Milan Gera

Über einige Eigenschaften der Lösungen der Gleichung $x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$, $c(t) >= 0$

Matematický časopis, Vol. 24 (1974), No. 4, 357--370

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126556`

Mat. Čas. 24, 1974, No. 4, 357—370

ÜBER EINIGE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN DER GLEICHUNG

$$x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0, \quad c(t) \geqq 0$$

MILAN GERA

In diesem Artikel untersuchen wir die oszillatorischen und andere Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$Lx = x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0.$$

Wir werden Bedingungen (notwendige und hinreichende) für die Existenz der oszillatorischen Lösungen der Differentialgleichung $Lx = 0$ ableiten, mit Rücksicht auf das Benehmen ihrer nichtoszillatorischen Lösungen.

Über die Koeffizienten $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ werden wir voraussetzen, dass diese stetige Funktionen im Intervall $I : \alpha < t < \infty$, $\alpha \gtreqqless -\infty$ sind.

Eine lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung werden wir *diskonjugiert* im Intervall J nennen, wenn jede ihre nichttriviale Lösung in J höchstens $n - 1$ Nullstellen, die Vielfachheit inbegriffen, hat.

Eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung nennen wir *oszillatorisch* in J, wenn in irgendeinem Intervall $(\beta, \infty) \cap J$, wo β aus dem Inneren des Intervalls J ist, diese Lösung unendlich viele Nullstellen, welche alle einfach sind, hat.

Wir sagen, dass eine Differentialgleichung im Intervall J *oszillatorisch* ist, wenn diese wenigstens eine oszillatorische Lösung hat. Wenn die Differentialgleichung keine oszillatorische Lösung hat, sagen wir, dass sie in J *nichtoszillatorisch* ist.

In der vorliegenden Arbeit sind hauptsächlich einige sich auf den ersten Teil des Artikels [1] beziehenden Ergebnisse verallgemeinert, wo die Differentialgleichung $Lx = 0$ unter der Voraussetzung $a(t) \equiv 0$, $b(t) \leqq 0$, $c(t) > 0$ in I untersucht wird. Es wird gezeigt, dass die Voraussetzung $b(t) \leqq 0$ $(t \in I)$ für ein gewisses Verhalten der Lösungen der Gleichung $Lx = 0$ nicht wesentlich ist und dass diese durch die Voraussetzung, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$lv \equiv v'' + a(t)v' + b(t)v = 0$$

im Intervall I diskonjugiert ist, ersetzt werden kann.

Bezeichnen wir:

$\mathscr{S}^+(J)$ ($\mathscr{S}^-(J)$) — sei die Menge nichtnegativer (nichtpositiver) und stetiger Funktionen im Intervall J;

$\mathscr{S}_0^+(J)$ ($\mathscr{S}_0^-(J)$) — sei die Menge der Funktionen aus $\mathscr{S}^+(J)$ ($\mathscr{S}^-(J)$), welche in keinem Teilintervall des Intervalls J identisch gleich Null sind;

$$l^+v \equiv v'' + a(t)v' + b^+(t)v,$$

wo $b^+(t) = \max\{0, b(t)\}$ für $t \in I$ ist;

$$E(t, \tau) = \exp \int_\tau^t a(\eta)\,d\eta \quad \text{für} \quad (t, \tau) \in I \times I.$$

1. Hilfssatz 1. *Es sei $b(t) \in \mathscr{S}^+(I)$ und es gelte*

$$\text{(E)} \qquad \int_\gamma^\infty E(\gamma, s)\,ds = \infty \quad (\gamma \in I).$$

Ferner sei die Differentialgleichung $lv = 0$ im Intervall I diskonjugiert. Für deren Lösung $v_0(t)$, welche in der Zahl $t_0 \in I$ den Anfangsbedingungen $v_0(t_0) = 0$, $v_0'(t_0) = 1$ entspricht, gilt dann in (t_0, ∞)

$$v_0(t) > 0, \quad v_0'(t) \geqq 0.$$

Beweis. Da die Differentialgleichung $lv = 0$ im Intervall I diskonjugiert ist, ist $v_0(t) > 0$ für $t > t_0$. Aus dieser Tatsache, sowie daraus, dass $b(t) \in \mathscr{S}^+(I)$ ist, folgt für $t > t_0$

$$(1) \qquad (v_0'(t)E(t, t_0))' = -b(t)E(t, t_0)v_0(t) \leqq 0.$$

Wir zeigen, dass $v_0'(t) \geqq 0$ in (t_0, ∞) ist. Indirekt. Es existiere eine solche Zahl $t_1 > t_0$, dass $v_0'(t_1) < 0$ gilt. Dann erhalten wir aus (1) für $t \geqq t_1$

$$v_0'(t) \leqq v_0'(t_1)E(t_1, t),$$

daraus

$$v_0(t) \leqq v_0(t_1) + v_0'(t_1) \int_{t_1}^t E(t_1, s)\,ds, \quad t \geqq t_1.$$

Aus dieser Beziehung und aus (E) folgt, dass für ein genügend grosses $t > t_1$ $v_0(t) < 0$ ist. Dies aber steht im Widerspruch zu $v_0(t) > 0$ in (t_0, ∞). Also ist im Intervall (t_0, ∞) $v_0'(t) \geqq 0$.

