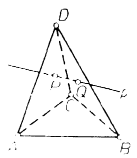
O ÚPLNOM ZOBRAZENÍ SKRUTKOVICE

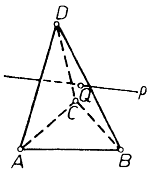
VLADIMÍR HUŤKA, Bratislava

1.

Pod zobrazením U nejakého útvaru U' v priestore budeme rozumieť ľubovoľný rovnobežný priemet tohto útvaru do ľubovoľnej roviny (priemetne) za predpokladu, že smer premietania nie je rovnobežný s priemetňou. Predpokladáme, že je daný ľubovoľný takýto rovnobežný priemet U útvaru U', pričom smer premietania a tiež originál U' nie je priamo určený. Aby na takomto zobrazení U bolo možné riešiť incidenčné úlohy, je nutné, aby bolo možné nájsť na zobrazení priemet ľubovoľnej incidencie prvkov originálu pomocou už daných priemetov iných incidencií prvkov tohto originálu. Budeme o tomto zobrazení U hovoriť, že je úplné, ak je možné na tomto zobrazení zostrojiť priemet ľubovoľnej incidencie jeho originálu. O tom, či je dané zobrazenie úplné, možno sa presvedčiť týmto spôsobom: Vyberieme na zobrazení priemet ľubovoľného štvorstenu $ABCD$, ktorého žiadna stena neleží v premietajúcej rovine. Ak priemety ostatných prvkov útvaru U sú vzhľadom na priemet tohto štvorstena určené, je ozbrazenie úplné (pozri [1]). Napríklad zobrazenie na obr. 1 je úplné, pretože priemet p priamky p' je určený bodmi P, Q, ktoré ležia v priemetoch ACD, BCD stien štvorstena $A'C'D'$ a $B'C'D'$, teda priemety ostatných incidencií, napr. priemet priesečníka priamky p' s rovinou $A'B'C'$ možno zostrojiť. Zobrazenie na obr. 2 je neúplné, pretože priemet priamky p' je určený iba priemetom jedného bodu.



Obr. 1.



Obr. 2.

Aby na úplnom zobrazení bolo možné riešiť aj metrické úlohy, je potrebné urobiť metrizáciu tohto zobrazenia. Pretože k metrickému určeniu štvorstena je potrebné zadať 5 metrických nezávislých parametrov, musíme na úplnom zobrazení zadať 5 metrických nezávislých parametrov, aby sa toto úplné zobrazenie stalo metricky určeným. Výber týchto parametrov môže byť rôzny (pozri [1]), avšak taký, aby sme nimi určili originál odhliadnuc od podobnosti, pretože na základe Polkeovej vety je možné nájsť smer premietania tak, aby dané zobrazenie $ABCD$ bolo priemetom štvorstena $A'B'C'D'$ podobného s daným štvorstenom.

Budeme používať toto označenie: prvky originálu $A', B', \ldots, a', b', \ldots, \alpha', \beta', \ldots$, prvky zobrazenia $A, B, \ldots, a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$.

2.

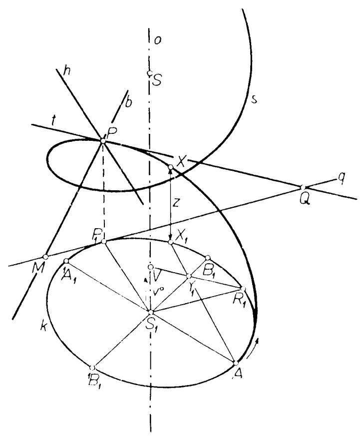
Cieľom tejto práce je ukázať jeden spôsob úplného zobrazenia skrutkovice, ktoré je metricky určené, a odvodiť jeho základné vlastnosti.

Nech je daný priemet o osi skrutkovice o', priemet A bodu A' skrutkovice a elipsa k priemetu kružnice k', ktorá je normálovým rezom rotačnej valcovej plochy, na ktorej leží skrutkovica a priemet $v = \overline{SS_1}$ výšky závitu $\overline{S'S_1}$ závitu skrutkovice (obr. 3). Toto zobrazenie je úplné, ale nie je ešte metrické. Aby sa stalo metrickým, je potrebné zadať ešte jeden metrický parameter, najvýhodnejšie tak, že zvolíme pomer skutočných veľkostí dvoch nerovnobežných úsečiek na zobrazení, napr.: $\overline{S_1'A'} : \overline{S_1'S'} = a : b$ (obr. 4). Tým bolo už vyčerpaných všetkých 5 metrických parametrov, pretože rovina ϱ' (obsahujúca kružnicu k') je metricky určená, čo znamená 2 metrické parametre, ďalej $o' \perp \varrho'$, čo sú tiež 2 metrické parametre.

