Václav Medek

Darstellende Geometrie eines Raumes mit Orthogonalgeometrie

Matematický časopis, Vol. 19 (1969), No. 3, 216--224

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126534

DARSTELLENDE GEOMETRIE EINES RAUMES MIT ORTHOGONALGEOMETRIE

VÁCLAV MEDEK, Bratislava

1. Einige Bemerkungen zur Orthogonalgeometrie eines dreidimensionalen Raumes. Wir werden von Lenzschen Axiomen (vgl. [1], S. 138) eines affinen Raumes $\mathfrak{A}$ ausgehen; da wir uns mit einem dreidimensionalen Raume beschäftigen werden, werden wir anstatt des Axioms 8, dieses Axiom 8′ benützen: Zwei verschiedene Ebenen haben entweder keinen gemeinsamen Punkt, oder eine gemeinsame Gerade.

Im Raume $\mathfrak{A}$ gelten alle Grundeigenschaften der Lage aus dem euklidischen dreidimensionalen Raume (über dem Körper von reellen Zahlen), was unmittelbar aus den Axiomen folgt. Der Begriff der Parallelität wird bekannterweise eingeführt, wobei wir auch zwei inzidente Figuren als parallel betrachten. Wir werden diese in $\mathfrak{A}$ geltenden Sätze benützen:

Satz 1. *Wenn α, α' zwei parallele Ebenen sind und die Gerade a die Ebene α in einem Punkte A schneidet, dann schneidet die Gerade a auch die Ebene α'.*

Aus diesem Satz folgt die Eindeutigkeit der Ebene α' durch den Punkt A und parallel zur Ebene α.

Satz 2. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Parallelität von Ebenen α, α' ist die Existenz von solchen sich schneidenden Geraden $a', b' \in \alpha'$, dass $a' \parallel \alpha$, $b' \parallel \alpha$ ist.*

Satz 3. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Parallelität einer Geraden a und einer Ebene α ist die Existenz einer solchen Geraden $a' \in \alpha$, dass $a \parallel a'$ ist.*

Satz 4. *Wenn eine Gerade a die Ebene α schneidet $(a \notin \alpha)$, dann schneidet diese Ebene auch jede mit der Geraden a parallele Gerade.*

Satz 5. *Wenn die Ebenen α, α' parallel sind und eine Ebene β mit der Ebene α nicht parallel ist, dann sind auch die Ebenen α', β nicht parallel und die Schnittgeraden $a = [\alpha, \beta]$, $a' = [\alpha', \beta]$ sind parallel.*

Unter einem Vektor des Raumes $\mathfrak{A}$ verstehen wir eine Abbildung $\mathbf{V} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, wobei jedes Punktepaar A, B die Eigenschaft $[\mathbf{V}A, \mathbf{V}B] \parallel [A, B]$ hat und die Abbildung $\mathbf{V}$ entweder eine Identität ist, oder keinen invarianten Punkt hat.

Es ist gut bekannt, dass ein Vektor durch einen Punkt und sein Bild bestimmt ist und dass alle Vektoren eine abelsche Gruppe bilden. Wenn wir im Raume $\mathfrak{A}$

einen willkürlichen festen Punkt O wählen, dann können wir Punkte des Raumes $\mathfrak{A}$ eineindeutig in Vektoren des Raumes $\mathfrak{A}$ so abbilden, dass dem Punkte $A \in \mathfrak{A}$ der Vektor $\boldsymbol{A}$, welcher den Punkt O auf den Punkt A abbildet, zugeordnet wird. Vektoren des Raumes $\mathfrak{A}$ bilden einen Vektorraum $\mathfrak{B}$ über einem Körper T. In weiteren Überlegungen werden wir voraussetzen, dass der Körper T kommutativ der Charakteristik $\neq 2$ ist; ausserdem werden wir in den Vektorraum $\mathfrak{B}$ eine Orthogonalgeometrie einführen (vgl. z. B. [2], S. 111). Das Skalarprodukt von Vektoren $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ werden wir mit $\boldsymbol{AB}$ bezeichnen und wir werden voraussetzen, dass das Radikal des Raumes $\mathfrak{B}$ der Nullvektor ist; der Raum $\mathfrak{B}$ ist also regulär.

Wenn es zu keinem Missverständniss führen kann, werden wir die Punkte des Raumes $\mathfrak{A}$ mit zugeordneten Vektoren identifizieren und dann können wir sagen, dass jede Isometrie des Raumes $\mathfrak{A}$ in eine orthogonale Transformation des Raumes $\mathfrak{B}$ und eine Translation des Raumes $\mathfrak{A}$ zerlegt werden kann.