Bemerkung 1. Wenn $b(t) \in \mathscr{S}^-(I)$ gilt, dann ist die Differentialgleichung $lv = 0$ im Intervall I diskonjugiert und für ihre Lösung $v_0(t)$ mit der Eigenschaft $v_0(t_0) = v_0'(t_0) - 1 = 0$ $(t_0 \in I)$ in (t_0, ∞) gilt $v_0(t) > 0$, $v_0'(t) \geq 0$

Hilfssatz 2. *Es sei die Bedingung* (E) *erfüllt und die Differentialgleichung zweiter Ordnung* $l^+v = 0$ *sei im Intervall* I *diskonjugiert. Dann gilt für die Lösung* $v_0(t)$ *der Differentialgleichung* $lv = 0$, *welche in der Zahl* $t_0 \in I$ *den Anfangsbedingungen* $v_0(t_0) = 0$, $v_0'(t_0) = 1$ *entspricht,*

$$v_0(t) > 0, \quad v_0'(t) \geqq 0 \quad in \quad (t_0, \infty).$$

Beweis. Aus dem Vergleich der Differentialgleichung $lv = 0$ mit der diskonjugierten Differentialgleichung $l^+v = 0$ in I geht hervor, dass auch die Differentialgleichung $lv = 0$ im Intervall I diskonjugiert ist. Aus diesem Grunde ist $v_0(t) > 0$ für $t > t_0$. Es sei $v_0(t)$ die Lösung der Differentialgleichung $l^+v = 0$ mit der Eigenschaft $v_0(t_0) = v_0'(t_0) - 1 = 0$. Dann ist $v_0(t) > 0$, $v_0'(t) > 0$ für $t \in (t_0, \infty)$ (Hilfssatz 1). Aus dieser Tatsache geht hervor, dass für die Cauchysche Funktion $K(t, s)$ der Differentialgleichung $l^+v = 0$ für $t > s > \alpha$

$$K(t, s) > 0, \quad \frac{\partial K(t, s)}{\partial t} \geqq 0$$

gilt. Es sei $b_-(t) = \min\{0, b(t)\}$ für $t \in I$. Da $v_0(t)$ die Lösung der Differentialgleichung $lv = 0$ ist, ist

$$v_0''(t) + a(t)v_0'(t) + b_+(t)v_0(t) = -b_-(t)v_0(t) \geqq 0 \quad \text{für} \quad t \geqq t_0.$$

Davon haben wir

$$v_0(t) = v_0(t) - \int_{t_0}^{t} K(t, s)b_-(s)v_0(s)\,\mathrm{d}s$$

und

$$v_0'(t) = v_0'(t) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial K(t, s)}{\partial t} b_-(s)v_0(s)\,\mathrm{d}s \geqq 0$$

für $t > t_0$

Folgerung. *Wenn die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllt sind, dann existiert eine solche positive Lösung* $v_0(t)$ *der Differentialgleichung* $lv = 0$ *in* I, *dass* $v_0'(t) \geqq 0$ *für* $t \in I$ *gilt* (siehe auch [2]).

Die Differentialgleichung $lv = 0$ sei im Intervall I diskonjugiert. Dann hat die Differentialgleichung $lv = 0$ eine positive Lösung $v_0(t)$ in I [3] und es gilt

$$lv \equiv \frac{E(t_0, t)}{v_0(t)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_0^2(t)E(t, t_0) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{v}{v_0(t)} \right) \quad \text{für} \quad t \in I \ (t_0 \in I).$$

Aufgrund dieses Ergebnisses kann die Differentialgleichung $Lx = 0$ ($Lx \equiv lx' + c(t)x$) auf folgendes Differentialsystem

$$x_1' = v_0(t)x_2,$$

$$x_2' = v_0^{-2}(t)E(t_0, t)x_3,$$

$$x_3' = -c(t)E(t, t_0)v_0(t)x_1$$

überführt werden, wo $x_1(t) = x(t)$, $x'(t) = v_0(t)x_2(t)$, $x''(t) = (E(t_0, t)x_3(t) + v_0'(t)x'(t))/v_0(t)$ für $t \in I$ ist. Sind dabei die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllt, kann vorausgesetzt werden, dass $v_0'(t) \geqq 0$ in I ist (Folgerung des Hilfssatzes 2). Aus diesen Tatsachen erhalten wir aufgrund der Theorie aus dem Kapitel XIV [2, Seite 591—596] folgende Hilfssätze:

Hilfssatz 3. *Die Differentialgleichung zweiter Ordnung* $lv = 0$ *sei im Intervall* I *diskonjugiert und es sei* $c(t) \in \mathscr{S}_0(I)$. *Für die Lösung* $x_0(t)$ *der Differentialgleichung* $Lx = 0$, *welche in der Zahl* $t_0 \in I$ *den Anfangsbedingungen*

$$x_0(t_0) = x_0 \geqq 0, \quad x_0'(t_0) = 0, \quad x_0''(t_0) = x_0'' \geqq 0; \quad x_0 + x_0'' > 0$$

entspricht, gilt dann im Intervall (α, t_0)

$$x_0(t) > 0, \quad x_0'(t) < 0.$$

Hilfssatz 3'. *Es seien die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllt und es gelte* $c(t) \in \mathscr{S}_0(I)$. *Dann gilt für die Lösung* $x_0(t)$ *der Differentialgleichung* $Lx = 0$, *welche in der Zahl* $t_0 \in I$ *den Anfangsbedingungen*

$$x_0(t_0) = x_0 \geqq 0, \quad x_0'(t_0) = x_0' \leqq 0, \quad x_0''(t_0) = x_0'' \geqq 0;$$

$$x_0 - x_0' + x_0'' > 0$$

entspricht, im Intervall (α, t_0)

$$x_0(t) > 0, \quad x_0'(t) < 0.$$

Hilfssatz 4 [4]. *Es sei* $b(t) \in \mathscr{S}(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0(I)$. *Dann gilt für die Lösung* $x_0(t)$ *der Differentialgleichung* $Lx = 0$, *welche in der Zahl* $t_0 \in I$ *den Anfangsbedingungen*

