \varrho^{n+(n-1)d}.$$

Умножая (12) на ϱ^d, мы получаем:

$$\varrho^{n+(n+1)d} \subset \varrho^n \cup \ldots \cup \varrho^{n+(n-1)d},$$

и повторяя этот процесс приходим к результату

$$\varrho^{n+td} \subset \varrho^n \cup \varrho^{n+d} \cup \ldots \cup \varrho^{n+(n-1)d},$$

для всякого натурального $t \geqq n$. Это вместе с (8) доказывает предложение 1.

Замечание. Предложение 1 не обязательно верно, если n заменим на $n-1$. Если ϱ — отношение из примера 1, то $\varrho^2 \cup \varrho^3 \cup \varrho^4 = (a_3, a_1) \neq z$, в то время как $\delta^2 = z$.

Возникает вопрос, нельзя-ли оценку $l \leqq n-1$ улучшить, Оказывается, что всегда имеет место $l \leqq n-2$, а это (вообще говоря) самый лучший возможный результат. Для доказательства этого утверждения нам понадобятся еще некоторые вспомогательные рассуждения.

Лемма 4. *Для фиксированного $a_i \in \Omega$ никакое из множеств $a_i\delta, a_i\delta^2, \ldots, a_i\delta^d$ не содержится как собственное подмножество в некотором из остальных.*

Замечание. В отличие от леммы 2 в лемме 4 некоторые из множеств $a_i\delta, \ldots, a_i\delta^d$ могут совпадать.

Доказательство. Если $a_i\delta = \emptyset$, то утверждение тривиальное. Предположим, что $\emptyset \neq a_i\delta^{h_1} \subset a_i\delta^{h_2}$, $1 \leqq h_1 < h_2 \leqq d$. Умножая на $\delta^{h_2-h_1}$, мы получаем $a_i\delta^{h_2} \subset a_i\delta^{h_2+(h_2-h_1)}$ и из этого следует

$$a_i\delta^{h_1} \subset a_i\delta^{h_2} \subset a_i\delta^{h_2+(h_2-h_1)} \subset \ldots \subset a_i\delta^{h_2+(d-1)(h_2-h_1)}.$$

Умножая каждый член на δ^{dh_1}, мы имеем

$$a_i\delta^{h_1} \subset a_i\delta^{h_2} \subset \ldots \subset a_i\delta^{dh_2+h_1} = a_i\delta^{h_1},$$

следовательно, $a_i\delta^{h_1} = a_i\delta^{h_2}$. В случае $1 \leqq h_2 < h_1 \leqq d$ доказательство аналогично.

Следствие. Если для фиксированного a_i одно из множеств $a_i\delta, \ldots, a_i\delta^d$ равно Ω, то каждое из этих множеств равно Ω.

Лемма 5. *Пусть $\varrho \in B(\Omega)$ и $\bar{\varrho} = \varrho \cup \varrho^2 \cup \ldots \cup \varrho^n$ — транзитивное замыкание ϱ. Тогда всякий элемент (a_i, a_j), $i \neq j$, который содержится в $\bar{\varrho}$, содержится также и в $\varrho \cup \varrho^2 \cup \ldots \cup \varrho^{n-1}$.*

Доказательство. Предположим, что (a_i, a_j), $i \neq j$, содержится в ϱ^n. Тогда существует n пар так, что

$$(a_i, a_j) = (a_{i_1}, a_{i_2})(a_{i_2}, a_{i_3}) \ldots (a_{i_n}, a_{i_{n+1}}), \tag{13}$$

причем мы обозначили $i = i_1$, $j = i_{n+1}$, и каждая из пар в правой части (13) содержится в ϱ. Так как элементы $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{n+1}}$ (в числе $n + 1$) не могут быть все разные, то существует по крайней мере один, который появляется более, чем раз. Если $i_p = i_q$ $(1 \leqq p < q \leqq n + 1)$, то в (13) можно опустить произведение $(a_{i_p}, a_{i_{p+1}}) \ldots (a_{i_{q-1}}, a_{i_q})$, так что $(a_i, a_j) \in \varrho^s$, где $s \leqq n - 1$. Следовательно, $(a_i, a_j) \in \varrho \cup \ldots \cup \varrho^{n-1}$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Для всякого $\varrho \in B(\Omega)$ имеет место*

$$\varrho^n \cup \varrho^{n+d} \cup \ldots \cup \varrho^{n+(n-2)d} = \delta^n. \tag{14}$$