Definition 1. *Zwei Punktepaare* (A, B), (C, D) *heissen kongruent, wenn* $(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})^2 = (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C})^2$.

Die Kongruenz von Punktepaaren ist eine Äquivalenzrelation und für zwei zugeordnete Punktepaare schreiben wir dann $(A, B) \sim (C, D)$.

Definition 2. *Seien die Vektoren* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D} \neq 0$ *und nicht isotrop; dann heissen die Vektorenpaare* $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ *kongruent, wenn*

$$\frac{(\boldsymbol{AB})^2}{\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2} = \frac{(\boldsymbol{CD})^2}{\boldsymbol{C}^2\boldsymbol{D}^2}.$$

Zwei von Null verschiedene Vektoren heissen xrthogonal, wenn $\boldsymbol{AB} = 0$.

Das Vektorenpaar $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ ist mit jedem Paar $(k\boldsymbol{A}, l\boldsymbol{B})$ kongruent, wo k, l zwei von Null verschiedene Elemente des Körpers T sind. Die Kongruenzrelation von Vektorenpaaren ist wieder eine Äquivalenzrelation und wir schreiben daher $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \sim (\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$. Ein Paar von Null verschiedenen, nicht isotropen orthogonalen Vektoren ist mit jedem solchen Paar kongruent.

Definition 3. *Sei a eine willkürliche Gerade des Raumes $\mathfrak{A}$ und sei a' die Parallele zu a durch den Punkt O; wenn $A \neq O$ ein beliebiger Punkt der Geraden a' ist, dann heisst der Vektor $\boldsymbol{A}$ ein Richtungsvektor der Geraden a. Die Gerade a heisst gerade dann isotrop, wenn ihr Richtungsvektor isotrop ist; jede nicht isotrope Gerade heisst regulär. Sei α eine willkürliche Ebene des Raumes $\mathfrak{A}$ und α' sei die zu ihr parallele Ebene durch den Punkt O; dann heisst der Unterraum des Raumes $\mathfrak{B}$, welchen die Vektoren der Ebene α' bilden, die Richtungsebene der Ebene α. Die Ebene α heisst regulär, wenn das Radikal ihrer Richtungsebene gleich Null ist; jede nicht reguläre Ebene heisst singulär.*

Diese Definition ermöglicht eine Kongruenzrelation zwischen Geradenpaaren einzuführen; zwei Geradenpaare (a, b), (c, d) heissen kongruent, wenn die Paare ihrer Richtungsvektoren kongruent sind. Auch diese Relation ist eine Äquivalenzrelation und wir schreiben $(a, b) \sim (c, d)$. Wenn wir zwei Geraden mit zueinander orthogonalen Geraden als orthogonale Geraden bezeichnen, dann sind jede zwei Paare von zueinander orthogonalen Geraden kongruent.

Es gibt zwei Arten von regulären Ebenen; entweder enthält die Ebene keine isotrope Gerade, oder sie enthält gerade zwei Systeme zueinander paralleler isotropen Geraden; im letzten Falle heisst die Ebene hyperbolisch. In einer singulären Ebene α können nicht alle Vektoren isotrop sein; dann würde nämlich rad $\alpha = \alpha$, $\alpha^* = \alpha$ und $\dim \alpha + \dim \alpha^* = 4 > 3$. Deshalb enthält eine jede singuläre Ebene gerade ein System von parallelen isotropen Geraden.

Definition 4. *Eine Gerade a ist zu einer Ebene α gerade dann orthogonal, wenn ihr Richtungsvektor auf zwei linear unabhängige Vektoren der Richtungsebene α' orthogonal ist.*

Aus dieser Definition folgt dieses Kriterium für Orthogonalität von Geraden und Ebenen: Eine Gerade ist gerade dann zu einer Ebene orthogonal, wenn sie zu zwei sich schneidenden Geraden orthogonal ist. Eine Senkrechte (orthogonale Gerade) auf eine Ebene ist gerade dann mit dieser Ebene nicht parallel, wenn die Ebene (und daher auch die Senkrechte auf sie) regulär ist. Wenn die Ebene singulär ist, dann ist auch jede Senkrechte auf sie isotrop und mit ihr parallel.

