Matematický časopis

Pavel Bartoš

Jeden diofantický problém o tangenciálnych mnohoúhelníkoch

Matematický časopis, Vol. 20 (1970), No. 4, 262--269

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126552

Matematický časopis 20 (1970), No. 4

JEDEN DIOFANTICKÝ PROBLÉM O TANGENCIÁLNYCH MNOHOUHOLNÍKOCH

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

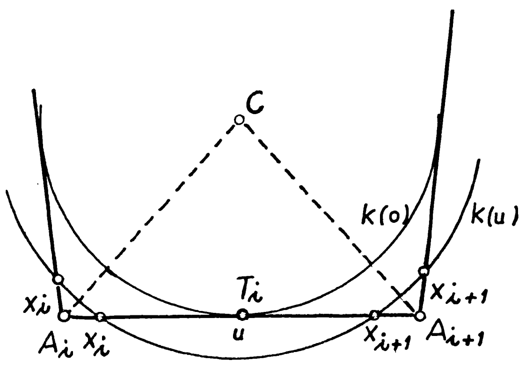
Diofantické problémy v geometrii sa zvyčajne týkajú trojuholníkov, zriedka štvoruholníkov. V tomto článku riešime jeden diofantický problém o tangenciálnych mnohouholníkoch (t. j. takých, ktoré sú opísané kružnici).

Ďalej značí $\mathbf{A}_m = A_1A_2 \ldots A_m$, $m \geqq 3$, vždy konvexný tangenciálny m-uholník, $A_i\, A_{i+1} = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m,\ A_{m+1} = A_1)$ dĺžky jeho strán, C stred a ϱ polomer jemu vpísanej kružnice. Ďalej značí $k(u)$ kružnicu so stredom C a polomerom r, pre ktorý platí $\varrho \leqq r \leqq \min_i CA_i$. Táto má na každej strane $\mathbf{A}_m$ tetivu dĺžky u, $0 \leqq u \leqq u_{\max}$. Zrejme $u_{\max}$ vytína kružnica $k(u)$, majúca najväčší možný polomer $CA_e = \min_i CA_i$. Ak T_e je bod dotyku kružnice $k(0)$ (polomeru ϱ) na strane A_eA_{e+1}, tak (pozri obr. 4)

$$u_{\max} = 2A_eT_e = 2x_e' \tag{1}$$

Takto vznikajú na každej strane A_iA_{i+1} tri úsečky x_i, u, x_{i+1} (obr. 1), z ktorých najviac dve môžu byť nulové, pritom

$$u = 0 \Rightarrow x_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m \tag{2}$$



Obr. 1.

Keďže priamka CA_i (resp. CA_{i+1}) je aj osou kružnice $k(u)$, aj osou uhla $\sphericalangle A_{i+1}A_iA_{i-1}$ (resp. $\sphericalangle A_{i+2}A_{i+1}A_i$), platí na troch susedných stranách $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1}, $A_{i+1}A_{i+2}$

$$x_{i-1} + x_i + u = a_{i-1}, \; x_i + x_{i+1} + u = a_i, \; x_{i+1} + x_{i+2} + u = a_{i+1}$$

Platí teda

$$x_k + x_{k+1} + u = a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m \tag{3}$$

Chceme určiť nutné a postačujúce podmienky, aby úsečky u, x_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ mali celočíselné veľkosti. Ide teda o riešenie sústavy rovníc (3) v nezáporných celých číslach u, x_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, pričom $0 \leqq u \leqq u_{\max}$ a nulové hodnoty sú podrobené podmienke (2), ktorá vyplýva z konvexity $\mathbf{A}_m$.