Доказательство. Случай 1. Докажем сначала, что теорема верна, если $d \geqq n - 1$. Известно (см. [1], стр. 653), что для всякого бинарного отношения ϱ в Ω мы имеем $\varrho^{n^2-2n+2} \in G(\varrho)$. Если $d \geqq n - 1$, то $n + (n - 2)d \geqq$ $\geqq n + (n - 2)(n - 1) = n^2 - 2n + 2$, следовательно, $\varrho^{n+(n-2)d} \in G(\varrho)$. Значит, теорема 3 верна в том смысле, что $\varrho^{n+(n-2)d} = \delta^n$. (См. Леммы 2 и 3.)

Поэтому в дальнейшем ходе доказательства мы можем ограничиться случаем $d < n$ (даже $d < n - 1$).

В дальнейшем l_i обозначает наименьшее натуральное число, для которого имеет место $a_i\varrho^n \cup a_i\varrho^{n+d} \cup \ldots \cup a_i\varrho^{n+l_id} = a_i\delta^n$.

Случай 2. Пусть $a_i\delta \neq \Omega$, значит (см. следствие леммы 4) card $(a_i\delta^n) \leqq$ $\leqq n - 1$. Рассмотрим цепочку

$$a_i\varrho^n \subset (a_i\varrho^n \cup a_i\varrho^{n+d}) \subset \ldots \subset (a_i\varrho^n \cup \ldots \cup a_i\varrho^{n+ld}) \subset \ldots \subset a_i\delta^n.$$

Так как $a_i\delta^n$ содержит самое большее $n - 1$ элементов, то пользуясь методом из доказательства предложения 1, мы получим, что $l_i \leqq n - 2$.

Случай 3. Предположим, что a_i такое, что $a_i\delta = \Omega$. Докажем сначала, что в этом случае имеет место

(15) $$a_i\varrho^d \cup a_i\varrho^{2d} \cup \ldots \cup a_i\varrho^{nd} = \Omega.$$

По предположению и предложению 1 мы имеем

(16) $$a_i\varrho^n \cup a_i\varrho^{n+d} \cup \ldots \cup a_i\varrho^{n+(n-1)d} = a_i\delta^n = \Omega.$$

Положим $n = \alpha d + s$, где $\alpha \geqq 1$ — натуральное число и $0 \leqq s < d$. Умножив (16) на ϱ^{d-s}, мы получим

$$a_i\varrho^{(\alpha+1)d} \cup a_i\varrho^{(\alpha+2)d} \cup \ldots a_i\varrho^{(\alpha+n)d} = a_i\delta^d = \Omega.$$

Рассмотрим теперь отношение ϱ^d. Так как транзитивным замыканием этого отношения является $\varrho^d \cup \varrho^{2d} \cup \ldots \cup \varrho^{nd}$, то

$$\varrho^{(\alpha+1)d} \cup \varrho^{(\alpha+2)d} \cup \ldots \cup \varrho^{(n+\alpha)d} \subset \varrho^d \cup \varrho^{2d} \cup \ldots \cup \varrho^{nd}$$

и

$$a_i\varrho^{(\alpha+1)d} \cup \ldots \cup a_i\varrho^{(n+\alpha)d} \subset a_i\varrho^d \cup \ldots \cup a_i\varrho^{nd}.$$

Так как левая часть — все множество Ω, то $a_i\varrho^d \cup \ldots \cup a_i\varrho^{nd} = \Omega$. Это и доказывает (15).

Случай 3а. Предположим, что $a_i\delta = \Omega$ и a_i входит в множество $a_i\varrho^d \cup \ldots \cup a_i\varrho^{(n-1)d}$.