$$x_0(t_0) = x_0 \geqq 0, \quad x_0'(t_0) = x_0' \leqq 0, \quad x_0''(t_0) = x_0'' \geqq 0;$$

$$x_0 - x_0' + x_0'' > 0$$

entspricht, im Intervall (α, t_0)

$$x_0(t) > 0, \quad x_0'(t) < 0, \quad x_0''(t) > 0.$$

Satz 1. *Die Differentialgleichung zweiter Ordnung $lv = 0$ sei im Intervall I diskonjugiert und es sei $c(t) \in \mathcal{S}_0^+(I)$. Dann existiert eine Lösung $w(t)$ der Differentialgleichung $Lx = 0$ mit folgenden Eigenschaften*

$$w(t) \neq 0, \quad w(t)w'(t) \leqq 0 \quad \text{für} \quad t \in I, \quad \lim_{t \to \infty} w(t) = k \in (-\infty, \infty);$$

wobei $w'(t)$ höchstens in einer Zahl $t \in I$ gleich Null ist. Ist dabei die Bedingung (E) erfüllt und die Differentialgleichung $lv = 0$ ist im Intervall I diskonjugiert, dann gilt $w'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

Beweis. Die Existenz der Lösung $w(t)$ der Differentialgleichung $Lx = 0$ mit der Eigenschaft $w(t) \neq 0$, $w(t)w'(t) \leqq 0$ für $t \in I$ geht aus der Folgerung 2.4 des Satzes 2.1 [2, S. 592—596] und aus der Folgerung 2.1 des Hilfssatzes 2.3 [3] hervor.

Jetzt wollen wir zeigen, dass $w'(t)$ höchstens in einem $t \in I$ gleich Null sein kann. Indirekt. Es sollen solche t_1, t_2 aus I ($t_1 < t_2$) existieren, dass $w'(t_1) = w'(t_2) = 0$ ist. Ohne Verlust an der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass im Intervall I $w(t) > 0$ ist. Da $w'(t) \in C(I)$ und $w'(t) \leqq 0$ für $t \in I$ ist, ist $w''(t_2) = 0$. Auf Grund des Hilfssatzes 3 ist dann $w'(t) < 0$ für $t \in (\alpha, t_2)$. Das ist aber im Widerspruch zu der Voraussetzung $w'(t_1) = 0$.

Es bleibt uns noch zu beweisen, dass wenn (E) gilt und die Differentialgleichung $lv = 0$ in I diskonjugiert ist, dann gilt $w'(t) \neq 0$ für $t \in I$. Zur Gewissheit sei wieder $w(t) > 0$ in I und es sei $w'(\tau) = 0$ für irgendein $\tau \in I$. Zeigen wir zuerst, dass in jeder Umgebung $+\infty$ eine Zahl $\bar{t}_0$ ($\bar{t}_0 > \tau$) existiert, in welcher $w_0''(\bar{t}_0) > 0$ ist. Dies sei unwahr. Dann ist $w''(t) \leqq 0$ in $[\bar{\tau}, \infty)$ für irgendein $\bar{\tau} \geqq \tau$. Dies ist aber nicht möglich, weil dann in einer gewissen Umgebung $+\infty$ $w(t) < 0$ wäre. Also existiert eine solche Zahl $\bar{t}_0$. Aufgrund des Hilfssatzes 3′ erhalten wir aus diesen Tatsachen, dass $w'(t) < 0$ in jedem Intervall $(\alpha, \bar{t}_0)$ ist. Dies aber steht im Widerspruch zu unserer Voraussetzung $w'(\tau) = 0$. Damit wurde gezeigt, dass in diesem Falle $w(t)w'(t) < 0$ für alle $t \in I$ gilt.

Satz 1′. *Es sei $b(t) \in \mathcal{S}(I)$ und $c(t) \in \mathcal{S}_0^+(I)$. Dann existiert eine Lösung $w_0(t)$ der Differentialgleichung $Lx = 0$ mit folgenden Eigenschaften*

$$w_0(t)w_0'(t) < 0, \quad w_0(t)w_0''(t) > 0 \quad \text{in} \quad I,$$

$$(2) \qquad w_0(t)(w_0''(t)E(t, t_0))' \in \mathcal{S}_0(I) \quad (t_0 \in I);$$

$$(3) \qquad \lim_{t\to\infty} w_0(t) = k_0 \in (-\infty, \infty), \lim_{t\to\infty} w_0'(t) = 0, \lim_{t\to\infty} w_0''(t)E(t, t_0) = k_2 \in$$

$$\in (-\infty, \infty)$$

für welche im Intervall I

$$(4)\qquad w_0''(t)E(t,t_0) = k_2 - \int_t^\infty b(s)E(s,t_0)w_0'(s)\,\mathrm{d}s + \int_t^\infty c(s)E(s,t_0)w_0(s)\,\mathrm{d}s$$

gilt.

Wenn ausserdem noch

1. $a(t) \in \mathcal{S}^-(I)$ *gilt, dann ist* $w_0(t)w_0'''(t) \in \mathcal{S}_0(I)$ *und* $\lim_{t\to\infty} w_0''(t) = 0$;

2.

$$(\mathrm{E})\qquad \int_\gamma^\infty E(\gamma,s)\,\mathrm{d}s = \infty \qquad (\gamma \in I)$$

erfüllt ist, dann ist $k_2 = 0$, *oder*

3.

$$(\mathrm{E}')\qquad \int_{t_0}^\infty E(t_0,s)\,\mathrm{d}s < \infty$$

und

$$(\mathrm{E}_1)\qquad \int_{t_0}^\infty \Big(\int_t^\infty E(t_0,s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t = \infty$$

bzw.

$$(\mathrm{B})\qquad \int_{t_0}^\infty b(t)\Big(\int_t^\infty E(t,s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t = -\infty$$

gilt, dann ist $k_2 = 0$.

