Alexander Rosa

# Использование графов для решения задачи Киркмана

*Matematicko-fyzikálny časopis*, Vol. 13 (1963), No. 2, 105--113

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126498

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 13, 2, 1963

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КИРКМАНА

АЛЕКСАНДЕР РОСА (Alexander Rosa), Братислава

**Формулировка задачи.** Пусть задано $m = 6n + 3$ отличных друг от друга элементов ($n$ — натуральное число); требуется образовать таблицу с $3n + 1$ строками и $2n + 1$ тройками в каждой строке таким образом, чтобы каждый из $m$ элементов находился в каждой строке один и только один раз и чтобы каждая пара отличных друг от друга элементов, образованная из данных $m$ элементов, находилась в одной и только в одной из $(3n + 1) . (2n + 1)$ троек таблицы.

Таблицу, удовлетворяющую указанным условиям, назовем *решением* задачи (для данного $m$).

Для $n = 1 (m = 9)$ решение находится легко. Для $n = 2 (m = 15)$ задача называется задачей Киркмана (или также задачей о 15 ученицах, см., например, [1]). Конкретное решение этой задачи было уже дано многими авторами. Мы будем также заниматься указанной задачей с следующей точки зрения: мы установим число „неизоморфных" решений и дадим классификацию всевозможных решений.

Два решения одинаковы, если одно из них может быть получено из другого путем различного размещения строк и целых троек в строках. Два решения назовем изоморфными, если существует такое переименование (перенумерация) элементов одного из них, что после его осуществления оба решения одинаковы. В заключение нашей работы приводятся неизоморфные решения нашей задачи.

Как говорится в [1], в работе [2] предложена классификация всех возможных решений задачи Киркмана в зависимости от принадлежности к одному из трех классов, определенных следующим образом: *I* класс (соответственно, *II* и *III* класс) решений — это такие решения, в которых можно указать в точности 8 (соответственно, 7 и 6) таких элементов, что в данном решении нет никакой тройки, образованной из этих элементов. Покажем позже, что не существует никакого решения *II* или *III* класса (все решения принадлежат *I* классу) и нами будет предложен другой, более подходящий принцип классификации всевозможных решений.

*

Обратимся теперь к теории графов.

Пусть задан полный граф с $m = 6n + 3$ вершинами. Требуется найти разложение этого полного графа на $3n + 1$ квадратичных множителей, каждый из которых состоит из $2n + 1$ треугольников.

Легко убедиться, что эта задача теории графов эквивалентна задаче, сформулированной в начале. Достаточно поставить в соответствие вершинам полного графа заданные элементы, ребрам полного графа соответствующие пары, а треугольникам графа соответствующие тройки элементов.

Для нашего случая ($n = 2$) примет задача следующий вид: Найти разложение (соответственно, найти все неизоморфные разложения) полного графа с 15 вершинами (обозначим его через $G_{15}$) на 7 квадратичных множителей, каждый из которых состоит из 5 треугольников.

*

Обозначим вершины нашего полного графа через $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, $C_1$, $C_2$, $C_3$, $D_1$, $D_2$, $D_3$, $E_1$, $E_2$, $E_3$. Выберем в графе один произвольный квадратичный множитель $K_i$, состоящий из треугольников $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$, $E_1E_2E_3$. Граф, получающийся из графа $G_{15}$ после устранения ребер этих треугольников, обозначим через $G'_{15}$. Вместо полного графа $G_{15}$ будем теперь рассматривать новый граф со „стянутыми" вершинами, состоящий из полного графа с 5 вершинами $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, наложенного три раза на себя. Обозначим такой граф через $G_5$ (очевидно, граф $G_5$ получается из графа $G'_{15}$ таким образом, что вершины каждого из треугольников множителя $K_i$ совпадут и сольются в единственную вершину).

Квадратичные множители графа $G'_{15}$, состоящие из треугольников, могут быть двух видов (не учитывая обозначения вершин):

1. $ABC$, $A'B'C'$, $A''DE$, $B''D'E'$, $C''D''E''$.
2. $ABC$, $B'C'D$, $C''D'E$, $D''E'A'$, $E''A''B''$,

где $A$, $A'$, $A''$ — некоторая перестановка вершин $A_1$, $A_2$, $A_3$, аналогично $B$, $B'$, $B''$ и т. д.

Множитель 1-ый и 2-ой будем называть соответственно множителем 1-ого и 2-ого типа (по отношению к выбранному множителю $K_i$).

