Imrich Abrhan

O (H, T)-ideáloch direktného súčinu pologrúp

Matematický časopis, Vol. 21 (1971), No. 3, 199--213

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126491`

Matematický časopis 21 (1971), No. 3

O (H, T)-IDEÁLOCH DIREKTNÉHO SÚČINU POLOGRÚP

IMRICH ABRHAN, Bratislava

Obsahom článku je vyšetrovanie niektorých vlastností (H, T)-ideálov direktného súčinu pologrup. Zovšeobecňujú sa tým niektoré výsledky prác [2], [5] a [7].

V nasledujúcom S je pologrupa a H, T jej podpologrupy z ktorých aspoň jedna je neprázdna množina (prázdnu množinu považujeme za podpologrupu).

Nech A, B sú podmnožiny pologrupy S. Definujeme (pozri [3]):

Ak $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, ptom $AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$.
Ak $A = \emptyset$, potom $AB = B$. Ak $B = \emptyset$, potom $AB = A$.

R. Hrmová v práci [3] zovšeobecňuje T-ideaál v S (pozri [4], napr. [1]) nasledovne.

Nech $B_1 \subseteq S$, $B_2 \subseteq S$. Nech $I(B_1, B_2) = \{A : A \subseteq S,\ B_1A \subseteq A,\ AB_2 \subseteq A\}$. Prvok $A \in I(B_1, B_2)$ nazývame (B_1, B_2)-ideálom v S.

$I(B_1, B_2) = I(H, T)$, kde $H = B_1 \cup B_1^2 \cup B_1^3, \ldots, T = B_2 \cup B_2^2 \cup B_2^3 \ldots$, (pozri [3]).

Nech H, T sú podpologrupy pologrupy S. Prvok $N \in I(H, T)$ nazývame minimálnym (H, T)-ideálom v S, ak neexistuje podmnožina N' v S taká, že $N' \subsetneqq N$ a $N' \in I(H, T)$. Množinu všetkých minimálnych (H, T)-ideálov v S budeme označovať $I_m(H, T)$ (pozri [3]).

Hlavným (H, T)-ideálom v S vytvoreným prvkom $a \in S$ budeme nazývať (H, T)-ideál tvaru $a \cup Ha \cup aT \cup HaT$ a označovať ${}_H(a)_T$ (pozri [3]). V prípade $T = \emptyset$ miesto ${}_H(a)_\emptyset$ budeme písať ${}_H(a)$.

Nech pre $a \in S$, $b \in S$ je ${}_H(a)_T = {}_H(b)_T$. Potom budeme písať $a, b \in {}_H\mathscr{I}_T$ a hovoriť, že prvky a, b sú ${}_H\mathscr{I}_T$-ekvivalentné (pozri [3]).

Triedu prislúchajúcu k ekvivalencii ${}_H\mathscr{I}_T$ na S budeme označovať ${}_HF_T$. Ak trieda ${}_HF_T$ obsahuje prvok $a \in S$, potom budeme písať ${}_HF_T^a$. V prípade $T = \emptyset$ miesto ${}_HF_0^a$ budeme písať ${}_HF^a$.

Podmnožinu S' pologrupy S budeme nazývať ${}_H\mathscr{I}_T$-jednoduchou, ak ekvivalencia ${}_H\mathscr{I}_T$ vytvára na S' práve jednu triedu (pozri [3]).

Pologrupa S je ${}_H\mathscr{I}_T$-jednoduchá vtedy a len vtedy, ak neobsahuje (H, T)-

-ideál rôzny od S (pozri [3]). To znamená, že pologrupa S je ${}_H\mathcal{I}_T$-jednoduchá vtedy a len vtedy, ak ${}_HF_T^x = S$ pre každé $x \in S$.

Poznámka 1,1. Nech H, T sú podpologrupy pologrupy S. Uvedieme niektoré vlastnosti tried prislúchajúcich k ekvivalencii ${}_H\mathcal{I}_T$ na S.

(a) ${}_H\mathcal{I}_T$-jednoduchá podmnožina N pologrupy S je z $I(H, T)$ vtedy a len vtedy, ak $N \in I_m(H, T)$ (pozri [3]).

(b) $a \in HaT$ vtedy a len vtedy, ak ${}_HF_T^a \subseteq HxT$ pre každý prvok $x \in {}_HF_T^a$, kde $a \in S$.

Nech I je množina ktorá obsahuje aspoň dva prvky a nech $\{S_i\}$, $i \in I$ je ľubovoľný systém pologrup. Množinu všetkých funkcií ξ, definovaných na I tak, že $\xi(i) \in S_i$ označme S a definujme na nej operáciu násobenia nasledujúcim spôsobom: ak α, β sú ľubovoľné prvky z S, potom ich súčin $\gamma = \alpha\beta$ definujeme tak, že položíme $\gamma(i) = \alpha(i)\beta(i)$ pre každé $i \in I$. Množina S s takto definovanou operáciou násobenia je pologrupou, ktorú budeme nazývať direktným súčinom (v obvyklom zmysle) pologrup S_i, $i \in I$ a označovať $S = \prod_{i \in I} S_i$.