Beweis. Die Existenz der Lösung $w_0(t)$ der Differentialgleichung $Lx = 0$ mit den Eigenschaften $w_0(t) \neq 0$, $w_0(t)w_0'(t) \leqq 0$, $w_0(t)w_0''(t) \geqq 0$ für $t \in I$ geht aus der Folgerung 2.2 des Satzes 2.1 [2, S. 594], hervor. Da $b(t) \in \mathcal{S}^-(I)$, $c(t) \in \mathcal{S}_0^+(I)$ gilt, ist auf Grund des Hilfssatzes 4 $w_0(t)w_0'(t) < 0$, $w_0''(t)w_0(t) > 0$ in I. Es ist ersichtlich, dass die endlichen Grenzwerte

$$\lim_{t\to\infty} w_0''(t),\quad \lim_{t\to\infty} w_0'(t)$$

existieren und dass $\lim_{t\to\infty} w_0'(t) = 0$ ist.

Jetzt zeigen wir, dass $w_0(t)(w_0''(t)E(t,t_0))' \in \mathcal{S}_0(I)$ ist und dass der endliche Grenzwert

$$(5)\qquad \lim_{t\to\infty} w_0''(t)E(t,t_0)$$

existiert. Zur Gewissheit sei $w_0(t) > 0$ für $t \in I$. Da $b(t) \in \mathcal{S}^-(I)$, $c(t) \in \mathcal{S}_0^+(I)$ gilt, bekommen wir

$$(6)\qquad (w_0''(t)E(t,t_0))' = -b(t)E(t,t_0)w_0'(t) - c(t)E(t,t_0)w_0(t) \in \mathcal{S}_0(I)$$

Daraus folgt, mit Rücksicht darauf, dass $w_0''(t) > 0$ in I ist, die Existenz des endlichen Grenzwertes (5). Dieser Grenzwert sei gleich k_2 ($k_2 \geqq 0$). Durch Integrieren der Gleichheit (6) von t bis $+\infty$ erhalten wir (4).

Wenn $a(t) \in \mathscr{S}^+(I)$ ist, dann ist

$$w_0'''(t) = -a(t)w_0''(t) - b(t)w_0'(t) - c(t)w_0(t) \in \mathscr{S}_0(I).$$

Aus dieser Tatsache und daraus dass $\lim\limits_{t\to\infty} w_0'(t) = 0$ ist, folgt, dass $\lim\limits_{t\to\infty} w_0''(t) = 0$.

Wir zeigen noch, dass unter den bei 2. und 3. angeführten Bedingungen $k_2 = 0$ ist. Indirekt: Es sei $k_2 > 0$. Dann gewinnen wir mit Rücksicht auf $(w_0''(t)E(t, t_0))' \in \mathscr{S}_0(I)$ die Ungleichung

$$w_0''(t)E(t, t_0) > k_2 \quad \text{für} \quad t \in I.$$

Aus dieser Ungleichung erhalten wir

$$w_0'(t) > w_0'(\tau) + k_2 \int_\tau^t E(t_0, s)\, ds, \qquad t > \tau\ (\tau \in I). \tag{7}$$

Wenn (E) gilt, dann folgt aus (7), dass $\lim\limits_{t\to\infty} w_0'(t) = \infty$, was zu $\lim\limits_{t\to\infty} w_0'(t) = 0$ im Widerspruch steht.

(E′) sei erfüllt. Aus (7) erhalten wir dann

$$0 = \lim_{t\to\infty} w_0'(t) \geqq w_0'(\tau) + k_2 \int_\tau^\infty E(t_0, s)\, ds$$

d.h. es gilt

$$w_0'(\tau) \leqq -k_2 \int_\tau^\infty E(t_0, s)\, ds \tag{8}$$

für ein beliebiges $\tau \in I$. Ferner erhalten wir aus (8)

$$w_0(t) \leqq w_0(t_0) - k_2 \int_{t_0}^t \left(\int_\tau^\infty E(t_0, s)\, ds\right) d\tau \quad \text{für} \quad t > t_0. \tag{9}$$

Wenn (E_1) erfüllt ist, dann folgt aus der Ungleichung (9), dass $w_0(t)$ in einer gewissen Umgebung $+\infty$ negativ ist. Das ist aber im Widerspruch zu der Tatsache, dass $w_0(t) > 0$ für $t \in I$ ist. Wenn (B) gilt, dann erhalten wir aus der Konvergenz des Integrals

$$\int_{t_0}^\infty l(s)E(s, t_0)w_0'(s)\, ds$$

und aus (8)

$$\infty > \int_{t_0}^{\sigma} b(s)E(s, t_0)w_0'(s)\,\mathrm{d}s \geqq k_2 \int_{t_0}^{\infty} b(\tau)\Big(\int_{\tau}^{\infty} E(\tau, s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\tau = \infty .$$

Das ist aber unmöglich. Der Satz ist bewiesen.