2. Die Parallelprojektion im $\mathfrak{A}$.

Definition 5. *Unter einer Parallelprojektion des Raumes $\mathfrak{A}$ auf eine Ebene $\pi \in \mathfrak{A}$ verstehen wir eine Abbildung $\mathscr{P}$ des Raumes $\mathfrak{A}$ auf π, welche diese Bedingungen erfüllt:*

1) *Die Punkte werden in Punkte abgebildet; die Punkte der Ebene π (Bildebene) sind invariant.*

2) *Die Geraden werden auf Geraden oder auf Punkte abgebildet; das Bild einer Geraden ist dann und nur dann ein Punkt, wenn Bilder von zwei ihrer verschiedenen Punkte zusammenfallen.*

3) *Keine drei nichtkollineare Punkte haben ein gemeinsames Bild.*

4) *Die Inzidenz wird bei $\mathscr{P}$ erhalten.*

Bemerkung 1. Die Abbildung $\mathscr{P}$ vermittelt eine Zerlegung des Raumes $\mathfrak{A}$ in disjunkte Untermengen mit der Eigenschaft, dass alle Punkte einer Untermenge in einen Punkt abgebildet sind. Diese Untermengen heissen Abbildungsuntermengen der Abbildung $\mathscr{P}$.

Satz 6. *Die Abbildungsuntermengen der Abbildung $\mathscr{P}$ sind zueinander parallele Geraden.*

Beweis. Die Bilder von Figuren bei der Abbildung $\mathscr{P}$ werden wir mit einem Index 1 rechts unten bezeichnen. Wählen wir einen beliebigen Punkt $A \in \mathfrak{A}$, $A \notin \pi$; sein Bild ist $A_1 \in \pi$. Beschäftigen wir uns jetzt mit der Verbindungsgeraden der Punkte A, A_1. Da die Bilder der Punkte A, A_1 im Punkte A_1 zusammenfallen, wird nach 2) das Bild der Geraden $z^A = [A, A_1]$ der Punkt A_1. Die Gerade z^A ist eine Abbildungsuntermenge, da nach 3) kein weiterer Punkt in den Punkt A_1 abgebildet werden kann.

Wählen wir weiter eine willkürliche Gerade $p \in \pi$, $A_1 \notin p$ und es sei α eine Ebene durch den Punkt A und durch die Gerade p. Sei jetzt $B_1 \neq A_1$ ein willkürlicher Punkt aus π und sei $B_1 \notin p$ (das ist möglich, da der Körper T von Charakteristik $\neq 2$ ist). Sei $P^b = [b_1, p]$; dann ist das Bild der Geraden $b = [P^b, A]$ (nach 2) und 4)) die Gerade b_1. Nach 2) kann kein Punkt $M \in b$, $M \neq A, P^b$ weder in den Punkt A_1, noch in den Punkt P^b projiziert werden. Alle Geraden vom Typ $z^M = [M, M_1]$, wo $M \in b$, $M \neq P^b$ liegen in einer Ebene $\varrho^b = [b, b_1]$ und da sie keinen gemeinsamen Punkt haben, sind sie zueinander parallel. Wenn wir dann die Parallele z^B mit z^M durch B_1 konstruieren, schneidet sie die Gerade b im Punkte B, dessen Bild gerade der Punkt B_1 ist. Zwischen den Punkten einer Geraden b und den Punkten ihres Bildes b_1 besteht eine eineindeutige Verwandschaft, welche durch zueinander parallele Abbildungsgeraden vermittelt ist. Sei jetzt $C_1 \in \pi$ ein solcher Punkt, dass die Verbindungsgerade $[A_1, C_1]$ parallel zur Geraden p ist; ähnlich werden wir dann mit Hilfe vom Punkt B_1 beweisen, dass die Abbildungsuntermenge z^c eine Gerade ist. Da die Wahl der Geraden p ganz willkürlich war, ist der Satz vollständig bewiesen.

Bemerkung 2. Satz 6 gilt nicht für einen Raum $\mathfrak{A}$ über einem Körper T der Restklassen mod 2. Bezeichnen wir die Punkte des Raumes $\mathfrak{A}$ als A, B, C, D, E, F, G, H und die Ebene π möge die Punkte A, B, C, D enthalten. Seien die Geraden $[A, E]$, $[B, F]$, $[C, G]$, $[D, H]$ Parallelen. Die Abbildung $E \to A$, $F \to C$, $G \to B$, $H \to D$ erfüllt alle Bedingungen 1) — 4) und doch sind die Abbildungsuntermengen keine zueinander parallele Geraden.

Bemerkung 3. Die Abbildung $\mathscr{P}$ kann man durch die Ebene π und durch die Richtung s der projizierenden Geraden bestimmen.