Zvoľme na elipse k bod B_1 tak, aby platilo $\overline{S_1'B_1'} \perp \overline{S_1'A_1'}$. Priemet AS_1B_1S štvorstenu $A'S_1'B_1'S'$, ktorý je podľa predošlého metricky určený, tvorí teda bázu tohto zobrazenia. Orientácia skrutkovice je na zobrazení určená šípkami, pričom treba povedať, či uvažovaná skrutkovica je pravotočivá alebo ľavotočivá. Platí teda veta:

Veta 1. *Úplné zobrazenie skrutkovice, metricky určené, je určené priemetom osi skrutkovice, priemetom jedného bodu skrutkovice, priemetom normálového rezu rotačnej valcovej plochy, na ktorej leží skrutkovica, priemetom výšky závitu, pomerom výšky závitu k polomeru normálového rezu a zmyslom skrutkovania.*

Zobrazenie skrutkovice, ku ktorému sme došli naznačeným postupom, je teda nielen úplným, ale aj metricky dourčeným. Možno teda na tomto zobrazení riešiť všetky incidenčné a metrické úlohy, týkajúce sa prvkov tohto zobrazenia. Uvedieme riešenie dvoch základných úloh.



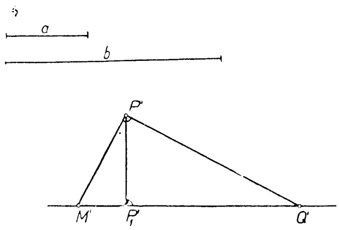
Obr. 3.

Úloha 1. *Zostrojiť priemet ľubovoľného bodu skrutkovice* (obr. 3).

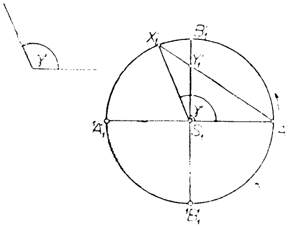
Nech úplné zobrazenie skrutkovice je určené spôsobom uvedeným vo vete 1. Ak treba nájsť priemet X bodu X' skrutkovice, ktorého otočenie γ' od bodu A' v smere skrutkovania poznáme, postupujeme týmto spôsobom: Narysujeme kružnicu k' o ľubovoľnom polomere (obr. 5). Zostrojíme priemer $\overline{{}^1B_1B_1}$ elipsy k združený s priemerom $\overline{{}^1A_1A}$. Priemerom $\overline{{}^1B_1B}$, $\overline{{}^1A_1A}$ elipsy k môžme priradiť združené priemery $\overline{{}^1A'_1A'} \perp \overline{{}^1B'_1B'_1}$. Nájdeme na kružnici k' bod X'_1 tak, aby platilo $\sphericalangle A'S'_1X'_1 = \gamma'$. Spojnica $A'X'_1$ pretne $S'_1B'_1$ v bode Y'_1. Zostrojíme na zobrazení bod X_1 pomocou vzťahov $(S_1B_1Y_1) = (S'_1B'_1Y'_1), (AY_1X_1) = (A'Y'_1X'_1)$. Keďže poznáme priemet výšky závitu, môžeme nájsť priemet z posunutia z', odpovedajúci otočeniu γ', a pomocou neho nájdeme bod X, hľadaný priemet bodu skrutkovice.

V prípade, že $\gamma' = 2k\pi$, kde k je celé číslo, platí $X'_1 \equiv A'$, teda $X_1 \equiv A$. Posunutie z'_A bodu A' má vtedy veľkosť $|\,k\,|\,.\,v'$ a jeho priemet $|\,k\,|\,.\,v$ nanesieme od bodu A v smere skrutkovania, ak $k < 0$, proti smeru skrutkovania, ak $k < 0$.

Úloha 2. *V ľubovoľnom bode P priemetu skrutkovice zostrojiť priemet sprievodného trojhranu* (obr. 3).



Obr. 4.


Obr. 5.