1

Ak pologrupa S obsahuje nulový prvok, potom v časti 1 budeme predpokladať, že žiadna z podpologrup H, T pologrupy S neobsahuje nulový prvok pologrupy S.

Lema 1,1. *Nech H, T sú podpologrupy pologrupy S.*

(a) *$N \in I(H, T)$ je z $I_m(H, T)$ vtedy a len vtedy, ak $N = HaT$ pre každé $a \in N$,*

(b) ${}_HF_T^a = HaT$ vtedy a len vtedy, ak ${}_HF_T^a \in I_m(H, T)$.

Dôkaz. (a) Nech $N \in {}_mI(H, T)$, potom $N = HaT$ pre každé $a \in N$ (pozri [3]).

Nech $N \in I(H, T)$ splňuje podmienku $HaT = N$. Predpokladajme, že $N \notin I_m(H, T)$. To znamená, že existuje $N' \in I(H, T)$ taký, že $N' \subsetneqq N$. Potom pre každé $a' \in N'$ platí $Ha'T \subseteq N'$ a súčasne $Ha'T = N (a' \in N' \subsetneqq N)$. Z toho vyplýva, že $N \subseteq N'$. To je spor s tým, že $N' \subsetneqq N$.

(b) Tvrdenie (b) je zrejmé.

Veta 1,1. *Nech H_i, T_i pre každé $i \in I$ sú podpologrupy pologrupy S_i a $H = \prod_{i \in I} H_i$, $T = \prod_{i \in I} T_i$, $S = \prod_{i \in I} S_i$. Potom platí:*

(a) ${}_HF_T^\alpha \subseteq H\alpha T$ *vtedy a len vtedy, ak* ${}_{H_i}F_{T_i}^{a_i} \subseteq H_ia_iT_i$, kde $\alpha \in S$ a $a_i = \alpha(i)$ *pre každé* $i \in I$,

(b) ${}_HF_T^\alpha = \prod_{i \in I} {}_{H_i}F_{T_i}^{a_i}$, *ak* ${}_HF_T^\alpha \subseteq H\alpha T$, *kde* $\alpha \in S$ a $a_i = \alpha(i)$ *pre každé* $i \in I$.

Dôkaz. (a) Tvrdenie (a) vyplýva z toho, že ${}_HF_T^\alpha \subseteq H\alpha T$ vtedy a len vtedy, ak $\alpha \in H\alpha T = (\prod_{i \in I} H_i)\alpha(\prod_{i \in I} T_i) = \prod_{i \in I} (H_ia_iT_i)$, kde $a_i = \alpha(i)$ pre každé $i \in I$ (pozri poznámku 1,1).

(b) Nech ${}_HF_T^\alpha \subseteq H\alpha T$, potom $\alpha \in H\alpha T$.

I. Nech ξ je ľubovoľný prvok z ${}_HF_T^\alpha$ a $\alpha \in H\alpha T$, potom z toho podľa poznámky 1,1 a po úprave dostaneme

$$(\prod_{i\in I} H_i)\xi(\prod_{i\in I} T_i) = (\prod_{i\in I} H_i)\alpha(\prod_{i\in I} T_i),\ \prod_{i\in I} (H_i x_i T_i) = \prod_{i\in I}(H_i a_i T_i),$$

kde $a_i = \alpha(i)$, $x_i = \xi(i)$ pre každé $i \in I$. To znamená, že $a_i \in H_i a_i T_i$, $x_i \in \in H_i x_i T_i = H_i a_i T_i$ pre každé $i \in I$. Z toho dostaneme, že ${}_{H_i}(x_i)_{T_i} = {}_{H_i}(a_i)_{T_i}$ t. j. $x_i \in {}_{H_i}F_{T_i}^{a_i}$ pre každé $i \in I$. Z toho vyplýva, že $\xi \in \prod_{i\in I} {}_{H_i}F_{T_i}^{a_i}$.

II. Nech ξ je ľubovoľný prvok z $\prod_{i\in I} {}_{H_i}F_{T_i}^{a_i}$ a $\alpha \in H\alpha T$, potom $a_i \in H_i a_i T_i$ a podľa poznámky 1,1 $x_i \in H_i a_i T_i = H_i a_i T_i$, kde $a_i = \alpha(i)$, $x_i = \xi(i)$ pre každé $i \in I$. To znamená, že

$$\prod_{i\in I} (H_i x_i T_i) = \prod_{i\in I} (H_i a_i T_i).$$

Teda $\xi \in (\prod_{i\in I} H_i)\xi(\prod_{i\in I} T_i) = (\prod_{i\in I} H_i)\alpha(\prod_{i\in I} T_i)$, a $\alpha \in H\alpha T$. Z toho vyplýva ${}_H(\xi)_T = {}_H(\alpha)_T$ a z poslednej rovnosti $\xi \in {}_HF_T^\alpha$.