Folgerung. *Es sei $b(t) \in \mathscr{S}(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$ und $w_0(t)$ sei irgendeine Lösung der Differentialgleichung $Lx = 0$ mit den Eigenschaften* (2) *und* (3).
1. *Wenn* $\lim_{t\to\infty} w_0(t) \neq 0$ *gilt, dann ist*

$$\int_{t_0}^{\infty} c(s)E(s, t_0)\,\mathrm{d}s < \infty .$$

2. *Wenn*

$$\int_{t_0}^{\infty} c(s)E(s, t_0)\,\mathrm{d}s = \infty$$

ist, dann gilt

$$\lim_{t\to\infty} w_0(t) = 0 .$$

Diese Folgerung geht aus der Konvergenz des Integrals

$$\int_{t_0}^{\infty} c(s)E(s, t_0)w_0(s)\,\mathrm{d}s$$

hervor.

Bemerkung 2. Es existieren höchstens zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung $Lx = 0$ mit der Eigenschaft (3).[1]

Tatsächlich, es sollen drei linear unabhängige Lösungen $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$ der Gleichung $Lx = 0$ mit der Eigenschaft (3) existieren. Dann ist ihr Wronskian

$$W_3(t) = \begin{vmatrix} w_1(t), & w_2(t), & w_3(t) \\ w_1'(t), & w_2'(t), & w_3'(t) \\ w_1''(t), & w_2''(t), & w_3''(t) \end{vmatrix} = W_3(t_0)E(t_0, t) \quad (t_0 \in I)$$

für alle $t \in I$ verschieden von Null d.h. $W_3(t_0) \neq 0$ ist. Mit Rücksicht auf die Eigenschaften der Funktionen $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$ erhalten wir daraus

$$W_3(t_0) = \lim_{t\to\infty} W_3(t)E(t, t_0) = \lim_{t\to\infty} \begin{vmatrix} w_1(t), & w_2(t), & w_3(t) \\ w_1'(t), & w_2'(t), & w_3'(t) \\ w_1''(t)E(t, t_0), & w_2''(t)E(t, t_0), & w_3''(t)E(t, t_0) \end{vmatrix} = 0$$

Das steht im Widerspruch zu $W_3(t_0) \neq 0$.

[1] Für diese Bemerkung danke ich Professor M. Švec.

2. Hilfssatz 5. *Wenn $b(t) \in \mathscr{S}(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$ und $u(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $Lx = 0$ ohne Nullstellen im Intervall I ist, dann existiert eine solche Zahl $\tau \in I$, dass entweder*

(i) $u(t)u'(t) < 0$ *für* $t \geqq \tau$

oder

(ii) $u(t)u'(t) > 0$ *für* $t \geqq \tau$

gilt. Im Falle, dass (i) *gilt, ist dann*

$$u(t)u'(t) < 0, \quad u(t)u''(t) > 0 \quad \textit{für} \quad t \in I.$$

Beweis. Es sei $u(t)$ eine Lösung ohne Nullstellen in I der Differentialgleichung $Lx = 0$. Dabei können wir selbstverständlich voraussetzen, dass $u(t) > 0$ für $t \in I$ ist. Es sei $v_0(t)$ die Lösung von $lv = 0$, welche in der Zahl $t_0 \in I$ den Anfangsbedingungen $v_0(t_0) = 0$, $v_0'(t_0) = 1$ entspricht. Weil $b(t) \in \mathscr{S}(I)$ gilt, ist die Differentialgleichung $lv = 0$ im Intervall I diskonjugiert. Aus diesem Grunde ist die Lösung $v_0(t)$ positiv in (t_0, ∞).

Erwägen wir den Wronskian der Funktionen $u'(t)$, $v_0(t)$

$$W(t) = u'(t)v_0'(t) - v_0(t)u''(t).$$

Dann gilt

$$(W(t)E(t, t_0))' - c(t)u(t)v_0(t)E(t, t_0) \in \mathscr{S}_0^+([t_0, \infty)),$$

weil $c(t) \in \mathscr{S}_0([t_0, \infty))$ ist. Aus dieser Tatsache geht hervor, dass $W(t)E(t, t_0)$ eine wachsende Funktion im Intervall $[t_0, \infty)$ ist. Das bedeutet, dass eine solche $t_1 > t_0$ existiert, dass $W(t) \neq 0$ für $t \in [t_1, \infty)$ ist. Aus diesem Grunde und darum, dass $v_0(t) > 0$ in (t_0, ∞) ist, hat $u'(t)$ höchstens eine Nullstelle im Intervall $[t_1, \infty)$. Es existiert also eine solche Zahl $\tau \in [t_1, \infty)$, dass $u'(t) < 0$ oder $u'(t) > 0$ für $t \geqq \tau$ ist

Wir zeigen nun, dass wenn $u'(t) < 0$ in $[\tau, \infty)$ ist, dann gilt $u'(t) < 0$ und $u''(t) > 0$ für alle $t \in I$. In der Tat, in der beliebigen Umgebung $+\infty$ existieren solche Zahlen $\bar{t}_0$ ($\bar{t}_0 \geqq \tau$) in welchen $u''(\bar{t}_0) > 0$ ist (siehe den Beweis des Satzes 1). Aufgrund des Hilfssatzes 4 erhalten wir daraus, dass $u'(t) < 0$, $u''(t) > 0$ in jedem Intervall $(\alpha, \bar{t}_0)$ gilt und also ist $u'(t) < 0$, $u''(t) > 0$ für alle $t \in I$.

Hilfssatz 6. *Es sei* $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$, $b(t) \notin \mathscr{S}(I)$.

$$\int_{\gamma}^{\infty} E(\gamma, s)\, ds = \infty \quad (\gamma \in I)$$

und die Differentialgleichung $lv = 0$ *sei im Intervall* I *diskonjugiert. Wenn* $u(t)$ *eine Lösung ohne Nullstellen der Differentialgleichung* $Lx = 0$ *im Intervall* I *ist, dann existiert eine solche Zahl* $\tau \in I$, *dass entweder*

(i) $u(t)u'(t) < 0$ *für* $t \geqq \tau$

oder

(ii) $u(t)u'(t) > 0$ *für* $t \geqq \tau$

ist. Wenn (i) *gilt, dann ist* $u(t)u'(t) < 0$ *für alle* $t \in I$.