Definition 6. *Der Schnittpunkt einer Geraden mit der Bildebene heisst Spurpunkt und die Schnittgerade einer Ebene mit der Bildebene heisst Spur.*

Definition 7. *Die Projektion einer Figur ist die Menge von Projektionen aller Punkte der Figur.*

Bemerkung 4. Über die Projektionen von Punkten und Geraden spricht man in 1) und 2) in der Definition 5.

Die folgenden zwei Sätze beweist man genau so wie in der darstellenden Geometrie eines affinen Raumes über dem Körper von reellen Zahlen.

Satz 7. *Die Projektion einer Ebene ist die Bildebene, bzw. eine Gerade je nachdem, ob die Ebene nicht parallel, bzw. parallel mit der Projektionsrichtung ist.*

Satz 8. *Zwei Parallelen mit der Projektionsrichtung projizieren sich in Punkte; in jedem anderen Falle sind Projektionen von zwei zueinander parallelen Geraden wieder zueinander parallele Geraden.*

Definition 8. *Sei die Ebene α nicht mit der Bildebene π parallel; dann geht durch jeden Punkt der Ebene α eine Gerade ${}^{\pi}h \in \alpha$ parallel mit der Bildebene. Die Geraden ${}^{\pi}h \in \alpha$ heissen Hauptgeraden der Ebene bezüglich der Bildebene π.*
Offenbar gilt der

Satz 9. *Die Projektionen von Hauptgeraden sind zueinander parallele Geraden.*

Definition 9. *Wenn eine Ebene α die Bildebene π in einer regulären Geraden schneidet, dann heissen die Geraden in der Ebene α, welche orthogonal zu ihren Hauptgeraden bezüglich der Bildebene π sind, Neigungsgeraden bezüglich der Bildebene π und werden mit ${}^{\pi}s$ bezeichnet.*

Bemerkung 5. Wenn eine Ebene α die Bildebene in einer isotropen Geraden schneidet, hat es keinen Sinn über die Neigungsgeraden zu sprechen. Wenn die Ebene α singulär ist, dann eine jede ihre Gerade orthogonal zu ihren Hauptgeraden ist und wenn die Ebene α regulär ist (also hyperbolisch), dann sind ihre Hauptgeraden isotrop und also zu sich selbst orthogonal.

Bemerkung 6. Die Neigungsgeraden sind isotrop, wenn die Ebene α singulär ist, im entgegensetzten Falle sind sie regulär. In beiden Fällen gibt es eine einzige Richtung von Neigungsgeraden bezüglich der Bildebene π.

Satz 10. *Sei die Ebene α parallel zur Bildebene π; seien A, B zwei beliebige Punkte der Ebene α und seien A_1, B_1 ihre Projektionen in π; dann sind die Punktepaare (A, B), (A_1, B_1) kongruent.*

Beweis. Wir können voraussetzen, dass die Ebenen π, α verschieden sind. Sei $\mathbf{S}$ der Vektor $A - A_1$; dann der Vektor $B \to B_1$ ist $k\mathbf{S}$, wo $k \in T$. Die Verbindungsgeraden $[A, B]$ und $[A_1, B_1]$ sind zueinander parallel nach Satz 8 (nach Satz 4 gibt es nämlich in π eine zur Geraden $[A, B]$ parallele Gerade und beide müssen sich parallel projizieren); daraus folgt $\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_1 = k'(\mathbf{B} - \mathbf{A})$. Weiter $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} + k\mathbf{S}$, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{S}$. Daraus folgt $\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_1 = \mathbf{B} - \mathbf{A} + (k-1)\mathbf{S}$, oder $(1 - k')(\mathbf{B} - \mathbf{A}) + (k - 1)\mathbf{S} = \mathbf{O}$ und da die Vektoren $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ und $\mathbf{S}$ linear unabhängig sind, muss $k' = k = 1$ werden, oder $\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_1 = \mathbf{B} - \mathbf{A}$.

In weiteren Überlegungen werden wir uns mit einer Orthogonalprojektion beschäftigen, d. h. mit einer solcher Projektion, wo die Projektionsrichtung s zur Bildebene π orthogonal ist. Daraus folgt, dass die Bildebene und auch alle Projektionsgeraden regulär sind.

Satz 11. *Die orthogonale Projektion einer isotropen Geraden ist gerade dann eine isotrope Gerade, wenn sie zur Bildebene π parallel ist; in jedem anderen*

Falle ist die orthogonale Projektion einer isotropen Geraden eine reguläre Gerade. Die orthogonale Projektion einer regulären Geraden kann ein Punkt, eine isotrope, oder eine reguläre Gerade sein.