Na príklade ukážeme, že nemusí platiť ${}_HF_T^\alpha = \prod_{i\in I} {}_{H_i}F_{T_i}^{a_i}$, ak ${}_HF_T^\alpha \nsubseteq H\alpha T$, kde $\alpha \in S$, $\alpha(i) = a_i$, $i \in I$.

Príklad 1. Nech $S' = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$. Násobenie v S' je dané multiplikatívnou tabuľkou:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_1	a_1	a_2	a_1	a_2	a_5	a_6	a_6	a_5
a_2	a_2	a_1	a_2	a_1	a_6	a_5	a_5	a_6
a_3	a_3	a_4	a_3	a_4	a_8	a_7	a_7	a_8
a_4	a_4	a_3	a_4	a_3	a_7	a_8	a_8	a_7
a_5	a_1	a_2	a_2	a_1	a_5	a_6	a_5	a_6
a_6	a_2	a_1	a_1	a_2	a_6	a_5	a_6	a_5
a_7	a_4	a_3	a_3	a_4	a_7	a_8	a_7	a_8
a_8	a_3	a_4	a_4	a_3	a_8	a_7	a_8	a_7

Zrejme $H_1 = \{a_1, a_2\}$, $T_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ sú podpologrupy pologrupy S', Potom ${}_{H_1}F_{T_1}^{a_1} = \{a_1, a_2\}$, ${}_{H_1}F_{T_1}^{a_3} = \{a_3, a_4\}$, ${}_{H_1}F_{T_1}^{a_5} = \{a_5, a_6\}$, ${}_{H_1}F_{T_1}^{a_7} = \{a_7\}$. ${}_{H_1}F_{T_1}^{a_8} = \{a_8\}$.

Položme $S_1 = S_2 = S'$. Potom $H = H_1 \times H_1$, $T = T_1 \times T_1$ sú podpologrupy pologrupy $S = S_1 \times S_2$ a $H(a_3, a_5)\mathrm{T} = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2)\}$. Pretože ${}_H(a_4, a_5)_T \neq {}_H(a_3, a_5)_T$, potom ${}_HF_T^{(a_3,a_5)} \neq ({}_{H_1}F_{T_1}^{a_3}) \times ({}_{H_1}F_{T_1}^{a_5})$.

Veta 1,2. *Nech H_i, T_i pre každé $i \in I$ sú podpologrupy pologrupy S_i* a $H =$

Dôkaz. I. Nech $S = \mathfrak{S}(H, T)$. Nech x_i je ľubovoľný prvok z S_i. Potom existuje aspoň jeden prvok $\xi \in S$ taký, že $\xi(i) = x_i$. Pretože $S = \mathfrak{S}(H, T)$, potom existuje $N \in I_m(H, T)$ taký, že $\xi \in N$. Z toho podľa vety 1,5 dostaneme $x_i = \xi(i) \in P_i(N)$ a $P_i(N) \in I_m(H_i, T_i)$.

II. Nech $S_i = \mathfrak{S}(H_i, T_i)$ pre každé $i \in I$. Nech ξ je ľubovoľný prvok z S a $\xi(i) = x_i$ pre každé $i \in I$. Pretože $S_i = \mathfrak{S}(H_i, T_i)$, potom existuje prvok $N_i \in I_m(H_i, T_i)$ taký, že $x_i \in N_i$ pre každé $i \in I$. Podľa vety 1,6 $N = \prod_{i \in I} N_i \in I_m(H, T)$. Z predchádzajúceho vyplýva, že $\xi \in N$.

Lema 1,2. *Nech S je pologrupa bez nuly a nech H je jej podpologrupa. $S = \mathfrak{S}(H, \emptyset)$ vtedy a len vtedy, ak z každej rovnosti $a = xb$, kde $a \in S$, $b \in S$ a $x \in H$ vyplýva $b = ya$, kde y je vhodný prvok z H.*

Dôkaz, I. Nech $S = \mathfrak{S}(H, \emptyset)$ a nech $a \in S$, $b \in S$, $b \neq a$, potom ${}_H(a) \in I_m(H, \emptyset)$, ${}_H(b) \in I_m(H, \emptyset)$. Ďalej buď ${}_H(a) \cap {}_H(b) = \emptyset$, alebo ${}_H(a) = {}_H(b)$. V prvom prípade nemôže platiť $a = xb$ pre žiadne $x \in H$. V prípade ${}_H(a) = {}_H(b)$ je $a = xb$ a $b = ya$, kde x a y sú vhodné prvky z H.