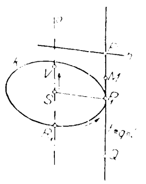
Nájdeme priemet V vrchola V' určujúcej kužeľovej plochy skrutkovice, ktorého podstava leží v rovine ϱ' a je to teda kružnica k'. Priemet výšky tejto kužeľovej plochy je zároveň priemetom redukovanej výšky závitu $v^{o'}$ na osi o'. Jej veľkosť nájdeme pomocou známeho vzťahu $v^{o'} = v'/2\pi$. Pomocou určujúcej kužeľovej plochy zostrojíme priemet dotyčnice t' v bode P'. Nájdeme priemet kolmého priemetu bodu P' do roviny ϱ', teda bod P_1, otočíme bod P'_1 po kružnici k' o $90°$ proti zmyslu skrutkovania do bodu R'_1, na zobrazení pomocou polomeru $\overline{S_1R_1}$, združeného s polomerom $\overline{S_1P_1}$. Tvoriaca priamka $\overline{R'_1V'}$ určujúcej kužeľovej plochy je rovnobežná s hľadanou dotyčnicou t', jej priemet $t \parallel R_1V$. Hlavná normála h' v bode P' je zároveň normálou rotačnej valcovej plochy skrutkovice a je rovnobežná s priamkou $S'_1P'_1$, teda $P \in h$, $h \parallel S_1P_1$. Ostáva ešte zostrojiť priemet binormály skrutkovice v bode P'. Pretože binormála leží v rektifikačnej rovine, ktorá je zároveň dotykovou rovinou valcovej plochy, musí jej priesečník s rovinou ϱ' ležať na priamke q', ktorá je dotyčnicou kružnice k' v bode P'_1 a zároveň priesečnicou rektifikačnej roviny s rovinou ϱ'. Pretože celé zobrazenie je metricky určené, môžeme zostrojiť $\Delta Q'P'_1P'$, odhliadnuc od podobnosti ($Q' = t'\,.\,q'$), z týchto vzťahov (obr. 4):

$$\overline{S_1S} : b = \overline{PP_1} : \overline{P'P'_1},$$
$$\overline{R_1S_1} : a = \overline{QP_1} : \overline{Q'P'_1}.$$

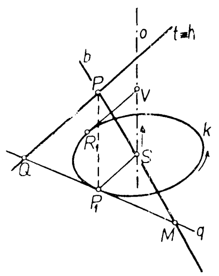
V bode P' zostrojíme kolmicu na stranu $P'Q'$, tá pretne protiľahlú stranu v bode M'. Opačným postupom nájdeme na zobrazení priemet bodu M', teda bod M. Preň zase platí $(M'P_1'Q') = (MP_1Q)$. Bod M' je bodom, v ktorom binormála pretína rovinu ϱ'.

Riešenie tejto úlohy je však závislé od polohy dotykovej roviny valcovej plochy a oskulačnej roviny skrutkovice pre bod P'. Vcelku môžu nastať tieto prípady:

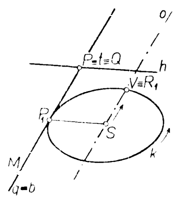
1. Dotyková rovina valcovej plochy a ani oskulačná rovina skrutkovice nie sú premietajúce (obr. 3). Úloha sa vtedy rieši spôsobom, ktorý sme opísali. Priemetmi bodov skrutkovice sú obyčajné body.



Obr. 6.



Obr. 7.



Obr. 8.

2. Dotyková rovina valcovej plochy je premietajúcou, oskulačná rovina nie je premietajúcou. Priemet dotyčnice vtedy splynie s priamkou q (obr. 6). Priemet Q bodu Q' môžeme určiť týmto spôsobom: Pretože $\Delta R'S'V' \sim \Delta Q'P'P_1'$ a obidva trojuholníky ležia v rovinách rovnobežných so smerom premietania, platí o ich priemetoch vzťah $(SVR_1) = (P_1PQ)$. Bodmi P, Q je určený priemet t dotyčnice t' bodu P'. Pretože binormála b' bodu P' leží v dotykovej rovine valcovej plochy bodu P', platí o jej priemete $t \equiv q \equiv b$. Priemet binormály určíme podobným spôsobom, ako sme uviedli tak, že nájdeme priemet M bodu M', v ktorom binormála b' pretína priamku q', pomocou $\Delta P_1'P_1Q'$ (obr. 4). Bodmi P, M je určený priemet binormály. V prípade, že platí $(Q'P_1'M_1') = (QP_1P)$, čiže $M \equiv P$, je priemetom binormály bod. O priemete h hlavnej normály h' platí: $h \in P$, $h \parallel SP_1$. Priemetmi bodov skrutkovice v tomto prípade sú opäť obyčajné body.

3. Dotyková rovina valcovej plochy nie je premietajúcou, oskulačná rovina je premietajúcou. Vtedy bod R_1 má tú vlastnosť, že priamka VR_1 je dotyčnicou elipsy k, teda $VR_1 \parallel SP_1$ (obr. 7). Priemet skrutkovice má v bode P inflexný bod a t je inflexnou dotyčnicou priemetu skrutkovice.

4. Dotyková rovina valcovej plochy a oskulačná rovina sú premietajúce. Smer premietania v tomto prípade je rovnobežný s dotyčnicou skrutkovice, teda $P \equiv t$ (obr. 8). Priemet b binormály b' splýva s priamkou q a dourčí sa priemetom M bodu $M' \equiv (b' \,.\, q')$. Priemet skrutkovice má v bode P bod vratu 1. druhu a priemet hlavnej normály je dotyčnica v bode vratu.