Beweis. Wenn es isotrope Geraden parallel zur Bildebene gibt, dann ist die Bildebene eine hyperbolische Ebene und die orthogonalen Projektionen der isotropen Geraden sind die isotropen Geraden der Bildebene. Da es in projizierenden Ebenen durch istorope Geraden nur ein System von isotropen Parallelen gibt (diese Ebenen sind nämlich singulär), projiziert sich eine jede andere isotrope Gerade orthogonal in eine reguläre Gerade. Der weitere Teil des Satzes ist evident.

Satz 12. *Die Neigungsgeraden einer Ebene projizieren sich entweder in Punkte (wenn die Ebene orthogonal zur Bildebene ist), oder auf Geraden, die orthogonal zu Projektionen der Hauptgeraden der gegebenen Ebene sind.*

Beweis. Wenn die Ebene α orthogonal zur Bildebene π ist, ist sie nur dann regulär, wenn sie die Bildebene π in einer regulären Geraden schneidet. Dann sind die Neigungsgeraden von der Ebene α regulär und zur Bildebene orthogonal; sie projizieren sich daher in Punkte.

Sei jetzt die Ebene α nicht zur Bildebene orthogonal und ihre Schnittgerade ${}^{\pi}p^{\alpha}$ mit der Bildebene π sei isotrop; dann ist die Ebene α regulär. Die Ebene $\varkappa \perp \pi$ durch die Gerade ${}^{\pi}p^{\alpha}$ ist nämlich singulär. Wenn es durch die Gerade ${}^{\pi}p^{\alpha}$ noch eine weitere singuläre Ebene gäbe, müsste die Gerade ${}^{\pi}p^{\alpha}$ zu allen Geraden des Raumes $\mathfrak{A}$ orthogonal sein, was ein Widerspruch ist. Die Ebene $\varkappa$ ist daher zu allen Ebenen durch die Gerade ${}^{\pi}p^{\alpha}$ orthogonal. Sei jetzt s^{α} eine willkürliche Neigungsgerade der Ebene α und sei $P = [{}^{\pi}p^{\alpha}, s^{\alpha}]$. Die Senkrechte zur Bildebene π durch den Punkt P und die Gerade s^{α} bestimmen die orthogonalprojizierende Ebene σ der Geraden s^{α} und diese Ebene ist zur Spur ${}^{\pi}p^{\alpha}$ orthogonal. Dann ist auch die Schnittgerade $s_1^{\alpha} = [\sigma, \pi]$ orthogonal zur Spur ${}^{\pi}p^{\alpha}$.

Sei die Schnittgerade ${}^{\pi}p^{\alpha}$ von Ebenen π, α regulär; dann sind die Neigungsgeraden regulär, wenn die Ebene α regulär ist und sie sind isotrop, wenn die Ebene singulär ist. Sei s^{α} eine willkürliche Neigungsgerade der Ebene α und sei $P = [s^{\alpha}, {}^{\pi}p^{\alpha}]$. Sei s die Senkrechte durch P zur Bildebene π und sei $\sigma — [s, s^{\alpha}]$. Die Ebene σ ist die orthogonalprojizierende Ebene der Neigungsgeraden und nach dem Kriterium für Orthogonalität von Geraden und Ebenen ist ${}^{\pi}p^{\alpha} \perp \sigma$ und daher ist auch $s_1^{\alpha} = [\sigma, \pi]$ zur ${}^{\pi}p^{\alpha}$ orthogonal.

Satz 13. *Eine Senkrechte zu einer Ebene projiziert sich orthogonal in die Bildebene entweder in einen Punkt (wenn die Ebene mit der Bildebene parallel ist), oder auf eine Senkrechte zu Projektionen der Hauptgeraden der gegebenen Ebene.*

Beweis. Der erste Teil des Satzes ist evident. Sei jetzt die Spur der Ebene α isotrop. Dann kann die Ebene singulär sein, wenn sie orthogonal zur Bildebene ist. In diesem Falle ist die Gerade ${}^{\pi}p^{\alpha}$ gleichzeitig eine Senkrechte zur Ebene α und der Satz ist bewiesen. Wenn die Ebene α regulär ist, ist die Senkrechte zu ihr auch regulär und liegt in einer singulären Ebene durch die Gerade ${}^{\pi}p^{\alpha}$ (anders gehört die Gerade ${}^{\pi}p^{\alpha}$ zum Radikal des Raumes $\mathfrak{A}$, was ein Widerspruch ist). Die Projektion der Senkrechten ist dann die Spur ${}^{\pi}p^{\alpha}$ und die Behauptung ist bewiesen.