Квадратичные множители графа $G_5$ могут быть двух видов: 1. треугольник и двухугольник; 2. пятиугольник (эти множители мы в дальнейшем будем обозначать 1. $ABC + DE$; 2. $ABCDE$, или же будем их называть множителями соответственно 1-ого и 2-ого типа).

Каждому квадратичному множителю графа $G'_{15}$ 1-ого типа (2-ого типа) поставим в соответствие соответствующий квадратичный множитель графа $G_5$ 1-ого типа (2-ого типа).

Примечание. Чтобы исключить какое-либо недоразумение, опишем более детально, как осуществляется это сопоставление: в квадратичном множителе графа $G'_{15}$ опускаются индексы. При этом в каждом его треугольнике получатся, как сказано выше, только разноименные вершины. Если у нас получился множитель 1-го типа (например, $ABD$, $ACD$, $ADE$, $BCE$, $BCE$), то найдем в нем два одинаковых треугольника ($BCE$, $BCE$) и данным трем совпавшим вершинам отнесем вершины треугольника квадратичного множителя 1-го типа графа $G_5$, оставшимся двум совпавшим вершинам — вершины двухугольника его ($BCE$ + + $AD$). Если у нас получился множитель 2-го типа (например, $ABC$, $ABD$, $ACE$, $BDE$, $CDE$), то треугольники его упорядочиваем так, чтобы последние две вершины каждого треугольника были первыми двумя вершинами следующего за ним ($ABD$, $BDE$, $DEC$, $ECA$, $CAB$), и взяв после этого по порядку первые вершины треугольников данного множителя, отнесем им в том же порядке взятые вершины квадратичного множителя 2-ого типа графа $G_5$ ($ABDEC$).

Допустим, что мы нашли какое-нибудь разложение графа $G'_{15}$ на 6 квадратичных множителей, состоящих из треугольников. Тогда этому разложению будет однозначно поставлено в соответствие разложение графа $G_5$ на 6 квадратичных множителей.

Разложению графа $G_5$ может соответствовать несколько, а может и не соответствовать никакое разложение графа $G'_{15}$. Следовательно, если найти все разложения (неизоморфные) графа $G_5$ на квадратичные множители и все соответствующие им разложения графа $G'_{15}$ на квадратичные множители, состоящие из треугольников, мы решим таким образом полностью нашу задачу (за исключением вопроса об изоморфизме полученных разложений), если присоединим к ним еще множитель $K_i$.

Итак наши действия будут такими:

Найдем сначала все неизоморфные разложения графа $G_5$ на квадратичные множители. После этого найдем все разложения графа $G'_{15}$, соответствующие разложениям графа $G_5$. Присоединим к каждому из них еще множитель $K_i$ и получим так разложения графа $G_{15}$. Из последних исключим еще изоморфные, а остаток будет представлять все неизоморфные разложения графа $G_{15}$ на квадратичные множители, состоящие из треугольников.

Допустим, что мы уже нашли все разложения графа $G_5$ на квадратичные множители. Для каждого из этих разложений мы напишем соответствующее „разложение“ графа $G'_{15}$ (назовем его общим разложением) на квадратичные множители, состоящие из треугольников, такое, что в качестве вершин отдельных треугольников можно взять всегда одну вершину из трех вершин (а именно, из тех трех вершин, которые являются вершинами одного и того же треугольника в множителе $K_i$). Каждому разложению графа $G_5$ соответствует одно и только одно общее разложение графа $G'_{15}$. Очевидно, общее разложение графа $G'_{15}$ включает все существующие разложения графа $G'_{15}$ на квадратичные множители, состоящие из треугольников (значит, может случиться, что оно не включает никакого разложения). Итак, найдем все такие разложения графа $G'_{15}$ для каждого общего разложения графа $G'_{15}$ (число таких разложений в точности равно числу разложений графа $G_5$) и получим, таким образом, множество всех разложений графа $G'_{15}$ (не учитывая изоморфизма). Остается уже только исключить из него изоморфные разложения.

*

Пусть дано разложение графа $G_{15}$ на квадратичные множители $K_1, K_2, \ldots, K_7$, состоящие из треугольников. Возьмем произвольный множитель $K_i$ $(i = 1, \ldots, 7)$. Каждый из множителей $K_1, \ldots, K_{i-1}, K_{i+1}, \ldots, K_7$ будет тогда множителем 1-ого или 2-ого типа (по отношению к множителю $K_i$). Значит, каждому разложению графа $G_{15}$ может быть поставлена в соответствие матрица с 7 строками и 7 столбцами, где в $j$-том столбце и $i$-той строке $(i \neq j)$ находится число 1 или 2 в зависимости от того, будет ли множитель $K_j$ по отношению к множителю $K_i$ множителем 1-ого или 2-ого типа (безразлично, что лежит на главной диагонали — скажем, нули).