3.

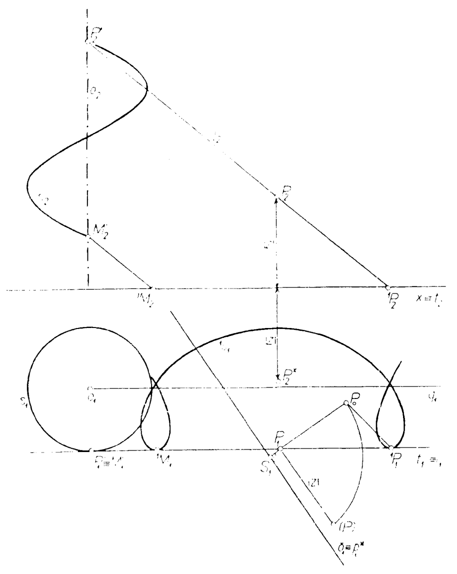
Úplné zobrazenie skrutkovice, ktoré je metricky určené, má tieto vlastnosti:

Veta 2. *Úplným zobrazením skrutkovice môže byť elipsa (kružnica), zobecnená sínusoida, cykloida, alebo krivka perspektívne afinná ku niektorej cykloide.*

Dôkaz tejto vety je známy a nebudeme ho preto uvádzať.

Veta 3. *Cykloidou a krivkou k nej perspektívne afinnou (za určitých podmienok) sú určené v priestore dve skrutkovice, za predpokladu, že poloha osi skrutkovania je určená.*

Dôkaz. Nech je daná cykloida ${}^1s_1$ (obr. 9). Krivku k nej perspektívne afinnú určíme pomocou osi afinity $\bar{o}_1$ a párom odpovedajúcich bodov ${}^1P_1$, P_0. Bod ${}^1P_1$ volíme tak, aby ležal na priamke t_1, na cykloide ${}^1s_1$ a neležal na osi $\bar{o}_1$. (Priamka t_1 je pri prostej cykloide spojnica bodov vratu, pri skrátenej alebo predĺženej cykloide niektorá z viacnásobných dotyčníc týchto kriviek.) Cykloidu ${}^1s_1$ môžeme považovať za priemet nejakej skrutkovice do roviny π, ktorá je na os o' tejto skrutkovice kolmá. Poloha osi o' skrutkovice s' je určená svojím kolmým priemetom o_1 do roviny π. Zvoľme ďalšiu priemetňu ν tak, aby bola rovnobežná s osou o' skrutkovice s' a aby priesečnica $x \equiv (\pi \, . \, \nu)$ bola rovnobežná s priamkou t_1. Kolmým priemetom skrutkovice s' do roviny π je kružnica s_1. Nech l' je smer, ktorým sa skrutkovica s' premieta do roviny π do cykloidy ${}^1s_1$. Hľadanú skrutkovicu s' teda premietame smerom l' do roviny π a do roviny κ, ktorá je určená priesečnicou $p_1^\kappa \equiv \bar{o}_1$ s rovinou π a otočenou polohou P_0 bodu P, $P \in \kappa$ do roviny π, pričom body ${}^1P_1$, P ležia na tom istom premietajúcom lúči bodu P' skrutkovice s', rovnobežnom so smerom l'.

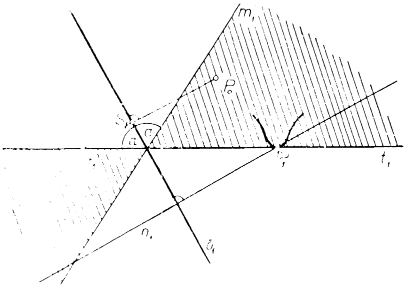


Obr. 9.

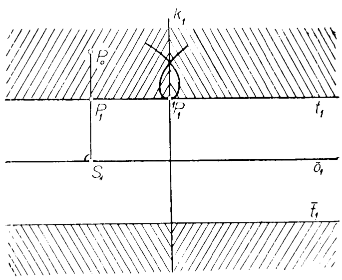
O kolmom priemete l_1 premietajúceho lúča l' bodu P' platí $l'_1 \equiv t_1$. Kolmý priemet P_1 bodu P do roviny π musí ležať teda na priamke l_1 a na priamke $S_1P_0 \perp \bar{o}_1$. Známym zpôsobom nájdeme vzdialenosť $|\, z \,|$ bodu P od roviny π a pomocou nej zase kolmý priemet P_2 bodu P do roviny ν. O kolmom priemete bodu ${}^1P_1$ do roviny ν platí ${}^1P_2 \in x$. Priamka $l_2 \equiv P_2{}^1P_2$ je kolmý priemet premietajúceho lúča l' bodu P' skrutkovice s' do roviny ν. O kolmom priemete P'_1 bodu P' do roviny π platí $P'_1 \in l_1$, $P'_1 \in s_1$, o kolmom priemete P'_2 bodu P' do roviny ν zase platí $P'_2 \in l_2$, $P'_2 \in o_2$.