Wenn die Spur ${}^{\pi}p^{\alpha}$ regulär und die Ebene α singulär sind, dann ist die isotrope Gerade der Ebene α gleichzeitig orthogonal zu ihr und nach dem Beweis des vorigen Satzes ist ihre Projektion zur Spur ${}^{\pi}p^{\alpha}$ orthogonal. Wenn die Ebene α regulär ist, führt man den Beweis wie im Satz 12.

Satz 14. *Zwei zueinander orthogonale Geraden projizieren sich wieder auf zwei zueinander orthogonale Geraden gerade dann, wenn keine von ihnen zur Bildebene orthogonal und mindestens eine von ihnen mit der Bildebene parallel ist.*

Beweis. Wenn beide gegebenen Geraden parallel zur Bildebene sind, ist die Behauptung des Satzes evident.

Wählen wir jetzt eine willkürliche isotrope Gerade a, die mit der Bildebene nicht parallel ist; ihre orthogonale Projektion (nach Satz 11) ist eine reguläre Gerade a_1. Alle Geraden orthogonal zur Geraden a liegen in einer singulären Ebene σ durch die Gerade a (bzw. sie liegen in einer mit ihr parallelen Ebene); es gibt gerade eine solche Ebene. Nach dem Beweis des Satzes 12 ist die Spur ${}^{\pi}p^{\sigma}$ der Ebene σ orthogonal zur Geraden a_1. Sei $P = [{}^{\pi}p^{\sigma}, a_1]$. Keine von den Geraden der Ebene σ durch den Punkt P (also keine der Senkrechten zur Geraden a), mit Ausnahme der Geraden ${}^{\pi}p^{\sigma}$. projiziert sich auf die Parallele zur ${}^{\pi}p^{\sigma}$ und die Behauptung ist bewiesen.

Sei die Gerade a eine willkürliche reguläre Gerade, die nicht zur Bildebene parallel ist. Wählen wir auf der Geraden a einen willkürlichen Punkt A; dann liegen alle Senkrechten zur Geraden a durch den Punkt A in einer regulären Ebene α, die orthogonal zur Geraden a ist. Nach Satz 12 hat die Hauptgerade ${}^{\pi}h^{\alpha}$ der Ebene α durch den Punkt A die Projektion ${}^{\pi}h_1^{\alpha}$ orthogonal zur a_1. Alle anderen Geraden der Ebene α durch den Punkt A (ohne Rücksicht darauf,ob sie isotrop sind oder nicht) projizieren sich auf reguläre Geraden und daher kann sich keine von ihnen auf die Senkrechte zu a_1 projizieren.

Satz. 15. *Ein Paar von orthogonalen Projektionen (A_1, B_1) von zwei verschiedenen Punkten A, B ist gerade dann mit dem Paar (A, B) kongruent, wenn die Verbindungsgerade $[A, B]$ mit der Bildebene parallel ist.*

Beweis. Wenn die Verbindungsgerade $[A, B]$ mit der Bildebene parallel ist, dann folgt die Behauptung des Satzes aus dem Satz 10. Sei jetzt die Verbindungsgerade $[A, B]$ nicht mit der Bildebene parallel; ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass der Punkt B in der Bildebene liegt und dass $B = O$. Sei $\mathbf{K}$ der Vektor $A \to A_1$; dann $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{K}$ ist. Weiter folgt $\mathbf{A}_1^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AK} + \mathbf{K}^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AK} + (\mathbf{A} + \mathbf{K})\mathbf{K} = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AK} + \mathbf{A}_1\mathbf{K} = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AK}$; da $\mathbf{AK} \neq \mathbf{0}$, ist $\mathbf{A}_1^2 \neq \mathbf{A}^2$ und daher sind die Paare (A, B), (A_1, B_1) nicht kongruent.