Predovšetkým si treba všimnúť, že sústava (3) pre každé u, $0 \leqq u \leqq u_{\max}$ má vždy aspoň jedno riešenie v nezáporných číslach $x_1, x_2, \ldots, x_m$. To vyplýva z geometrickej povahy problému, keďže $\mathbf{A}_m$ je konvexný tangenciálny mnohouholník. Ďalej je zrejmé z rovníc (3), že *úloha môže mať riešenie len vtedy, ak strany mnohouholníka* $\mathbf{A}_m$ *majú celočíselné veľkosti*, teda len vtedy, keď a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, sú prirodzené čísla. Preto budeme najprv hľadať riešenie sústavy (3) bez diofantických podmienok s predpokladom $a_i > 0$, $0 \leqq u \leqq u_{\max}$ a potom ho podrobíme diofantickej analýze.

Ukazuje sa, že riešenie je rozdielne pre nepárne a pre párne číslo m.

I

Nech $m = 2n + 1$, n prirodzené číslo. Riešme sústavu rovníc

$$x_j + x_{j+1} = a_j - u, \quad j = k, k + 1, \ldots, 2n + k \tag{4}$$

kde index $2n + 1 + s$ $(s > 0)$ značí index s, v nezáporných číslach $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$, pričom $a_j > 0$, $0 \leqq u \leqq u_{\max}$. Máme teda $2n + 1$ lineárnych rovníc pre $2n + 1$ neznámych, pričom u je nezáporný parameter a $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ dané kladné čísla. Vieme, že vyhovujúce riešenie určite existuje.

Determinant sústavy (rádu $2n + 1$) ľahko vyčíslime rozvinúc ho podľa prvkov prvého stĺpca:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

Lineárna sústava (4) — ekvivalentná sústave (3) — má teda jediné riešenie, ktoré určite spĺňa podmienky geometrickej povahy problému. Toto riešenie nájdeme nasledovne:

Rovnice (4) vynásobíme číslom $(-1)^{j-k}$ a potom pre všetky j sčítame, tak dostaneme

$$\sum_{j=k}^{2n+k} (-1)^{j-k} x_j + \sum_{j=k+1}^{2n+k+1} (-1)^{j-k-1} x_j = \sum_{j=k}^{2n+k} (-1)^{j-k} (a_j - u),$$

odkiaľ po jednoduchej úprave vyjde

$$x_k = \tfrac{1}{2} \Big[\sum_{j=k}^{2n+k} (-1)^{j-k} a_j - u \Big], \quad k = 1, 2, \ldots, 2n + 1. \tag{5}$$

Pri prípustnej hodnote parametru u je vždy $x_k \geqq 0$ a je splnená podmienka (2).

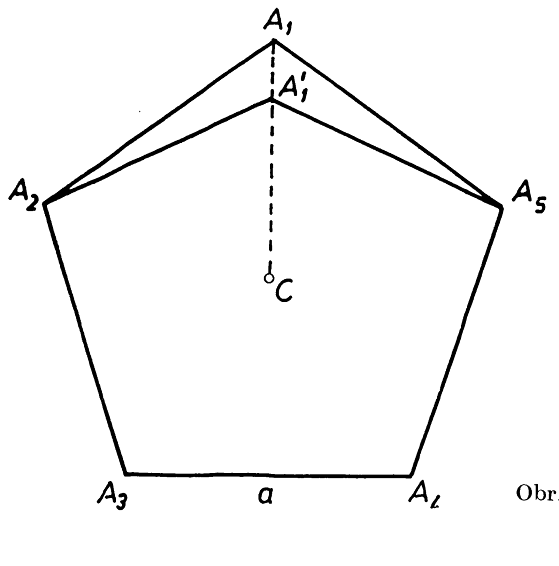
Ak je $u = 0$, teda ak je k (0) vpísaná kružnica do $\mathbf{A}_{2n+1}$, tak čísla

$$x'_k = \tfrac{1}{2} \Big[\sum_{j=k}^{2n+k} (-1)^{j-k} a_j, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n + 1, \tag{6}$$

sú dĺžky úsečiek $A_kT_k = A_kT_{k-1}$, pričom T_k (T_{k-1}) je bod dotyku tejto kružnice na strane A_kA_{k+1} ($A_{k-1}A_k$). Keďže v $\mathbf{A}_m$ sú vnútorné uhly duté, platí $x'_k > 0$ pre všetky k, čo vyjadruje podmienka (2). V každom $\mathbf{A}_{2n+1}$ teda nutne musí platiť

$$\sum_{j=k}^{2n+k} (-1)^{j-k} a_j > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n + 1. \tag{7}$$