Dieser Hilfssatz kann auf dieselbe Weise wie der Hilfssatz 5 bewiesen werden, nur mit dem Unterschied, dass anstelle des Hilfssatzes 4 der Hilfssatz 3′ verwendet wird.

Aus den Beweisen der Hilfssätze 5 und 6 folgt

Bemerkung 3. Wenn die Voraussetzungen des Hilfssätzes 5 bzw. 6 erfüllt sind, dann gilt für jede Lösung $u(t)$ der Differentialgleichung $Lx = 0$, welche die Eigenschaft $u(t)u'(t) < 0$ in irgendeinem Intervall (τ, ∞), $\tau \in I$ besitzt, $u(t)u'(t) < 0$ für alle $t \in I$.

Hilfssatz 7. *Es seien die Voraussetzungen des Hilfssatzes 5 oder des Hilfssatzes 6 erfüllt. Für jede nichttriviale Lösung* $y(t)$ *der Differentialgleichung* $Lx = 0$, *welche in irgendeiner Zahl* $t_0 \in I$ *der Bedingung* $y(t_0)y'(t_0) \geqq 0$ *entspricht, existiert eine solche Zahl* $\tau > t_0$, *dass entweder* $y(t)y'(t) > 0$ *für* $t > \tau$ *ist, oder* $y(t)$ *ist im Intervall* $[\tau, \infty)$ *oszillatorisch.*

Beweis. Es sei $y(t_0)y'(t_0) \geqq 0$ in irgendeiner Zahl $t_0 \in I$. Dann ist die Lösung $y(t)$ entweder oszillatorisch oder nichtoszillatorisch. Es sei $y(t)$ nichtoszillatorisch. Dann existiert eine solche Zahl $\lambda \geqq t_0$, dass $y(t) \neq 0$ in (λ, ∞) ist.(1) Gemäss Hilfssatz 5 bzw. 6 existiert eine solche Zahl $\tau \in (\lambda, \infty)$, dass entweder $y(t)y'(t) < 0$ ist oder ist $y(t)y'(t) > 0$ in $[\tau, \infty)$. Der Fall $y(t)y'(t) < 0$ für $t \geqq \tau$ kann nicht eintreten, weil dann $y(t)y'(t) < 0$ für alle $t \in I$ gelten würde (Bemerkung 3) und das wäre im Widerspruch zu $y(t_0)y'(t_0) \geqq 0$.

Bemerkung 4. Es sei $b(t) \in \mathscr{S}(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$. Dann existiert für jede nichttriviale Lösung $y(t)$ von $Lx = 0$, für welche in irgendeiner Zahl $t_0 \in I$ $y(t_0)y'(t_0) \geqq 0$ oder $y(t_0)y''(t_0) \leqq 0$ gilt, eine solche Zahl $\tau > t_0$, dass entweder $y(t)y'(t) > 0$ für $t \geqq \tau$ ist, oder $y(t)$ ist in $[\tau, \infty)$ oszillatorisch.

Hilfssatz 8. *Es sei* $t_0 \in I$ *und es sei* $c(t) \in \mathscr{S}^+([t_0, \infty))$. *Wenn die Funktion* $f(t) \in C^2((t_0, \infty))$ *mit den Eigenschaften* $f(t) > 0$, $f'(t) > 0$, $Lf \leqq 0$ *für* $t > t_0$ *existiert, dann ist die Differentialgleichung* $Lx = 0$ *im Intervall* $[t_0, \infty)$ *diskonjugiert.* (Folgerung 1′ des Satzes 2 [5].)

(1) Aus dem Hilfssatz 3 folgt, dass jede nichttriviale Lösung von $Lx = 0$ in I höchstens eine doppelte Nullstelle hat.

Satz 2. *Die Voraussetzungen des Hilfssatzes 5 oder des Hilfssatzes 6 seien erfüllt. Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Differentialgleichung $Lx = 0$ im Intervall I nichtoszillatorisch sei, die Existenz einer solchen Lösung $y(t)$ und einer solchen Zahl $\tau \in I$, so dass $y(t)y'(t) > 0$ für $t > \tau$ gilt.*

Beweis. Die hinreichende Bedingung folgt aus dem Hilfssatz 8.

Die notwendige Bedingung: Die Differentialgleichung $Lx = 0$ sei nichtoszillatorisch im Intervall I. Aufgrund des Hilfssatzes 7 existiert dann zu der Lösung $y(t)$ von $Lx = 0$, welche in der Zahl $t_0 \in I$ der Bedingung $y(t_0)y'(t_0) \geqq 0$ $(y(t) \not\equiv 0)$ entspricht eine solche Zahl $\tau > t_0$, dass $y(t)y'(t) > 0$ für $t \geq \tau$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

3. Ähnlicherweise wie in [1, Hilfssätze 1.2, 1.2', 1.2''] kann man die Beweise von den folgenden Hilfssätzen durchführen:

Hilfssatz 9. *Die Differentialgleichung zweiter Ordnung $lv = 0$ sei im Intervall I diskonjugiert und es sei $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$. $x_1(t)$, $x_2(t)$ seien zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung $Lx = 0$ mit der Eigenschaft*

$$(10) \qquad x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0$$

oder

$$(10') \qquad x_1'(t_0) = x_2'(t_0) = 0,$$

wo $t_0 \in I$ ist. Dann gilt

$$W(x_1, x_2) = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) \neq 0 \quad \text{für} \quad t > t_0.$$