pričom o_2 je kolmý priemet osi skrutkovice s' do roviny v. Bod $^1M_1$ cykloidy je priemetom takého bodu skrutkovice s', ktorý dostaneme preskrutkovaním bodu P' o výšku závitu do bodu M'. Podobne nájdeme kolmé priemety M_1', M_2' bodu M' do rovín π a v. Pretože poznáme z hľadanej skrutkovice s kolmé priemety osi a dvoch bodov do dvoch vzájomne kolmých rovín, je tým hľadaná skrutkovica v priestore určená. Ľahko sa zistí, že zostrojená skrutkovica je ľavotočivá.

Pretože vzdialenosť $|z|$ môžeme naniesť od priamky x aj na opačnú stranu, má úloha dve riešenia. Druhé riešenie dostaneme pre bod P^x. Postup je obdobný ako v predošlom a nie je na obrázku vyznačený. Táto skrutkovica je už pravotočivá.



Obr. 10.



Obr. 11.

Táto úloha však nemá vždy riešenie. Jej riešenie je závislé od toho, či možno nájsť kolmý priemet bodu P do roviny v, teda od voľby osi afinity $\bar{o}_1$ a páru odpovedajúcich si bodov $^1P_1$, P_0. Aby úloha bola riešiteľná, je potrebné, aby $P_1 \neq {}^1P_1$ a aby existovala vzdialenosť $|z|$. Aby existoval bod P, musí platiť $\overline{S_1P_1} < \overline{S_1P_0}$, teda bod P_0 nemožno voliť ľubovoľne, ale len v určitých oblastiach existencie, ktoré sú závislé od polohy osi afinity a priamky t_1 cykloidy.

Rozoberieme jednotlivé prípady:

1. Os afinity $\bar{o}_1$ je rôznobežná s t_1, ale nie je na ňu kolmá (obr. 10).

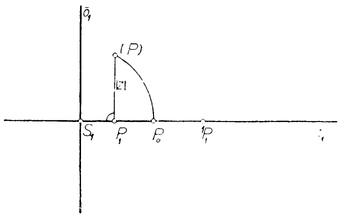
Ak bod $P_0 \in t_1$ platí $P_0 \equiv P_1$, $|z| = 0$, úloha je neriešiteľná. Zostrojme priamku m_1, tak aby platilo $\sphericalangle\, t_1\bar{o}_1 = \sphericalangle\, \bar{o}_1 m_1$. Uvažujme o bodoch, ktoré ležia vnútri toho uhla $\sphericalangle\, t_1 m_1$, ktorý neobsahuje $\bar{o}_1$. Ak každým takýmto bodom P_0 zostrojíme kolmicu na os $\bar{o}_1$, platí $\overline{S_1P_0} < \overline{S_1P_1}$, čo je nutná podmienka preto, aby existovala nenulová vzdialenosť $|z|$. Pre body priamky m_1 platí to isté, čo pre body priamky t_1. Bod P_0 nesmie ležať ani na priamke n_1, $n_1 \perp \bar{o}_1$, $^1P_1 \in n_1$, pretože vtedy platí $P_1 \equiv {}^1P_1$. Úloha v tomto prípade je riešiteľná len pre body P_0, ktoré ležia vo vyšrafovanej časti roviny, vylúčiac body priamok t_1, m_1, n_1.

2. Os afinity $\bar{o}_1$ je rovnobežná s t_1, ale s ňou nesplýva (obr. 11).

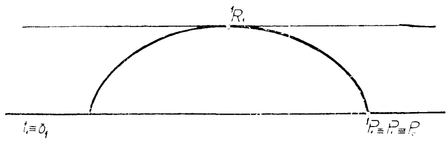
Zostrojme priamku $\bar{t}_1$ súmernú s priamkou t_1 podľa $\bar{o}_1$. V tomto prípade je úloha riešiteľná pre všetky body P_0, ktoré ležia v tých otvorených polrovinách, vytvorených priamkami t_1 a $\bar{t}_1$, ktoré nemajú spoločné body, s výnimkou bodov priamky $k_1 \perp \bar{o}_1$, prechádzajúcej bodom ${}^1P_1$, pretože pre body priamky k_1 by platilo ${}^1P_1 \equiv P_1$. Teda smer afinity nemôže byť kolmý na os.