Легко установить, что справедливо: ($\alpha$) Если множитель $K_i$ по отношению к множителю $K_j$ — типа 1 (соответственно, типа 2), то и множитель $K_j$ будет по отношению к множителю $K_i$ множителем типа 1 (соответственно, типа 2). В самом деле, пусть множитель $K_i$ по отношению к множителю $K_j$ — типа 1 (индексы пропускаем, так как они здесь не играют никакой роли):

$$\begin{array}{llllll}
K_j: & AAA & BBB & CCC & DDD & EEE \\
K_i: & ABC & ABC & ADE & BDE & CDE \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
K_i: & XXX & YYY & ZZZ & UUU & VVV \\
K_j: & XYZ & XYU & XYV & ZUV & ZUV
\end{array}$$

Видно, что множитель $K_j$ является по отношению к множителю $K_i$ множителем 1-ого типа. Аналогично можно показать справедливость утверждения для множителей 2-ого типа. Значит, матрица, соответствующая разложению графа $G_{15}$ на квадратичные множители, состоящие из треугольников, симметрична.

Поскольку отдельные множители данного разложения можно пронумеровать произвольным образом, то как различные мы будем, разумеется, рассматривать только такие матрицы, которые не могут быть отождествлены путем перестановки строк и соответствующих столбцов. В противном случае мы будем говорить об эквивалентных матрицах.

Ясно, что разложения, которым соответствуют различные матрицы, неизоморфны. Значит, изоморфные разложения можно найти только среди таких разложений, которым соответствуют эквивалентные матрицы. Назовем еще строку матрицы, в которой имеется $i$ единиц ($i = 0, 1, \ldots, 6$), строкой $i$-того вида.

Два разложения графа $G_{15}$ на квадратичные множители назовем изоморфными, если существует такая перенумерация вершин графа $G_{15}$, что после ее осуществления одно из разложений перейдет в другое из первоначальных разложений.

Число перенумераций, которые мы должны рассмотреть, в значительной мере уменьшается следующим очевидным утверждением:

($\beta$) Названная перенумерация вершин обладает тем свойством, что квадратичный множитель, которому соответствует строка $i$-того вида, перейдет в квадратичный множитель, которому соответствует строка $i$-того вида (в соответствующих матрицах).

*

Мы описали в общем виде, как дойти до получения всех неизоморфных разложений графа $G_{15}$ на квадратичные множители, состоящие из треугольников.

Перейдем к конкретным результатам. Эта часть работы требовала наибольшей затраты времени.

Всех неизоморфных разложений графа $G_5$ имеется следующее число:

| | |
|---|---|
| а) 6 множителей 1-ого типа | — 1 разложение |
| б) 5 множителей 1-ого типа и 1 множитель 2-ого типа | — 0 |
| в) 4 множителя 1-ого типа и 2 мнжоителя 2-ого типа | — 2 разложения |
| г) 3 множителя 1-ого типа и 3 множителя 2-ого типа | — 4 разложения |
| д) 2 множителя 1-ого типа и 4 множителя 2-ого типа | — 3 разложения |
| е) 1 множитель 1-ого типа и 5 множителей 2-ого типа | — 4 разложения |
| ж) 6 множителей 2-ого типа | — 4 разложения |

Итого мы получили 18 разложений графа $G_5$ на квадратичные множители. Им соответствовало 18 общих разложений графа $G'_{15}$. Среди последних было всего 3 таких, что содержали хотя бы одно разложение графа $G'_{15}$ на квадратичные множители, состоящие из треугольников. К каждому из полученных разложений графа $G'_{15}$ мы присоединили еще множитель $K_i$; все полученные таким образом разложения графа $G_{15}$ на квадратичные множители, состоящие из треугольников, можно было разбить на четыре группы в зависимости от того, какая из четырех матриц $A$, $B$, $C$, $D$ была им поставлена в соответствие:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$C = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad D = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$$

Значит, мы имеем уже по меньшей мере четыре неизоморфных разложения. Далее, на основании утверждения ($\beta$) мы установили, что каждой из матриц $A, B, C$ соответствуют два неизоморфных разложения (матрице $D$ только одно), так что в сумме у нас имеется 7 неизоморфных разложений графа $G_{15}$ на квадратичные множители, состоящие из треугольников.