Hilfssatz 9'. *Es sei $b(t) \in \mathscr{S}(I)$ und $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$. $x_1(t)$, $x_2(t)$ seien zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung $Lx = 0$, welche eine der Eigenschaften* (10), (10') *oder*

$$x_1''(t_0) = x_2''(t_0) = 0 \quad (t_0 \in I)$$

haben. Dann gilt

$$W(x_1, x_2) = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) \neq 0 \quad \text{für} \quad t > t_0.$$

Hilfssatz 10. *Die Differentialgleichung zweiter Ordnung $lv = 0$ sei im Intervall I diskonjugiert und es sei $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$. Wenn $u(t)$, $v(t)$ zwei solche Lösungen der Differentialgleichung $Lx = 0$ sind, dass*

$$u(t_0) = v(t_0) = 0 \quad (t_0 \in I)$$

und $u(t)$ oszillatorisch ist, dann ist auch $v(t)$ oszillatorisch.

Hilfssatz 11. *Die Differentialgleichung zweiter Ordnung $lv = 0$ sei im Intervall I diskonjugiert und es sei $c(t) \in \mathscr{S}_0(I)$. Wenn die Differentialgleichung*

$Lx = 0$ im Intervall I oszillatorisch ist und $u(t)$ ist ihre nichttriviale Lösung, welche in irgendiner Zahl $t_0 \in I$ der Bedingung

$$u(t_0) = 0 \quad \textit{oder} \quad u'(t_0) = 0$$

entspricht, dann ist $u(t)$ oszillatorisch. Wenn $b(t) \in \mathcal{S}^-(I)$ gilt, dann ist $u(t)$ auch in dem Falle oszillatorisch, wenn $u''(\tau_0) = 0$ in irgendeiner Zahl $\tau_0 \in I$ ist.

Satz 3. *Die Differentialgleichung zweiter Ordnung $lv = 0$ sei im Intervall I diskonjugiert. Es sei $c(t) \in \mathcal{S}_0^+(I)$ und die Differentialgleichung $Lx = 0$ sei im Intervall I oszillatorisch. Für jede ihre Lösung $u(t)$ ohne Nullstellen im Intervall I. gilt dann*

$$u(t)u'(t) < 0 \quad \textit{für} \quad t \in I, \ \lim_{t\to\infty} u(t) = k \in (-\infty, \infty).$$

Wenn dabei $b(t) \in \mathcal{S}^-(I)$ ist, dann gilt für die Lösung $u(t)$ darüber hinaus

$$u(t)u''(t) > 0 \quad \textit{für} \quad t \in I, \quad u(t)(u''(t)E(t, t_0))' \in \mathcal{S}_0(I) \quad (t_0 \in I),$$

$$\lim_{t\to\infty} u'(t) = 0, \ \lim_{t\to\infty} u''(t)E(t, t_0) = \bar{k} \in (-\infty, \infty);$$

$$u''(t)E(t, t_0) = \bar{k} + \int_t^\infty b(s)E(s, t_0)u'(s)\,\mathrm{d}s - \int_t^\infty c(s)E(s, t_0)u(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in I.$$

Und wenn ausserdem noch

1. *$a(t) \in \mathcal{S}^-(I)$ gilt, dann ist $u(t)u'''(t) \in \mathcal{S}_0(I)$ und $\lim_{t\to\infty} u''(t) = 0$;*

2.

$$\int_{t_0}^\infty E(t_0, s)\,\mathrm{d}s = \infty$$

erfüllt ist, dann ist $\bar{k} = 0$, oder

3.

$$\int_{t_0}^\infty E(t_0, s)\,\mathrm{d}s < \infty$$

und

$$\int_{t_0}^\infty \Big(\int_t^\infty E(t_0, s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t = \infty \quad \textit{bzw.} \quad \int_{t_0}^\infty b(t)\Big(\int_t^\infty E(t, s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t = \infty$$

gilt, dann ist $\bar{k} = 0$.

Beweis. Es sei $u(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $Lx = 0$ ohne Nullstellen im Intervall I. Zur Gewissheit sei $u(t) > 0$ für $t \in I$. Wir zeigen, dass $u'(t) < 0$ für alle $t \in I$ ist. Zu diesem Zweck zeigen wir zuerst, dass $u'(t) \neq 0$ im Intervall I ist. Indirekt: Es sei $u'(\bar{t}_0) = 0$ in irgendeiner Zahl $\bar{t}_0 \in I$

Da die Differentialgleichung $lv = 0$ in I diskonjugiert ist, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$ und die Differentialgleichung $Lx = 0$ in I oszillatorisch ist, ist dann aufgrund des Hilfssatzes 11 $u(t)$ im Intervall I oszillatorisch. Das widerspricht $u(t) > 0$ in I. Also ist $u'(t) \neq 0$ in I. Es sei $u'(t) > 0$ für $t \in I$. Dann ist aufgrund des Hilfssatzes 8 die Differentialgleichung $Lx = 0$ im Intervall $[\tau, \infty)$ für ein beliebiges $\tau \in I$ nichtoszillatorisch. Dies ist aber im Wiederspruch zu der Voraussetzung, dass die Differentialgleichung $Lx = 0$ im Intervall I oszillatorisch ist. Dieser Widerspruch beweist, dass $u'(t) < 0$ für $t \in I$ ist. Wenn $b(t) \in \mathscr{S}(I)$ gilt, dann ist laut Hilfssatz 5 $u''(t) > 0$ für $t \in I$. Die übrigen Behauptungen werden auf ähnliche Weise bewiesen, wie dies im Beweis des Satzes 1′ für die Lösung $w_1(t)$ durchgeführt wurde.