Konstruktion. *Sei jedes Element des Körpers T ein Quadrat; dann kann man in der Bildebene ein Paar von Punkten kongruent zum willkürlichen Paar der Punkte konstruieren, deren Verbindungsgerade nicht isotrop ist und deren Projektion keine isotrope Gerade ist.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass die Bildebene π durch einen von gegebenen Punkten geht und diesen Punkt können wir als den Punkt O wählen. Dann benützen wir die Bezeichnung des vorigen Satzes und wir wählen in π einen willkürlichen Vektor $\mathbf{C}$ orthogonal zum Vektor $\mathbf{A}_1$. Ein solcher Vektor existiert, denn der Vektor $\mathbf{A}_1$ ist nicht isotrop. Suchen wir jetzt einen solchen Vektor ${}^{\pi}\mathbf{A}$, dass ${}^{\pi}\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^2$ und ${}^{\pi}\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + k\mathbf{C}$. Dann muss $\mathbf{A}_1^2 + k^2\mathbf{C}^2 = \mathbf{A}^2$ sein, oder $k^2 = (\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}_1^2)/\mathbf{C}^2$. Nach unserer Voraussetzung gibt es ein Element $k \in T$, das diese Gleichung erfüllt. Es gilt auch $k^2\mathbf{C}^2 = \mathbf{K}^2$, denn $\mathbf{A}^2 = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{K})^2 = \mathbf{A}_1 + \mathbf{K}^2$; daraus folgt $\mathbf{K}^2 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A}_1^2 = k^2\mathbf{C}^2$.

Bemerkung 7. Diese Konstruktion führt zur bekannten Konstruktion im euklidischen Raume, wo man die umgeklappte Strecke so bekommt, dass wir auf der Senkrechten zu ihrer Projektion durch A_1 eine Strecke derselben Länge wie die Höhe des Punktes A über die Bildebene konstruieren.

Satz 16. *Bei der Bezeichnung des vorigen Satzes sind die Paare* $(\mathbf{A}, \mathbf{A}_1)$ *und* $({}^{\pi}\mathbf{A}, \mathbf{A}_1)$ *kongruent.*

Beweis. $\mathbf{AA}_1 = (\mathbf{A} + \mathbf{K})\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^2$; ${}^{\pi}\mathbf{AA}_1 = (\mathbf{A}_1 + k\mathbf{C})\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^2$. Da nach vorigem Satze ${}^{\pi}\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^2$ gilt, folgt die Behauptung aus Definition 2.

Bemerkung 8. Dieser Satz führt im euklidischen Raume zur bekannten Konstruktion des Winkels kongruent mit dem Winkel einer Geraden mit der Bildebene.

Satz 17. *Sei die reguläre Ebene α nicht zur Bildebene π orthogonal und sei ihre Schnittgerade mit der Bildebene eine reguläre Gerade ${}^{\pi}p^{\alpha}$; sei jedes Element des Körpers T ein Quadrat; dann gibt es eine solche Isometrie der Ebene α auf die Ebene π (die Bilder von Figuren in der Isometrie $\alpha \to \pi$ werden wir mit einem Kreischen rechts unten bezeichnen), dass die Verbindungsgerade der orthogonalen Projektion eines Punktes der Ebene α und seines Bildes (in der Isometrie) zur Spur ${}^{\pi}p^{\alpha}$ orthogonal ist und dass die Spur ${}^{\pi}p^{\alpha}$ punktweise invariant ist.*

Beweis. Wählen wir in der Ebene α zwei willkürliche verschiedene Punkte A, B so, dass $A, B \notin {}^{\pi}p^{\alpha}$, die Verbindungsgerade $[A, B]$ und auch die Neigungsgerade von α nicht isotrop sind und dass die Neigungsgerade die Spur ${}^{\pi}p^{\alpha}$ schneidet; ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir diesen Schnittpunkt zum Punkt O wählen. Sei s^A die Neigungsgerade von α durch den Punkt