Но мы говорили в начале, что задача теории графов, найти все разложения полного графа с 15 вершинами $G_{15}$ на квадратичные множители, состоящие из треугольников, эквивалентна задаче найти все неизоморфные решения задачи Киркмана. Как пишет Аренс в [1], в [3] показано, что число неизоморфных решений задачи Киркмана может быть сведено к 7, что совпадает с нашим результатом. Но мы получаем, кроме того, подходящий принцип классифика ции решений: поскольку каждому решению задачи Киркмана соответствует некоторое разложение графа $G_{15}$, а последнему можно поставить в соответствие матрицу, то и каждому решению можно поставить в соответствие матрицу. Итак, каждому из всевозможных решений будет поставлена в соответствие одна из матриц $A$, $B$, $C$, $D$ (какая именно, можно установить, например, по числу строк, содержащих одни только единицы, или одни только двойки), а в случае, что это будет одна из матриц $A$, $B$ или $C$, то относительно легко установить, с каким из двух решений ($A1$—$A2$, $B1$—$B2$, $C1$—$C2$) данное решение изоморфно (если это $D$, то не нужно уже ничего устанавливать).

Покажем еще, что все наши решения являются решениями $I$ класса согласно классификационному принципу, указанному в начале, т. е. в каждом из этих решений можно указать 8 элементов, которые не образуют ни одной тройки:

$A1$: 1, 2, 4, 5, 8, 9, 11, 12.
$A2$: 1, 2, 4, 5, 8, 9, 11, 12.

$B1$: 2, 3, 4, 6, 7, 8, 13, 14.
$B2$: 1, 2, 4, 6, 8, 9, 13, 15.
$C1$: 2, 3, 4, 6, 7, 8, 13, 14.
$C2$: 1, 2, 4, 6, 8, 9, 13, 15.
$D$: 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12.