Aus dem Hilfssatz 11 und dem Satz 3 folgt:

Folgerung. *Die Voraussetzungen des Satzes* 3 *seien erfüllt. Dann ist jede nichttriviale Lösung der Differentialgleichung* $Lx = 0$ *im Intervall* I *oszillatorisch oder sie hat keine Nullstelle in* I. *Ist* $u(t)$ *eine der Lösungen von* $Lx = 0$ *die in* I *keine Nullstelle hat, so ist* $u(t)u'(t) < 0$ *für alle* $t \in I$.

Satz 4. *Die Differentialgleichung zweiter Ordnung* $lv = 0$ *sei im Intervall* I *diskonjugiert und es sei* $c(t) \in \mathscr{S}_0(I)$. *Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Differentialgleichung* $Lx = 0$ *im Intervall* I *oszillatorisch sei, dass für jede ihre Lösung* $u(t)$ *ohne Nullstellen in* I $u(t)u'(t) < 0$ *für* $t \in I$ *gelte.*

Beweis. Die notwendige Bedingung folgt aus dem Satz 3.

Die hinreichende Bedingung. Für jede Lösung $u(t)$ von $Lx = 0$ ohne Nullstellen in I gelte $u(t)u'(t) < 0$ für $t \in I$ und die Differentialgleichung $Lx = 0$ sei im Intervall I nichtoszillatorisch. Da die Differentialgleichung $lv = 0$ in I diskonjugiert ist und $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$, folgt aus dem Hilfssatz 3, dass jede nichttriviale Lösung der Gleichung $Lx = 0$ mit einer doppelten Nullstelle in irgendeiner Zahl $t_0 \in I$ keine Nullstelle im Intervall (α, t_0) hat. Aufgrund des Satzes 2 [6] existiert deshalb eine solche Zahl $\gamma \in I$, dass die Differentialgleichung $Lx = 0$ im Intervall $[\gamma, \infty)$ diskonjugiert ist. Das bedeutet, dass ihre Lösungen $x_1(t)$, $x_2(t)$, welche in den Zahlen t_1, t_2 $(t_2 > t_1 \geqq \gamma)$ den Anfangsbedingungen

$$x_i(t_i) = x_i'(t_i) = 0, \quad x_i''(t_i) = 1 \quad (i = 1, 2)$$

entsprechen, für $t > t_i$ $(i = 1, 2)$ positiv sind. Ferner folgt aus dem Hilfssatz 3, dass $x_i(t) > 0$ in (α, t_i) für $i = 1, 2$ ist. Also ist die Lösung

$$\bar{x}(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

der Differentialgleichung $Lx = 0$ im Intervall I positiv. Wählen wir $t_2 = t_1 +$

$+ \delta$, wo δ eine derart kleine positive Zahl ist, dass $x_1'(t_1 + \delta) > 0$ und $x_2'(t_1 + \delta) < 0$ ist. Eine solche Wahl der Zahl δ ist immer möglich. Dann haben wir

$$\bar{x}'(t_1) = x_2'(t_1) < 0, \quad \bar{x}'(t_1 + \delta) = x_1'(t_1 + \delta) > 0 .$$

Damit erhielten wir, dass für die positive Lösung $\bar{x}(t)$ im ganzen Intervall I $x(t)x'(t) < 0$ nicht gilt, was im Widerspruch dazu steht, dass für jede Lösung $u(t)$ von $Lx = 0$ ohne Nullstellen in I, $u(t)u'(t) < 0$ für $t \in I$ gilt. Also ist die Differentialgleichung $Lx = 0$ im Intervall I oszillatorisch.

Aus dem Satz 3 und dem Satz 4 erhalten wir die

Folgerung. *Es sei $b(t) \in \mathscr{S}(I)$ und $c(t) \in \mathscr{S}_0(I)$. Dann ist die Differentialgleichung $Lx = 0$ dann und nur dann im Intervall I oszillatorisch, wenn für jede ihre Lösung $u(t)$ ohne Nullstellen in I*

$$u(t)u'(t) < 0, \quad u'(t)u''(t) < 0 \quad \text{für} \quad t \in I$$

gilt. (Vgl. mit ähnlichem Resultat von G. Vilari [7].)

LITERATUR

[1] LAZER, A. C.: The behavior of solutions of the differential equation $y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$, Pacif. J. Math. 17, 1966, 435–466.

[2] ХАРТМАН, Ф.: Обыкновенные дифференциальные уравнения, Москва 1970 (перевод с английского).

[3] ЛЕВИН, А. Ю.: Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$, Успехи матем. наук, Т. XXIV, вып. 2 (146), 1969, 43–96.

[4] GERA, M.: Bedingungen der Nichtoszillationsfähigkeit für die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung $y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0$, Acta F. R. N. Univ. Comen. — Mathematica, XXIII, 1969, 13–34.

[5] GERA, M.: Nichtoszillatorische und oszillatorische Differentialgleichungen dritter Ordnung, Čas. pěstov. Mat. 96, 1971, 278–293.

[6] ШВЕЦ, М.: Несколько замечаний о линейном дифференциальном уравнении третьего порядка, Чехослов. матем. ж. Т. 15 (90), 1965, 42–49.

[7] VILARI, G.: Sul carattere oscilatorio delle solutioni delle equazioni differenziali lineari omogenee del terzo ordine, Boll. Univ. Mat. Ital. III. Ser. 13, 1958, 73–78.

Eingegangen am 25. 4. 1973

Katedra matematickej analýzy
Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského
Pavilón matematiky
816 31 Bratislava
Mlynská dolina