II. Predpokladajme, že z každej rovnosti $a = xb$, kde $a \in S$, $b \in S$ a $x \in H$ vyplýva $ya = b$, kde y je vhodný prvok z H. Nech a je ľubovoľný prvok z S a nech ${}_H(a) \notin I_m(H, \emptyset)$. Potom existuje prvok $L \in I(H, \emptyset)$ taký, že $L \subsetneqq {}_H(a)$. Nech $b \in L$ a $b \neq a$, potom ${}_H(b) \subseteq L \subsetneqq {}_H(a)$. Pretože $b \in {}_H(a)$ a $b \neq a$, potom platí $b = xa$, kde $x \in H$. Podľa predpokladu z poslednej rovnosti $a = yb$, kde $y \in H$ t. j. $a \in Hb$. Potom $a \in {}_H(a) = b \cup Hb$. Z toho vyplýva $Ha \subseteq Hb \cup H^2b \subseteq Hb$. Pretože $a \in Hb$, potom ${}_H(a) \subseteq {}_H(b)$. To je spor s tým, že ${}_H(b) \subsetneqq {}_H(a)$. Z toho výplýva, že ${}_H(a) \in I_m(H, \emptyset)$.

Dôsledok. *Nech S je pologrupa bez nuly. $S = \mathfrak{S}(S, \emptyset)$ vtedy a len vtedy, ak z každej rovnosti $a = xb$, kde $a \in S$, $b \in S$, $x \in S$ vyplýva $b = ya$, kde y je vhodný prvok z S* (pozri [8]).

Niektoré aplikácie doterajších výsledkov na grupy a úplne jednoduché pologrupy.

Je známe (pozri [3]). Ak H, T sú podgrupy grupy G, potom

(a) $Hx \in I_m(H, \emptyset)$ a $Hx = {}_HF^x = {}_H(x)$ pre každé $x \in G$.
(b) $xT \in I_m(\emptyset, T)$ a $xT = F_T^x = (x)_T$ pre každé $x \in G$.
(c) $HxT \in I_m(H, T)$ a $HxT = {}_HF_T^x = {}_H(x)_T$ pre každé $x \in G$.

Veta 1,8. *Nech H je podgupa grupy G, potom $G = \mathfrak{S}(H, \emptyset)$.*

Dôkaz. Nech $a = xb$, kde $a \in G$, $b \in G$ a $x \in H$, potom $b = x^{-1}a$, kde $x^{-1} \in H$. Z toho podľa lemy 1,2 dostaneme $G = \mathfrak{S}(H, \emptyset)$.

Nech pre každé $i \in I$ je G_i grupa, potom $G = \prod_{i \in I} G_i$ nazývame úplným direktným súčinom grup G_i (pozri napr. [9]). Je zrejmé, že G je grupa.

Veta 1,9. *Nech H_i, T_i sú podgrupy grupy G_i pre každé $i \in I$ a $H = \prod_{i \in I} H_i$,*

$T = \prod_{i \in I} T_i$, $G = \prod_{i \in I} G_i$. *Nech* N *je podmnožina grupy* G. $N = {}_HF_T^\alpha$ *vtedy a len vtedy, ak* $N = \prod_{i \in I} P_i(N)$ *a* $P_i(N) = {}_{H_i}F_{T_i}^{a_i}$, *kde* $\alpha \in G$ *a* $a_i = \alpha(i)$ *pre každé* $i \in I$.

Dôkaz. I. Nech $N = {}_HF_T^\alpha$, potom $N \in I_m(H, T)$. Z toho podľa vety 1,6 dostaneme $N = \prod_{i \in I} P_i(N)$, kde $P_i(N) \in I_m(H_i, T_i)$ pre každé $i \in I$. To znamená, že $P_i(N) = {}_{H_i}F_{T_i}^{a_i}$, $a_i = \alpha(i)$ pre každé $i \in I$.

II. Nech $N = \prod_{i \in I} P_i(N)$ a $P_i(N) = {}_{H_i}F_{T_i}^{a_i}$, $a_i \in G_i$ pre každé $i \in I$. To znamená, že $a_i \in P_i(N) \in I_m(H_i, T_i)$ pre každé $i \in I$. Z toho podľa vety 1,6 dostaneme, že $N \in I_m(H, T)$. Nech α je prvok z G taký, že $a_i = \alpha(i)$ pre každé $i \in I$. To znamená, že $\alpha \in N$. Z toho vyplýva, že $N = {}_HF_T^\alpha$.

Veta 1,10. *Nech* H, T *sú podgrupy grupy* $G = \prod_{i \in I} G_i$. *Nech* N *je podmnožina grupy* G. *Ak* $N = {}_HF_T^\alpha$, *potom* $P_i(N) = {}_{P_i(H)}F_{P_i(T)}^{a_i}$, kde $a_i = \alpha(i)$ pre každé $i \in I$ a $\alpha \in G$.