По лемме 5:

$$\Omega = a_i\varrho^d \cup \ldots \cup a_i\varrho^{(n-1)d};$$

следовательно,

$$a_i\varrho^{nd} \subset a_i\varrho^d \cup \ldots \cup a_i\varrho^{(n-1)d}$$

и

$$\Omega = a_i\varrho^d \cup \ldots \cup a_i\varrho^{(n-1)d} = a_i\varrho^d \cup \ldots \cup a_i\varrho^{(n-1)d} \cup a_i\varrho^{nd}.$$

Умножая на ϱ^{n-d}, $(n - d > 0)$, мы имеем

$$a_i\varrho^n \cup \ldots \cup a_i\varrho^{n+(n-2)d} = a_i\varrho^n \cup \ldots \cup a_i\varrho^{n+(n-1)d} = a_i\delta^n,$$

и это доказывает $l_i \leqq n - 2$ в случае 3а.

Случай 3б. Пусть $a_i\delta = \Omega$ и a_i не входит в $a_i\varrho^d \cup \ldots \cup a_i\varrho^{(n-1)d}$ (но $a_i \in a_i\varrho^{nd}$). Напомним, что ввиду наших предположений мы тоже имеем $a_i\varrho \cup a_i\varrho^2 \cup \ldots \cup a_i\varrho^n = \Omega$. Если a_i не является элементом $a_i\varrho^{hd}$ $(1 \leqq h \leqq n - 1)$, то a_i не может входить в множество $a_i\varrho^h$ $(1 \leqq h \leqq n - 1)$. В самом деле, из $a_i \in a_i\varrho^h$ $(1 \leqq h \leqq n - 1)$ вытекает $a_i \in a_i\varrho^{2h}$, $a_i \in a_i\varrho^{3h}$, ..., $a_i \in a_i\varrho^{dh}$, что противоречит предположению. Следовательно, $a_i \in a_i\varrho^n$.

Невозможно, чтобы имело место $a_i = a_i\varrho^n$, потому что из этого вытекало бы $a_i = a_i\varrho^{nt}$ для всякого натурального числа $t \geqq 1$. Если возьмем $t = r + 1$ (см. лемму 1), то мы получим $a_i = a_i\delta^n$, что противоречит $a_i\delta = \ldots = a_i\delta^d = \Omega$. Следовательно, в рассматриваемом случае $a_i\varrho^n$, содержит по крайней мере два элемента (одним из которых является a_i).

Рассмотрим опять цепочку

$$a_i\varrho^n \subset (a_i\varrho^n \cup a_i\varrho^{n+d}) \subset \ldots \subset (a_i\varrho^n \cup \ldots \cup a_i\varrho^{n+ld}) \subset a_i\delta^n = \Omega,$$

и будем пользоваться тем же методом, как и в доказательстве предложения 1 с той существенной разницей, что теперь первый член $a_i\varrho^n$ имеет по крайней мере два элемента. Очевидно, что это ведет к оценке $l_i \leqq n - 2$

В итоге мы доказали, что для любого $\varrho \in B(\Omega)$ и любого $a_i \in \Omega$ всегьа имеет место

$$a_i\varrho^n \cup a_i\varrho^{n+d} \cup \ldots \cup a_i\varrho^{n+(n-2)d} = a_i\delta^n.$$

Это и завершает доказательство теоремы 3.

Замечание 1. Результат теоремы 3 невозможно улучшить. Существуют бинарные отношения, для которых $\varrho^n \cup \varrho^{n+d} \cup \ldots \cup \varrho^{n+(n-3)d} \neq \delta^n$. Примером такого отношения является отношение ϱ, для которого

$$\mathbf{M}(\varrho) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь $d = 1$ и $\delta = \omega$. Простая проверка графа этого отношения показывает, что между отношениями $\varrho, \varrho^2, \ldots \varrho^{2n-2}$ существуют точно два, а именно ϱ^{n-1} и ϱ^{2n-2}, которые содержат пару (a_1, a_n). Следовательно, (a_1, a_n) не содержится в $\varrho^n \cup \varrho^{n+1} \cup \ldots \cup \varrho^{2n-3}$, так что $\varrho^n \cup \ldots \cup \varrho^{2n-3} = \delta^n$ не имеет места.