Vzťahy (7) sú pre existenciu $\mathbf{A}_{2n+1}$ so stranami $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ (určenými veľkosťou a poradím) aj postačujúcimi podmienkami pri trojuholníkoch a pravidelných mnohouholníkoch. Vo všeobecnosti však pre $n > 1$ nimi



Obr. 2.

nie sú. Na dôkaz toho slúži na obr. 2 päťuholník $A_1'A_2 \dots A_5$, ktorý vznikol z pravidelného päťuholníka $A_1A_2 \dots A_5$ so stranou a posunutím vrcholu A_1 do bodu A_1' na polomere A_1C vpísanej kružnice. Pritom $A_1'A_2 = A_1'A_5 = a - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Ak bod A_1' volíme tak, aby $\varepsilon > 0$ bolo dostatočne malé, ostré nerovnosti (7) zostanú splnené aj v päťuholníku $A_1'A_2A_3A_4A_5$, ktorý však nie je tangenciálny. To isté platí pre všetky pravidelné $(2n + 1)$-uholníky, $n > 1$.

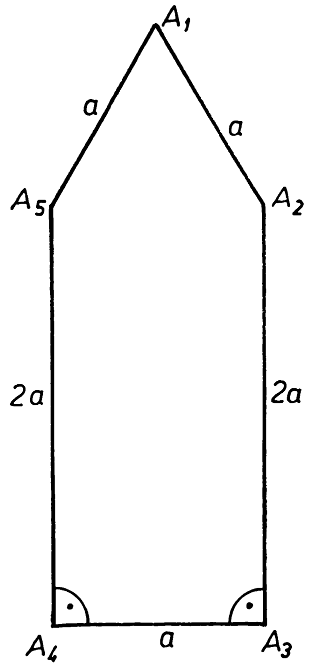
Nerovnosti (7) možno považovať za mnohouholníkové nerovnosti (zovšeobecnené trojuholníkové nerovnosti) v $(2n + 1)$-uholníkoch. V $\mathbf{A}_{2n+1}$ platia vždy, v iných $(2n + 1)$-uholníkoch však platiť nemusia. Dôkazom toho je päťuholník na obr. 3, v ktorom $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 < 0$.

Pri daných dĺžkach a_j strán $\mathbf{A}_{2n+1}$ a ich poradia sú všetky úseky x_k' vzťahom (6) jednoznačne určené. Z toho vyplýva, že z daných $2n + 1$ úsečiek (s určeným poradím) možno zostrojiť buď práve jeden $\mathbf{A}_{2n+1}$, buď žiadny. Keby ich totiž bolo viacej, museli by sa líšiť aspoň v jednom vnútornom uhle. Avšak (obr. 4) platí

$$\varrho = x_k' \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2n + 1, \tag{8}$$

a teda, keď sa napr. zväčší α_k, zväčší sa ϱ, lebo x_k' sa nezmenilo. To znamená, že podľa (8) sa všetky vnútorné uhly zväčšili, čo je nemožné.

Teraz dokážeme:



Obr. 3.

Veta 1. *Nech veľkosti strán* $\mathbf{A}_{2n+1}$ (*n prirodzené číslo*) *sú prirodzené čísla. Potom úsečky* x_k, u, x_{k+1}, *ktoré vzniknú na strane* A_kA_{k+1} *pretínaním tejto strany kružnicou* $k(u)$, *sú pre všetky* $k = 1, 2, \ldots, 2n + 1$ *celočíselnej veľkosti práve vtedy, keď je celočíselná veľkosť tetivy* u *a platí*

$$u \equiv \sum_{j=1}^{2n+1} a_j \pmod 2, \tag{9}$$

a práve vtedy, keď je celočíselnej veľkosti aspoň jedna z úsečiek $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$.