Dôkaz. Nech $N = {}_HF_T^\alpha$ t. j. $N \in I_m(H, T)$. Z toho podľa vety 1,5 dostaneme $P_i(N) \in I_m(P_i(H), P_i(T))$ a $a_i = \alpha(i) \in P_i(N)$ pre každé $i \in I$. To znamená, že $P_i(N) = {}_{P_i(H)}F_{P_i(T)}^{a_i}$ a $a_i = \alpha(i)$ pre každé $i \in I$.

Poznámka. V pologrupe S, ktorá nie je grupou, vety 1,9 a veta 1,10 nemusia platiť (pozri príklad 1,1).

Nech S je úplne jednoduchá pologrupa bez nuly. To v našej terminológii znamená, že S je ${}_S\mathscr{I}_S$-jednoduchá pologrupa a obsahuje aspoň jeden minimálny $(S, \emptyset)$-ideál a aspoň jeden minimálny $(\emptyset, S)$-ideál (pozri [3]).

Veta 1,11. *Nech pologrupa* S_i *obsahuje asopň dva prvky pre každé* $i \in I$: *Pologrupa* $S = \prod_{i \in I} S_i$ *je úplne jednoduchá bez nuly vtedy a len vtedy, ak pologrupa* S_i *je úplne jednoduchá pologrupa bez nuly pre každé* $i \in I$.

Dôkaz. $S = \prod_{i \in I} S_i$ je ${}_S\mathscr{I}_S$-jednoduchá bez nuly vtedy a len vtedy, ak S_i pre každé $i \in I$ je ${}_S\mathscr{I}_S$-jednoduchá bez nuly (pozri [5]).

Nech pologrupa S obsahuje aspoň jeden minimálny $(S, \emptyset)$-ideál L a aspoň jeden minimálny $(\emptyset, S)$-ideál R. Potom podľa vety 1,5 je $P_i(L)$ [$P_i(R)$] je minimálny $(S_i, \emptyset)[(\emptyset, S_i)]$-ideál v pologrupe S_i.

Nech S_i obsahuje aspoň jeden minimálny $(S_i, \emptyset)$ $[(\emptyset, S_i)]$-ideál $L_i[R_i]$. Z toho podľa vety 1,6 dostaneme, že

$$\prod_{i \in I} L_i \in I_m(S, \emptyset) \text{ a } \prod_{i \in I} R_i \in I_m(\emptyset, S).$$

Veta 1,12. *Nech* S_i *je úplne jednoduchá pologrupa bez nuly a* S_i *obsahuje aspoň dva prvky pre každé* $i \in I$. *Nech podpologrupa* H_i *pologrupy* S_i *obsahuje všetky indenpotenty pologrupy* S_i *a* H_i *je* ${}_{H_i}\mathscr{I}_{H_i}$-*jednoduchá pololgrupa pre každé* $i \in I$.

Dôkaz. I. Nech $S = \mathfrak{S}(H, T)$. Nech x_i je ľubovoľný prvok z S_i. Potom existuje aspoň jeden prvok $\xi \in S$ taký, že $\xi(i) = x_i$. Pretože $S = \mathfrak{S}(H, T)$, potom existuje $N \in I_m(H, T)$ taký, že $\xi \in N$. Z toho podľa vety 1,5 dostaneme $x_i = \xi(i) \in P_i(N)$ a $P_i(N) \in I_m(H_i, T_i)$.

II. Nech $S_i = \mathfrak{S}(H_i, T_i)$ pre každé $i \in I$. Nech ξ je ľubovoľný prvok z S a $\xi(i) = x_i$ pre každé $i \in I$. Pretože $S_i = \mathfrak{S}(H_i, T_i)$, potom existuje prvok $N_i \in I_m(H_i, T_i)$ taký, že $x_i \in N_i$ pre každé $i \in I$. Podľa vety 1,6 $N = \prod_{i \in I} N_i \in I_m(H, T)$. Z predchádzajúceho vyplýva, že $\xi \in N$.

Lema 1,2. *Nech S je pologrupa bez nuly a nech H je jej podpologrupa. $S = \mathfrak{S}(H, \emptyset)$ vtedy a len vtedy, ak z každej rovnosti $a = xb$, kde $a \in S$, $b \in S$ a $x \in H$ vyplýva $b = ya$, kde y je vhodný prvok z H.*

Dôkaz, I. Nech $S = \mathfrak{S}(H, \emptyset)$ a nech $a \in S$, $b \in S$, $b \neq a$, potom ${}_H(a) \in I_m(H, \emptyset)$, ${}_H(b) \in I_m(H, \emptyset)$. Ďalej buď ${}_H(a) \cap {}_H(b) = \emptyset$, alebo ${}_H(a) = {}_H(b)$. V prvom prípade nemôže platiť $a = xb$ pre žiadne $x \in H$. V prípade ${}_H(a) = {}_H(b)$ je $a = xb$ a $b = ya$, kde x a y sú vhodné prvky z H.