A und sei $P = [s^A, {}^\pi p^\alpha]$. Ebenso sei s^B die Neigungsgerade von α durch den Punkt B und sei $R = [s^B, {}^\pi p^\alpha]$. Bezeichnen wir ${}^s\mathbf{A} = \mathbf{A} - \mathbf{P}$, ${}^s\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{P}$, $\mathbf{K} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}$. Zuerst gilt es, dass die Vektoren ${}^s\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{P}$ zueinander orthogonal sind (nach unserer Voraussetzung gilt ${}^s\mathbf{AP} = \mathbf{AP} - \mathbf{P}^2 = 0$; ${}^s\mathbf{A}_1\mathbf{P} = \mathbf{A}_1\mathbf{P} - \mathbf{P}^2 = \mathbf{A}_1\mathbf{P} - \mathbf{AP} = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A})\mathbf{P} = \mathbf{KP} = 0$). Suchen wir weiter auf der Geraden s_1^A einen solchen Punkt A_0, dass die Punktepaare (A_0, P) und (A, P) kongruent werden. Dafür bezeichnen wir ${}^s\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0 - \mathbf{P}$; dann ${}^s\mathbf{A}_0 = k{}^s\mathbf{A}_1$. Weiter muss ${}^s\mathbf{A}_0^2 = {}^s\mathbf{A}^2$ sein, oder $k^2\,{}^s\mathbf{A}_1^2 = {}^s\mathbf{A}^2$, woraus $k^2 = {}^s\mathbf{A}^2/{}^s\mathbf{A}_1^2$ folgt. Nach Voraussetzung existiert ein solches Element $k \in T$ und $\mathbf{A}_0 = \mathbf{P} + k{}^s\mathbf{A}_1$. Dann gilt, dass auch die Paare (O, A) und (O, A_0) kongruent sind; wirklich: $\mathbf{A}^2 = (\mathbf{P} + {}^s\mathbf{A})^2 = \mathbf{P}^2 + 2\mathbf{P}{}^s\mathbf{A} + {}^s\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 + {}^s\mathbf{A}^2$; $\mathbf{A}_0^2 = (\mathbf{P} + k{}^s\mathbf{A}_1)^2 = \mathbf{P}^2 + 2k\mathbf{P}{}^s\mathbf{A}_1 + k^2\,{}^s\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 + k^2\,{}^s\mathbf{A}_1^2 = \mathbf{P}^2 + {}^s\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^2$. Sei $\mathbf{B} = c\mathbf{A}$; dann, da $\mathbf{A} = \mathbf{P} + {}^s\mathbf{A}$, ist $\mathbf{B} = c\mathbf{P} + c{}^s\mathbf{A}_1$, oder $\mathbf{R} = c\mathbf{P}$. Ähnlich setzen wir fest, dass ${}^s\mathbf{B} = c{}^s\mathbf{A}$, ${}^s\mathbf{B}_1 = c{}^s\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_0 = c\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_1 = c\mathbf{A}_1$, woraus $(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0)\mathbf{R} = 0$ folgt. Wählen wir jetzt einen beliebigen Punkt ${}^1A$ auf der Geraden s^A und sei ${}^l\mathbf{A} = \mathbf{P} + l{}^s\mathbf{A}$; dann ${}^l\mathbf{A}_0 = \mathbf{P} + l{}^s\mathbf{A}$. Wenn ein solcher Punkt ${}^iA$ existiert, dass die Verbindungsgerade $[{}^iA, O]$ isotrop ist, dann ist auch die Verbindungsgerade $[{}^iA_0, O]$ isotrop. Für den Punkt ${}^iA$ muss nämlich ${}^i\mathbf{A}^2 = (\mathbf{P} + i{}^s\mathbf{A})^2 = \mathbf{P}^2 + i^{2s}\mathbf{A}^2 = 0$ gelten. Dann aber gilt ${}^i\mathbf{A}_0^2 = (\mathbf{P} + i{}^s\mathbf{A}_0)^2 = \mathbf{P}^2 + i^{2s}\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 + i^{2s}\mathbf{A}^2 = 0$. In unserer Isometrie entsprechen einander also isotrope Geraden.

Bemerkung 9. Mit Hilfe dieser Sätze kann man im Falle aller Paare der Grundfiguren festsetzen, ob sie kongruent sind oder nicht.

Bemerkung 10. Da eine einzige Projektion zur Rekonstruktion der Figuren nicht genügt, muss mann noch eine Projektion, oder irgendwelche Analogie der kotierten Projektion einführen. Da wir die Anordnung des Körpers T nicht voraussetzen, können wir nicht den Raum $\mathfrak{A}$ in zwei Halbräume teilen. Doch können wir im Raume $\mathfrak{B}$ einen von Null verschiedenen willkürlichen, zur Bildebene π orthogonalen, Vektor $\mathbf{K}$ wählen. Dann können wir jeden Punkt $A \in \mathfrak{A}$ durch seine orthogonale Projektion A_1 und ein Element ${}^Ak \in T$ charakterisieren, wobei der Vektor ${}^Ak\mathbf{K}$ den Punkt A in den Punkt A_1 transformiert.

LITERATUR

[1] Lenz H., *Grundlagen der Elementarmathematik*, Berlin 1961.

[2] Artin E., *Geometric Algebra*, New York 1957.

[3] Pickert G., *Analytische Geometrie*, Leipzig 1961.

Eingegangen am 16. 10. 1967.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebnej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej,
Bratislava