Dôkaz. Sústava rovníc (4) má pre každé u, $0 \leqq u \leqq u_{\max}$ jediné riešenie, ktoré vyhovuje podmienkam geometrického problému. Toto riešenie dávajú vzorce (5). Z nich potom vyplýva, že ak je u nezáporné celé číslo tejže parity ako obvod $\mathbf{A}_{2n+1}$, sú x_k pre všetky k nezáporné celé čísla. Je totiž pre každé k

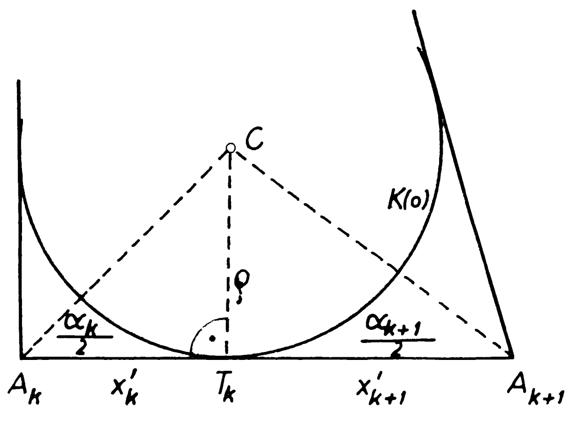
$$\sum_{j=k}^{2n+k} (-1)^{j-k} a_j = \sum_{j=k}^{2n+k} a_j - 2\sum_{l} a_l = \sum_{j=1}^{2n+1} a_j - 2\sum_{l} a_l \equiv \sum_{j=1}^{2n+1} a_j \pmod 2,$$

kde $l = k + 1, k + 3, \ldots, 2_{n+k-1}$. Ak u nemá spomenutú vlastnosť, žiadne x_k nie je celé číslo.

Aj v tom prípade, že x_k je pre určité k celé číslo (z geometrickej povahy problému vyplýva, že je nezáporné), je podľa (5) $u = 2(x_k' - x_k)$ celé nezáporné číslo a $u \equiv \sum_{j=1}^{2n+1} a_j \pmod 2$, takže veta platí podľa predošlého odstavca. Tým je úplne dokázaná.

Dôsledok 1. V $\mathbf{A}_{2n+1}$ so všetkými stranami celočíselnej veľkosti sú veľkosti úsekov strán, na ktoré ich delia dotykové body kružnice $k(0)$, prirodzené čísla práve vtedy, keď je jeho obvod párne číslo.

Dôsledok 2. Ak všetky strany mnohouholníka $\mathbf{A}_{2n+1}$ majú celočíselné veľkosti, tak na nich vytína kružnica $k(u_{\max})$ úseky celočíselnej veľkosti. (Taká kružnica totiž prechádza aspoň jedným vrcholom $\mathbf{A}_{2n+1}$, takže určité $x_k = 0$.)



Obr. 4.

II

Teraz nech $m = 2n+2$ (n prirodzené číslo). Rovnice sústavy

$$x_k + x_{k+1} = a_k - u\,, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n+2 \tag{10}$$