II. Predpokladajme, že z každej rovnosti $a = xb$, kde $a \in S$, $b \in S$ a $x \in H$ vyplýva $ya = b$, kde y je vhodný prvok z H. Nech a je ľubovoľný prvok z S a nech ${}_H(a) \notin I_m(H, \emptyset)$. Potom existuje prvok $L \in I(H, \emptyset)$ taký, že $L \subsetneqq {}_H(a)$. Nech $b \in L$ a $b \neq a$, potom ${}_H(b) \subseteq L \subsetneqq {}_H(a)$. Pretože $b \in {}_H(a)$ a $b \neq a$, potom platí $b = xa$, kde $x \in H$. Podľa predpokladu z poslednej rovnosti $a = yb$, kde $y \in H$ t. j. $a \in Hb$. Potom $a \in {}_H(a) = b \cup Hb$. Z toho vyplýva $Ha \subseteq Hb \cup H^2b \subseteq Hb$. Pretože $a \in Hb$, potom ${}_H(a) \subseteq {}_H(b)$. To je spor s tým, že ${}_H(b) \subsetneqq {}_H(a)$. Z toho výplýva, že ${}_H(a) \in I_m(H, \emptyset)$.

Dôsledok. *Nech S je pologrupa bez nuly. $S = \mathfrak{S}(S, \emptyset)$ vtedy a len vtedy, ak z každej rovnosti $a = xb$, kde $a \in S$, $b \in S$, $x \in S$ vyplýva $b = ya$, kde y je vhodný prvok z S* (pozri [8]).

Niektoré aplikácie doterajších výsledkov na grupy a úplne jednoduché pologrupy.

Je známe (pozri [3]). Ak H, T sú podgrupy grupy G, potom

(a) $Hx \in I_m(H, \emptyset)$ a $Hx = {}_HF^x = {}_H(x)$ pre každé $x \in G$.
(b) $xT \in I_m(\emptyset, T)$ a $xT = F_T^x = (x)_T$ pre každé $x \in G$.
(c) $HxT \in I_m(H, T)$ a $HxT = {}_HF_T^x = {}_H(x)_T$ pre každé $x \in G$.

Veta 1,8. *Nech H je podgupa grupy G, potom $G = \mathfrak{S}(H, \emptyset)$.*

Dôkaz. Nech $a = xb$, kde $a \in G$, $b \in G$ a $x \in H$, potom $b = x^{-1}a$, kde $x^{-1} \in H$. Z toho podľa lemy 1,2 dostaneme $G = \mathfrak{S}(H, \emptyset)$.

Nech pre každé $i \in I$ je G_i grupa, potom $G = \prod_{i \in I} G_i$ nazývame úplným direktným súčinom grup G_i (pozri napr. [9]). Je zrejmé, že G je grupa.

Veta 1,9. *Nech H_i, T_i sú podgrupy grupy G_i pre každé $i \in I$ a $H = \prod_{i \in I} H_i$,*

$T = \prod_{i \in I} T_i$, $G = \prod_{i \in I} G_i$. *Nech N je podmnožina grupy G. $N = {}_H F_T^\alpha$ vtedy a len vtedy, ak $N = \prod_{i \in I} P_i(N)$ a $P_i(N) = {}_{H_i} F_{T_i}^{a_i}$, kde $\alpha \in G$ a $a_i = \alpha(i)$ pre každé $i \in I$.*

Dôkaz. I. Nech $N = {}_H F_T^\alpha$, potom $N \in I_m(H, T)$. Z toho podľa vety 1,6 dostaneme $N = \prod_{i \in I} P_i(N)$, kde $P_i(N) \in I_m(H_i; T_i)$ pre každé $i \in I$. To znamená, že $P_i(N) = {}_{H_i} F_{T_i}^{a_i}$, $a_i = \alpha(i)$ pre každé $i \in I$.

II. Nech $N = \prod_{i \in I} P_i(N)$ a $P_i(N) = {}_{H_i} F_{T_i}^{a_i}$, $a_i \in G_i$ pre každé $i \in I$. To znamená, že $a_i \in P_i(N) \in I_m(H_i, T_i)$ pre každé $i \in I$. Z toho podľa vety 1,6 dostaneme, že $N \in I_m(H, T)$. Nech α je prvok z G taký, že $a_i = \alpha(i)$ pre každé $i \in I$. To znamená, že $\alpha \in N$. Z toho vyplýva, že $N = {}_H F_T^\alpha$.

Veta 1,10. *Nech H, T sú podgrupy grupy $G = \prod_{i \in I} G_i$. Nech N je podmnožina grupy G. Ak $N = {}_H F_T^\alpha$, potom $P_i(N) = {}_{P_i(H)} F_{P_i(T)}^{a_i}$,* kde $a_i = \alpha(i)$ pre každé $i \in I$ a $\alpha \in G$.