3. Os afinity $\bar{o}_1$ je kolmá na t_1 (obr. 12).

Bod P_0 možno voliť ľubovoľne na priamke t_1, mimo priesečníka s osou afinity, teda smer afinity musí byť kolmý na os. V tomto prípade však ešte aj voľbou bodu P_0 ostáva úloha mnohoznačná, pretože aj bod P_1 možno voliť ľubovoľne, ale tak, aby platilo $\overline{S_1P_1} < \overline{S_1P_0}$.



Obr. 12.



Obr. 13.

4. Os afinity $\bar{o}_1 \equiv t_1$ (obr. 13).

V tomto prípade zrejme ${}^1P_1 \equiv P_1 \equiv P_0$. Afinitu dourčíme tak, že k ľubovoľnému bodu cykloidy, napr. k bodu ${}^1R_1$ určíme odpovedajúci bod tým istým spôsobom ako v prípade 2.

4.

Dokážeme ďalej, že tú istú krivku perspektívne afinnú podľa uvedených podmienok s niektorou cykloidou možno dostať aj ako priemet iných skrutkovíc, než sú tie dve skrutkovice, pre ktoré sú uvažovaná krivka a k nej perspektívne afinná cykloida danými priemetmi.

Predpokladajme, že taká skrutkovica existuje. Pretože aj priemetom tejto skrutkovice do roviny kolmej na os je niektorá cykloida a jej ďalším priemetom je uvažovaná krivka, stačí vyšetriť problém, či existujú v rovine aj iné cykloidy, ktorým je niektorou perspektívnou afinitou priradená tá istá krivka.

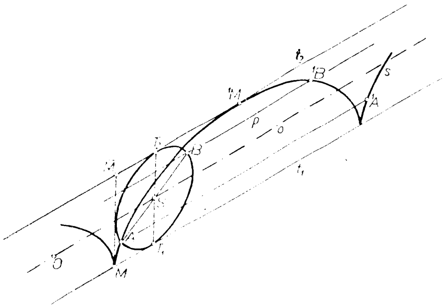
Nech je v rovine daný pravouhlý súradný systém. Rovnica cykloidy je

$$x = r(t - \lambda \sin t),$$
$$y = r(1 = \lambda \cos t), \qquad (1)$$
$$\lambda = \text{const}, \ \lambda \neq 0.$$

Je zrejmé, že tá istá krivka vytvorená perspektívnou afinitou z niektorej cykloidy nemôže byť vytvorená perspektívnou afinitou z cykloidy iného druhu, pretože perspektívna afinita zachováva vlastnosť bodov vratu a uzlových bodov. Stačí teda vyšetriť, či uvažovaná krivka môže byť vytvorená perspektívnou afinitou z cykloíd toho istého druhu.

Ak je teda daná rovnica cykloidy (1), potom všetky cykloidy v rovine toho istého druhu dostaneme, keď na rovnicu cykloidy (1) použijeme najskôr transformáciu

$$\begin{aligned} x' &= r_1 \,.\, x, \\ y' &= r_1 \,.\, y, \\ r_1 &\neq 0 \end{aligned} \tag{2}$$



Obr. 14.

a potom grupu zhodných transformácií

$$\begin{aligned} x'' &= x' \cos\alpha + y' \sin\alpha + c_{13}, \\ y'' &= \pm\, x' \sin\alpha \pm y' \cos\alpha + c_{23}. \end{aligned} \tag{3}$$

Zložením transformácií (2) a (3) dostaneme výslednú transformáciu

$$\begin{aligned} x'' &= xr_1 \cos\alpha + yr_1 \sin\alpha + c_{13}, \\ y'' &= \pm\, xr_1 \sin\alpha \pm yr_1 \cos\alpha + c_{23}. \end{aligned} \tag{4}$$

Pretože transformáciou súradného systému sa skúmané vlastnosti zachovávajú, môžeme os perspektívnej afinity zvoliť za os x. Rovnice takej perspektívnej afinity majú tvar

$$x' = x + ay,\ y' = by. \tag{5}$$

Budeme skúmať prvý druh transformácie (4):

$$\begin{aligned} x'' &= xr_1 \cos\alpha + yr_1 \sin\alpha + c_{13}, \\ y'' &= -xr_1 \sin\alpha + yr_1 \cos\alpha + c_{23}. \end{aligned} \tag{4'}$$

Transformácia (5) priradí ľubovoľnému útvaru U útvar U', transformácia (4) priradí útvaru U útvar U''. Treba vyšetriť podmienky, pri ktorých sú útvary U' a U'' v perspektívnej afinite. Pretože perspektívna afinita je určená troma pármi odpovedajúcich si bodov, stačí túto úvahu urobiť pre tri nekolineárne body, napr. $A(0;\ 1)$, $B(0;\ 1)$, $C(1;\ 1)$.