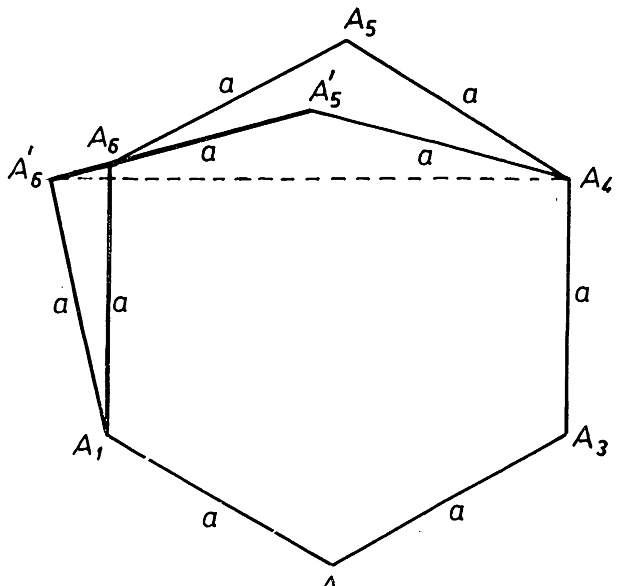
sú v neznámych $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+2}$ lineárne závislé. Násobením rovníc (10) číslom $(-1)^{k-1}$ a sčítaním všetkých dostaneme totiž

$$\sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k-1} x_k + \sum_{k=2}^{2n+2} (-1)^k x_k + (-1)^{2n+3} x_1 = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k-1} (a_k - u)\,,$$

odkiaľ vyplýva

$$\sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k-1} a_k = 0\,. \tag{11}$$

Vzťah (11) značí aj nevyhnutnú podmienku existencie $\mathbf{A}_{2n+2}$ z daných $2n + 2$ strán určených veľkosťou a poradím. Ako je známe, je táto podmienka pri $n = 1$ (v štvoruholníkoch) aj postačujúca. Zrejme je to tak aj v pravidelných mnohouholníkoch s párnym počtom strán. Neplatí to však všeobecne. Ak napr. z pravidelného šesťuholníka $A_1A_2 \ldots A_6$ so stranami veľkosti a zostrojíme rovnostranný šesťuholník $A_1A_2 \ldots A_4A_5'A_6'$ (obr. 5) tak, že $\sphericalangle A_2A_1A_6' = 135°$, ľahko zistíme, že $A_4A_6' = a\sqrt{5 - 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$. Ak so základňou A_4A_6' zostrojíme ešte mimo päťuholníka $A_1A_2A_3A_4A_6'$ rovnoramenný



Obr. 5.

trojuholník s ramenami $A_4A_5' = A_5'A_6' = a$ (čo ide, lebo trojuholníková nerovnosť je splnená), nájdeme, že $\sphericalangle A_4A_6'A_5' = \sphericalangle A_6'A_4A_5' < 30°$. Z toho vyplýva, že rovnostranný 6-uholník $A_1A_2 \ldots A_4A_5'A_6'$ má duté vnútorné uhly a teda je konvexný. Tangenciálny však zrejme nie je.

Hľadajme teraz riešenie sústavy (10). Vieme, že pre $\mathbf{A}_{2n+2}$ existuje vyhovujúce riešenie v nezáporných číslach x_k, $k = 1, 2, \ldots, 2n + 2$ pre každé prípustné u.

V sústave je napr. prvých $2n + 1$ rovníc lineárne nezávislých v neznámych $x_2, x_3, \ldots, x_{2n+2}$; pritom u, x_1 povyžujeme za parametre. Je totiž determinant sústavy rádu $2n + 1$ teraz

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 1, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Má teda táto sústava $2n + 1$ lineárnych rovníc (10) pre $k = 1, 2. \ldots, 2n + 1$ v neznámych $x_2, x_3, \ldots, x_{2n+2}$ pri daných parametroch u, x_1 práve jedno riešenie, ktoré ľahko nájdeme. Z rovníc (10) máme

$$x_2 = a_1 - x_1 - u, \quad x_3 = a_2 - x_2 - u = a_2 - a_1 + x_1,$$
$$x_4 = a_3 - x_3 - u = a_3 - a_2 + a_1 - x_1 - u$$

atď. Matematickou indukciou snadno dokážeme, že

$$x_{2l+1} = a_{2l} - a_{2l-1} + a_{2l-2} - \ldots + a_2 - a_1 + x_1, \tag{12}$$

$$x_{2l+2} = a_{2l+1} - a_{2l} + a_{2l-1} - \ldots - a_2 + a_1 - x_1 - u \tag{13}$$