Dôkaz. Nech $N = {}_H F_T^\alpha$ t. j. $N \in I_m(H, T)$. Z toho podľa vety 1,5 dostaneme $P_i(N) \in I_m(P_i(H), P_i(T))$ a $a_i = \alpha(i) \in P_i(N)$ pre každé $i \in I$. To znamená, že $P_i(N) = {}_{P_i(H)} F_{P_i(T)}^{a_i}$ a $a_i = \alpha(i)$ pre každé $i \in I$.

Poznámka. V pologrupe S, ktorá nie je grupou, vety 1,9 a veta 1,10 nemusia platiť (pozri príklad 1,1).

Nech S je úplne jednoduchá pologrupa bez nuly. To v našej terminológii znamená, že S je ${}_S\mathscr{I}_S$-jednoduchá pologrupa a obsahuje aspoň jeden minimálny $(S, \emptyset)$-ideál a aspoň jeden minimálny $(\emptyset, S)$-ideál (pozri [3]).

Veta 1,11. *Nech pologrupa S_i obsahuje asopň dva prvky pre každé $i \in I$: Pologrupa $S = \prod_{i \in I} S_i$ je úplne jednoduchá bez nuly vtedy a len vtedy, ak pologrupa S_i je úplne jednoduchá pologrupa bez nuly pre každé $i \in I$.*

Dôkaz. $S = \prod_{i \in I} S_i$ je ${}_S\mathscr{I}_S$-jednoduchá bez nuly vtedy a len vtedy, ak S_i pre každé $i \in I$ je ${}_S\mathscr{I}_S$-jednoduchá bez nuly (pozri [5]).

Nech pologrupa S obsahuje aspoň jeden minimálny $(S, \emptyset)$-ideál L a aspoň jeden minimálny $(\emptyset, S)$-ideál R. Potom podľa vety 1,5 je $P_i(L)$ [$\mathrm{P}_i(R)$] je minimálny $(S_i, \emptyset)[(\emptyset, S_i)]$-ideál v pologrupe S_i.

Nech S_i obsahuje aspoň jeden minimálny $(S_i, \emptyset)$ $[(\emptyset, S_i)]$-ideál $L_i[R_i]$. Z toho podľa vety 1,6 dostaneme, že

$$\prod_{i \in I} L_i \in I_m(S, \emptyset) \text{ a } \prod_{i \in I} R_i \in I_m(\emptyset, S).$$

Veta 1,12. *Nech S_i je úplne jednoduchá pologrupa bez nuly a S_i obsahuje aspoň dva prvky pre každé $i \in I$. Nech podpologrupa H_i pologrupy S_i obsahuje všetky indenpotenty pologrupy S_i a H_i je ${}_{H_i}\mathscr{I}_{H_i}$-jednoduchá pololgrupa pre každé $i \in I$.*

Potom $S = \cup\{H\xi : \xi \in S\} = \cup\{\xi H : \xi \in S\} = \cup\{H\xi H : \xi \in S\}$, kde $H = \prod_{i \in I} H_i$, $S = \prod_{i \in I} S_i$.

Dôkaz. Podľa vety 1,11 je S úplne jednoduchá pologrupa bez nuly a podľa vety 1,2 podpologrupa H pologrupy S je ${}_H\mathscr{I}_H$-jednoduchá pologrupa. Je zrejmé, že $H = \prod_{i \in I} H_i$ obsahuje všetky idenpotenty z S. Z predchádzajúceho podľa vety 5,9 z [3] dostaneme tvrdenie tejto vety.

Veta 1,13. *Nech pologrupa S_i obsahuje aspoň dva prvky pre každé $i \in I$. Nech pologrupa $S = \prod_{i \in I} S_i$ je úplne jednoduchá pologrupa bez nuly. Nech podpologrupa H a pologrupy S obsahuje všetky idenpotenty pologrupy S a H je ${}_H\mathscr{I}_H$-jednoduchá pologrupa bez nuly. Potom* $S_i = \cup\{P_i(H)x_i : x_i \in S_i\} = \cup\{x_iP_i(H) : x_i \in S_i\} = \cup\{P_i(H)x_iP_i(H) : x_i \in S_i\}$ pre každé $i \in I$.