Afinita (5) priradí bodom A, B, C body A'', B'', C'', transformácia (4') priradí bodom A, B, C body A'', B'', C''. Aby útvary U', U'' boli v persp. afinite, musí platiť $A'A'' \parallel B'B'' \parallel C'C''$, z čoho dostávame tieto podmienky:

$$
\begin{aligned}
c_{23} &= mr_1 \cos\alpha - mb, \\
c_{13} &= mr_1 \sin\alpha - ma, \\
-r_1 \sin\alpha &= nr_1 \cos\alpha + nc_{23} - nb, \\
r_1 \cos\alpha - 1 &= nr_1 \sin\alpha + nc_{13} - na.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Riešením rovníc (6) pre neznáme $r_1 \cos\alpha$, $r_1 \sin\alpha$, c_{13}, c_{23} dostaneme:

$$
\begin{aligned}
r_1 \cos\alpha &= 1, \qquad & c_{13} &= 0 \\
r_1 \sin\alpha &= 0 \qquad & c_{23} &= 0.
\end{aligned}
$$

Rovnice (4′) nadobudnú teda tvar

$$x'' = x, \qquad y'' = y,$$

čo je identická transformácia.

Ak budeme skúmať druhý druh transformácie (4):

$$
\begin{aligned}
x'' &= xr_1 \cos\alpha + yr_1 \sin\alpha + c_{13}, \\
y'' &= xr_1 \sin\alpha - yr_1 \cos\alpha + c_{23},
\end{aligned}
$$

dôjdeme k výsledku

$$x'' = x, \qquad y'' = -y.$$

Prišli sme teda k tomuto výsledku:

Veta 4. *Krivka perspektívne afinná s niektorou cykloidou je tiež perspektívne afinná s cykloidou, ktorá je súmerná s pôvodnou podľa osi perspektívnej afinity, pričom os novej perspektívnej afinity je totožná s pôvodnou, zmenil sa len smer.*

Geometrický význam tohto poznatku vyjadruje táto veta:

Veta 5. *Nech je daná skrutkovica k a jej priemet do roviny π, kolmej na os, a priemet do roviny κ, rôznobežnej s rovinou π. Smer premietania nech je s. Potom krivku, ktorá je priemetom skrutkovice do roviny κ, môžeme dostať aj týmto spôsobom: Zostrojíme skrutkovicu k^* súmernú s pôvodnou podľa roviny σ, ktorá je rovnobežná s osou skrutkovice k a prechádza priesečnicou $(\kappa\,.\,\pi)$, ďalej rovinu κ^*, súmernú s rovinou κ podľa σ. Ak skrutkovicu k^* premietneme smerom s^*, súmerným so smerom s podľa σ do roviny κ^*, dostaneme ako priemet skrutkovice k^* tú istú krivku ako krivka, ktorá je priemetom k do roviny κ.*

Veta 6. *Nutná a postačujúca podmienka pre to, aby úplné zobrazenie skrutkovice, určené krivkou perspektívne afinnou s niektorou cykloidou podľa predošlých podmienok, bolo metricky určené, je zadanie jedného metrického parametra. Potom sú touto krivkou určené v priestore 4 skrutkovice za predpokladu, že poloha osi je určená.*

Dôkaz. Nech je daná krivka s, ktorá je perspektívne afinná s niektorou cykloidou podľa uvedených podmienok (obr. 14). Zvoľme na krivke s bod A tak, aby neležal na priamkach t_1, t_2. (Priamky t_1, t_2 sú pri krivke s, perspektívne afinnej s predĺženou alebo skrátenou cykloidou, viacnásobné dotyčnice, pri krivke s, perspektívne afinnej s prostou cykloidou, viacnásobná dotyčnica a spojnica bodov vratu.) V bode A krivky s zostrojíme priemet k normálového rezu rotačnej valcovej plochy, na ktorej leží skrutkovica, pre ktorú je krivka s priemetom. Pri preskrutkovaní bodu A' o celý uhol dostane sa bod A' do bodu ${}^1A'$. $\overline{{}^1AA} = v$ je priemet výšky závitu skrutkovice. Zostrojme priamku p, súmernú s priamkou A^1A podľa o. Tá pretne krivku v nekonečne mnoho bodoch, z ktorých vyberieme bod ${}^1B$ tak, aby ležal na tom istom oblúku krivky s medzi dvomi susednými spoločnými bodmi krivky s a priamky t_1 ako bod A a aby bol z dvoch priesečníkov priamky p s týmto oblúkom krivky s ten bod, ktorý je od bodu A vzdialenejší. Bod ${}^1B$ je priemetom takého bodu skrutkovice, ktorý dostaneme preskrutkovaním bodu A' o uhol π. Od bodu ${}^1B$ nanesieme na priamku p úsečku $1/2v = \overline{{}^1B\bar{B}}$, tak aby úsečky $\overline{A^1A}$, $\overline{\bar{B}^1B}$ boli zhodnej orientácie. Bod $\bar{B}$ je priemetom kolmého priemetu bodu ${}^1B'$ do roviny normálového rezu rotačnej valcovej plochy. Bod M krivky s, ktorý leží na priamke t_1 pri preskrutkovaní o uhol π, dostane sa do bodu ${}^1M$. Ak od bodu ${}^1M$ nanesieme na priamku t_2 úsečku $1/2v$, dostaneme bod $\bar{M}$, ktorý je priemetom kolmého priemetu bodu ${}^1M'$ do roviny normálového rezu rotačnej valcovej plochy bodu M'. Pretože všetky normálové rezy uvažovanej rotačnej valcovej plochy sú zhodné, ich priemetmi budú elipsy, ktoré sú tiež zhodné. Z toho vyplýva, že ak bodom S zostrojíme rovnobežku s priamkou $M\bar{M}$, tá pretne priamky t_1 a t_2 v bodoch T_1, T_2, ktoré sú dotykovými bodmi hľadanej elipsy k pre dotyčnice t_1 a t_2. Elipsu k môžeme teda zostrojiť, pretože poznáme jej stred S, bod A a dotyčnicu t_1 s bodom dotyku T_1.