Итак, задача Киркмана имеет 7 следующих неизоморфных решений (вместо элементов пишем числа от 1 до 15):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A1. | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 | 10 11 12 | 13 14 15 |
| | 1 4 7 | 2 5 10 | 3 6 13 | 8 11 14 | 9 12 15 |
| | 1 8 10 | 2 6 9 | 3 7 14 | 4 11 15 | 5 12 13 |
| | 1 6 11 | 2 7 12 | 3 10 15 | 4 8 13 | 5 9 14 |
| | 1 12 14 | 2 11 13 | 3 5 8 | 4 9 10 | 6 7 15 |
| | 1 9 13 | 2 8 15 | 3 4 12 | 5 7 11 | 6 10 14 |
| | 1 5 15 | 2 4 14 | 3 9 11 | 6 8 12 | 7 10 13 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A2. | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 | 10 11 12 | 13 14 15 |
| | 1 4 7 | 2 5 10 | 3 6 13 | 8 11 14 | 9 12 15 |
| | 1 9 13 | 2 7 12 | 3 5 8 | 4 11 15 | 6 10 14 |
| | 1 8 10 | 2 11 13 | 3 4 12 | 5 9 14 | 6 7 15 |
| | 1 12 14 | 2 6 9 | 3 10 15 | 5 7 11 | 4 8 13 |
| | 1 6 11 | 2 8 15 | 3 7 14 | 4 9 10 | 5 12 13 |
| | 1 5 15 | 2 4 14 | 3 9 11 | 6 8 12 | 7 10 13 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| B1. | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 | 10 11 12 | 13 14 15 |
| | 1 4 7 | 2 5 13 | 3 10 14 | 6 8 11 | 9 12 15 |
| | 1 5 12 | 2 9 14 | 3 11 13 | 4 8 10 | 6 7 15 |
| | 1 11 15 | 2 4 12 | 3 6 9 | 5 8 14 | 7 10 13 |
| | 1 8 13 | 2 6 10 | 3 4 15 | 5 9 11 | 7 12 14 |
| | 1 9 10 | 2 8 15 | 3 5 7 | 4 11 14 | 6 12 13 |
| | 1 6 14 | 2 7 11 | 3 8 12 | 4 9 13 | 5 10 15 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| B2. | 1 2 3 | 4 5 6 | 7 8 9 | 10 11 12 | 13 14 15 |
| | 1 4 7 | 2 5 13 | 3 10 14 | 6 8 11 | 9 12 15 |
| | 1 11 15 | 2 6 12 | 3 8 13 | 5 7 10 | 4 9 14 |
| | 1 10 13 | 2 4 11 | 3 6 9 | 5 8 15 | 7 12 14 |
| | 1 6 14 | 2 7 15 | 3 5 12 | 4 8 10 | 9 11 13 |
| | 1 5 9 | 2 8 14 | 3 7 11 | 4 12 13 | 6 10 15 |
| | 1 8 12 | 2 9 10 | 3 4 15 | 5 11 14 | 6 7 13 |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C1. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| | 1 | 4 | 7 | 2 | 5 | 13 | 3 | 10 | 14 | 6 | 8 | 11 | 9 | 12 | 15 |
| | 1 | 5 | 12 | 2 | 9 | 14 | 3 | 11 | 13 | 4 | 8 | 10 | 6 | 7 | 15 |
| | 1 | 10 | 15 | 2 | 4 | 11 | 3 | 6 | 9 | 5 | 8 | 14 | 7 | 12 | 13 |
| | 1 | 8 | 13 | 2 | 6 | 12 | 3 | 4 | 15 | 5 | 9 | 10 | 7 | 11 | 14 |
| | 1 | 9 | 11 | 2 | 8 | 15 | 3 | 5 | 7 | 4 | 12 | 14 | 6 | 10 | 13 |
| | 1 | 6 | 14 | 2 | 7 | 10 | 3 | 8 | 12 | 4 | 9 | 13 | 5 | 11 | 15 |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C2. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| | 1 | 4 | 7 | 2 | 5 | 13 | 3 | 10 | 14 | 6 | 8 | 11 | 9 | 12 | 15 |
| | 1 | 11 | 15 | 2 | 6 | 12 | 3 | 8 | 13 | 5 | 7 | 10 | 4 | 9 | 14 |
| | 1 | 12 | 13 | 2 | 4 | 10 | 3 | 6 | 9 | 5 | 8 | 15 | 7 | 11 | 14 |
| | 1 | 6 | 14 | 2 | 7 | 15 | 3 | 5 | 11 | 4 | 8 | 12 | 9 | 10 | 13 |
| | 1 | 5 | 9 | 2 | 8 | 14 | 3 | 7 | 12 | 4 | 11 | 13 | 6 | 10 | 15 |
| | 1 | 8 | 10 | 2 | 9 | 11 | 3 | 4 | 15 | 5 | 12 | 14 | 6 | 7 | 13 |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| | 1 | 4 | 12 | 2 | 7 | 10 | 3 | 8 | 14 | 5 | 9 | 13 | 6 | 11 | 15 |
| | 1 | 9 | 15 | 2 | 6 | 13 | 3 | 4 | 10 | 5 | 8 | 12 | 7 | 11 | 14 |
| | 1 | 6 | 7 | 2 | 5 | 11 | 3 | 12 | 15 | 4 | 8 | 13 | 9 | 10 | 14 |
| | 1 | 5 | 14 | 2 | 9 | 12 | 3 | 11 | 13 | 4 | 7 | 15 | 6 | 8 | 10 |
| | 1 | 8 | 11 | 2 | 4 | 14 | 3 | 6 | 9 | 5 | 10 | 15 | 7 | 12 | 13 |
| | 1 | 10 | 13 | 2 | 8 | 15 | 3 | 5 | 7 | 4 | 9 | 11 | 6 | 12 | 14 |

Так, например, решение в [1], стр. 108, изоморфно с решением A1, равно как и решение в [4], стр. 111, решение же в [5], стр. 36, изоморфно с решением A2.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Ahrens W., *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, Bd. II, Leipzig 1918.

[2] Cayley A., *On a Tactical Theorem relating to the Triads of Fifteen Things*, Phil. Mag. (4) XXV (1863), 59—61, цит. по [1].

[3] Mulder P., *Kirkman-systemen*, Dissertation Groningen 1917, цит. по [1].

[4] Доморяд, А. П., *Математические игры и развлечения*, Москва 1961.

[5] Berge C., *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris 1958.


Поступило 25. 6. 1962 г.

*ČSAV, Kabinet matematiky Slovenskej akadémie vied v Bratislave*

# THE USING OF GRAPHS FOR THE SOLUTION OF KIRKMAN'S PROBLEM

Alexander Rosa

Summary

The paper formulates the well-known Kirkman's problem by means of concepts taken from the theory of graphs as follows: Find the decomposition of the complete graph with $m$ vertices into $^1/_2(m\text{-}1)$ quadratic factors, each of them consisting of $^1/_3m$ triangles [$m \equiv 3 \pmod 6$]. By the new method all solutions of the problem formulated in this way are derived and classified for $m = 15$.