pre $l = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Zo vzťahov (13) vyplýva, že v $\mathbf{A}_{2n+2}$ nutne platia nerovnosti

$$a_{2l+1} - a_{2l} + a_{2l-1} - \ldots - a_2 + a_1 > 0' \quad l = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Obdobné vzťahy (vznikajúce cyklickými permutáciami indexov $1, 2, \ldots, 2n + 2$) dostaneme, keď za parameter volíme ľubovoľné x_k. Sú ďalším zovšeobecnením trojuholníkových nerovností v $\mathbf{A}_{2n+2}$. Všimnime si, že všetky obsahujú nepárny počet strán a_i (pre všetky strany $\mathbf{A}_{2n+2}$ platí podľa (11) rovnosť)[1].

---

[1] Vidno, že obdobný postup možno urobiť aj pre $\mathbf{A}_{2n+1}$ s prvými $2n$ rovnicami (10); (12) platí bez zmeny, ale (13) vo forme

$$x_{2l} = a_{2l-1} - a_{2l-2} + a_{2l-3} - \ldots - a_2 + a_1 - x_1 - u, \quad l = 1, 2, \ldots, n \tag{13'}$$

Ak máme na zreteli nerovnosti (7), vidíme, že nerovnosti (14) platia (aj pri cyklických permutáciach indexov) tiež v $\mathbf{A}_{2n+1}$.

Keďže pri $\mathbf{A}_{2n+2}$ možno jeden úsek, napr. $x_1' = A_1T_1$ ľubovoľne zvoliť ($0 < x_1' < a_1, a_{2n+2}$), môže ku každému takému x_1' pri daných stranách a_k (veľkosťou a poradím) existovať $\mathbf{A}_{2n+2}$. Skutočne je to tak pri štvoruholníkoch, pretože $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 0$ je tu postačujúcou podmienkou existencie $\mathbf{A}_4$. Nie je tomu však pri $\mathbf{A}_{2n+2}$, $n > 1$, všeobecne, ako sme videli pri deformácii pravidelného šesťuholníka (obr. 5).

Teraz už môžeme dokázať:

Veta 2. *Nech $\mathbf{A}_{2n+2}$ (kde n je prirodzené číslo) má všetky strany celočíselnej veľkosti. Úsečky, ktoré vzniknú pretínaním jeho strany A_kA_{k+1} kružnicou $k(u)$ majú pre všetky $k = 1, 2, \ldots, 2n+2$ celočíselné veľkosti práve vtedy, keď sú celočíselnej veľkosti aspoň na jednej strane $\mathbf{A}_{2n+2}$.*

Dôkaz. Z rovníc (12) vyplýva, že x_{2l+1}, $l = 0, 1, \ldots, n$ sú celočíselnej veľkosti práve vtedy, keď to platí o x_1 a potom podľa (13) sú x_{2l+2} celočíselnej veľkosti práve vtedy, keď to platí o u, teda aj o $x_2 = a_1 - u - x_1$, a v inom prípade nie. Veta je tým dokázaná, keď sú celočíselných veľkostí úseky na A_1A_2, čo však nie je na ujmu všeobecnosti. Tým je veta dokázaná.

Dôsledok. Ak $\mathbf{A}_{2n+2}$ má všetky strany celočíselnej veľkosti a ak kružnica $k(u_{\max})$ prechádza dvoma jeho susednými vrcholmi, sú úseky ňou na všetkých stranách vyťaté celočíselných veľkostí. (Pretože na jednej strane a_k vyťaté úsečky sú veľkosti $0, 0, u_{\max} = a_k$.)

Došlo 24. 9. 1968

A DIOFANTIC PROBLEM OF TANGENTIAL POLYGONS

Pavel Bartoš

Summary

In this paper necessary and sufficient conditions are given for a circle concentrated with an inscribed circle of a convex tangential polygon to intersect on all its sides segments with integer lengths.