Toto zobrazenie nie je ešte metrické, pretože obsahuje len 4 metrické parametre: rovina ϱ' normálového rezu bodu A' je určená metricky, pretože elipsa k je priemetom kružnice k', čo znamená 2 metrické parametre, ďalej platí $o' \perp \varrho'$, čo znamená tiež 2 metrické parametre. Aby sa zobrazenie stalo metrickým, stačí zadať ešte jeden parameter, napríklad pomer $\overline{S'A'} : \overline{A'^1A'}$.

Pretože krivka s je perspektívne afinná s niektorou cykloidou, možno ju podľa vety 3. považovať za priemet dvoch rôznych skrutkovíc, pretože poloha osi je určená (napríklad jej stopníkom O v priemetni) podľa predpokladu vety. Podľa vety 4 je ale krivka s perspektívne afinná aj s druhou cykloidou a možno ju teda považovať za priemet ďalších dvoch skrutkovíc.

Poznamenajme, že konštrukcia týchto štyroch skrutkovíc v priestore vyplýva z Polkeho vety. Nech štvorsten T_1SB^1B je priemetom základného štvorstenu $T_1'S'B'^1B'$ tohto zobrazenia. Pretože štvorsten $T_1'S'B'^1B'$ je určený odhliadnuc od podobnosti, možno podľa Polkeho vety nájsť smer premietania tak, aby štvorsten T_1SB^1B bol priemetom štvorstenu $T_1'S'B'^1B'$, pričom takéto štvorsteny existujú štyri (pozri [4]) a všetky s nimi zhodné, posunuté rovnobežne so smerom premietania. Pretože však poloha osi pre jednotlivé prípady je daná, je aj poloha bodu S' v priestore pre všetky štyri prípady určená, a teda existujú len štyri takéto štvorsteny a k nim štyri príslušné skrutkovice.

LITERATÚRA

[1] Четверухин Н. Ф., *Изображения фигур в курсе геометрии,* Москва 1958.
[2] Глазунов Е. А., Четверухин Н. Ф., *Аксонометрия,* Москва 1953.
[3] Kadeřávek F., Klíma J., Kounovský J., *Deskriptívní geometrie*, Praha 1932
[4] Müller E., *Vorlesungen über Darstellende Geometrie*, Leipzig 1908.

Došlo 28. 4. 1960.

Katedra deskriptívnej geometrie
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

О ПОЛНОМ ИЗОБРАЖЕНИИ ЛИНИИ

Владимир Гутька

Резюме

В статье рассматривается один способ полного изображения винтовой линии, которое является метрически определенным. Выведены условия, когда циклоидой и кривой к ней перспективно афинной определена винтовая линия. Найдено также условие, когда кривая перспективно афинная с циклоидной является полным метрическим определением изображением винтовой, и количество винтовых линий в пространстве, определенных этой кривой.

VON EINER KOMPLETTEN ABBILDUNG DER SCHRAUBENLINIEN

Vladimír Huťka

Zusammenfassung

In dieser Abhandlung ist eine Form der kompletten Abbildung der Schraubenlinie untersucht, die metrisch bestimmt wird. Es sind die Bedingungen gegeben, wann die Schraubenlinie durch eine Zykloide und zu ihr perspektiv affinne Kurve bestimmt ist. Gleichzeitig ist auch eine Bedingung gefunden, wann die mit der Zykloide perspektiv affinne Kurve eine vollständige, metrisch bestimmte Abbildung der Schraubenlinie ist und die Anzahl der Schraubenlinien, die durch diese Kurve im Raum bestimmt werden.