Замечание 2. Из формулы (14) и Леммы 1 вытекает

$$\varrho^{n+t} \cup \varrho^{n+t+d} \cup \ldots \cup \varrho^{n+t+(n-2)d} = \delta^{n+t}$$

для $t = 0, 1, 2, \ldots, d-1$.
Предположим $d \leqq n$ и положим $n = \alpha d + s$, где $\alpha \geqq 1$ — натуральное число и $0 \leqq s < d$. Эти тождества в явном виде имеют следующую форму:
Если $s = 0$, то

$$\begin{array}{llllll}
\varrho^{n} & \cup\, \varrho^{n+d} & \cup \ldots \cup\, \varrho^{n+(\alpha-1)d} & \cup \ldots & = \delta^{n}, \\
\varrho^{n+1} & \cup\, \varrho^{n+d+1} & \cup \ldots \cup\, \varrho^{n+(\alpha-1)d+1} & \cup \ldots & = \delta^{n+1}, \\
\vdots & & & & \\
\varrho^{n+d-1} & \cup\, \varrho^{n+2d-1} & \cup \ldots \cup\, \varrho^{n+\alpha d-1} & \cup \ldots & = \delta^{n+d-1}.
\end{array}$$

Если $s \geqq 1$, то имеет место:

$$\begin{array}{lllllll}
\varrho^{n} & \cup\, \varrho^{n+d} & \cup \ldots \cup\, \varrho^{n+(\alpha-1)d} & \cup\, \varrho^{n+\alpha d} & \cup \ldots & = \delta^{n}, \\
\vdots & & & & & \\
\varrho^{n+s-1} & \cup\, \varrho^{n+d+s-1} & \cup \ldots \cup\, \varrho^{n+(\alpha-1)d+s-1} & \cup\, \varrho^{n+\alpha d+s-1} & \cup \ldots & = \delta^{n+s-1}, \\
\varrho^{n+s} & \cup\, \varrho^{n+d+s} & \cup \ldots \cup\, \varrho^{n+(\alpha-1)d+s} & \cup \ldots & & = \delta^{n+s}, \\
\vdots & & & & & \\
\varrho^{n+d-1} & \cup\, \varrho^{n+2d-1} & \cup \ldots \cup\, \varrho^{n+\alpha d-1} & \cup \ldots & & = \delta^{n+d-1}.
\end{array}$$

В левой части мы написали только те степени ϱ, соединение которых точно равняется $\varrho^{n} \cup \varrho^{n+1} \cup \ldots \cup \varrho^{2n-1}$. К сожалению, несмотря на то, что объединение обеих частей то самое, невозможно сделать (вообще говоря) никаких дальнейших выводов, потому что вообще множества $\delta, \delta^2, \ldots, \delta^d$ не всегда являются попарно дизъюнктными.

Но, очевидно, имеет место:

Предложение 2. *Если $\delta, \delta^2, \ldots, \delta^d$ попарно не пересекаются, то (в обозначениях заведенных выше)*

$$\varrho^{n} \cup \varrho^{n+d} \cup \ldots \cup \varrho^{n+ld} = \delta^{n},$$

где .

$$l \leqq \begin{cases} \alpha - 1, & \text{если } d/n, \\ \alpha, & \text{если } d \times n. \end{cases}$$

Этот реэультат лучший, чем реэультат теоремы 3 только б случае $d > 1$.

Условия предложения 2 имеют, в частности, место, когда ϱ — неразложимое отношение. Для этого случая аналогичные равенства доказаны в работе [1] (см. стр. 665).

ЛИТЕРАТУРА

[1] SCHWARZ, Š.: On the semigroup of binary relations on a finite set. Czechoslovak Math. J. *20* (95), 1970, 632–679.

Matematický ústav SAV
Obrancov mieru 41
886 25 Bratislava

Поступило 29. 12. 1972