Dôkaz. Podľa vety 1,11 pologrupa S_i je úplne jednoduchá pologrupa bez nuly pre každé $i \in I$. Pretože H je ${}_H\mathscr{I}_H$-jednoduchá pologrupa, potom pre každé $\xi \in H$ je

$H = H\xi H \subseteq (\prod_{i \in I} P_i(H))\xi(\prod_{i \in I} P_i(H)) = \prod_{i \in I} P_i(H)x_iP_i(H)$, kde $x_i = \xi(i)$, $i \in I$. To znamená, že $P_i(H) \subseteq P_i(H)x_iP_i(H)$ pre každé $i \in I$. Pretože $P_i(H)$ je podpologrupa pologrupy S_i a $x_i \in P_i(H)$, potom $P_i(H)x_iP_i(H) \subseteq P_i(H)$. Z predchádzajúceho vyplýva, že $P_i(H) = P_i(H)x_iP_i(H)$ pre každé $x_i \in H_i$ a každé $i \in I$. Teda $P_i(H)$ je ${}_{P_i(H)}\mathscr{I}_{P_i(H)}$-jednoduchá pologrupa v S_i pre každé $i \in I$. Pretože $H \subseteq \prod_{i \in I} P_i(H)$, potom $P_i(H)$ obsahuje všetky idenpotenty pologrupy S_i, $i \in I$. Z predchádzajúceho podľa vety 5,6 z [3] dostaneme tvrdenie tejto vety.

2

Ľavý [pravý, obojstranný] ideál $L[R, N]$ pologrupy S je úplný, ak $SL = L[RS = R, SN = NS = N]$ (pozri [2]).

Definícia 2,1. *Nech H, T sú podpologrupy pologrupy S. Hovoríme, že (H, T)-ideál N pologrupy S je úplný (H, T)-ideál v S, ak $HN = NT = N$.*

V [2] je dokázaná veta: Každý $(S, \emptyset)$-ideál v S je úplný $(S, \emptyset)$-ideál v S vtedy a len vtedy, ak $S = R_S(0,1)$, kde $R_S(0,1)$ značí triedu regulárnosti v S t. j. množinu všetkých prvkov $a \in S$ pre ktoré existuje prvok $x \in S$ taký, že $a = xa$ (x je funkciou prvku a). Podobne definujeme $R_S(1,0)$ (pozri [6]). Na príklade ukážeme, že podmienka $S = R_S(0,1)$ nie je postačujúca, aby každý $(H, \emptyset)$-ideál pologrupy S bol úplný $(H, \emptyset)$-ideál v S.

Príklad 2,1. Nech $S = \{a, b, c, d\}$. Násobenie v S je dané multiplikatívnou tabuľkou

	a	b	c	d
a	a	b	a	a
b	a	b	a	a
c	a	b	c	d
d	a	b	c	d

Zrejme $S = R_S(0,1)$. Nech $H = \{a, b\}$, potom $N = \{a, d\}$ je $(H, \emptyset)$-ideál v S a nie je úplný $(H, \emptyset)$-ideál v S. Platí však nasledujúca

Veta 2,1. *Každý $(H, \emptyset)$-ideál pologrupy S je úplný $(H, \emptyset)$-ideál v S vtedy a len vtedy, ak podpologrupa H obsahuje ľavú jednotku každého prvku $a \in S$.*

Dôkaz. I. Nech podpologrupa H pologrupy S obsahuje ľavú jednotku každého prvku pologrupy S a anech $L \in I(H, \emptyset)$. Potom $L \subseteq HL$. Pretože L je $(H, \emptyset)$-ideál v S, potom $HL \subseteq L$. Teda $L = HL$.

II. Nech každý $(H, \emptyset)$-ideál v S je úplný $(H, \emptyset)$-ideál. Nech a je ľubovoľný prvok z S, potom $H(a \cup Ha) = a \cup Ha$, t. j. $Ha \cup H^2a = a \cup Ha$. Z toho vyplýva $Ha = a \cup Ha$. To znamená, že $a \in Ha$ t. j. ku každému prvku $a \in S$ existuje prvok $x_a \in H$ taký, že $a = x_a a$.

Dôsledok 2,1. *Ak pologrupa H obsahuje ľavú jednotku pologrupy S, potom každý $(H, \emptyset)$-ideál v S je úplný $(H, \emptyset)$-ideál v S.*

V [2] je dokázaná veta:

$S = R_S(0,1) = R_S(1,0)$ vtedy a len vtedy, ak každý $(S, \emptyset)$ $[(\emptyset, S), (S, S)]$-ideál v S je úplný $(S, \emptyset)$ $[(\emptyset, S), (S, S)]$-ideál v S.

Na príklade ukážeme, že podmienka $S = R_S(0,1) = R_S(1,0)$ nie je postačujúcou podmienkou aby každý (H, T)-ideál v S bol úplný (H, T)-ideál v S.

Nech S je pologrupa z príkladu 2,1. Je zrejmé, že $S = R_S(0,1) = R_S(1,0)$. Nech $H = \{a, b\}$ a $T = \{c\}$.

1) Množina $L = \{a, d\}$ je $(H, \emptyset)$-ideál v S a nie je úplný $(H, \emptyset)$-ideál v S.
2) Množina $R = \{a, b\}$ je $(\emptyset, T)$-ideál v S a nie je úplný $(\emptyset, T)$-ideál v S.
3) Množina $N = \{a, c\}$ je (H, T)-ideál v S a nie je úplný (H, T)-ideál v S.

Platí však nasledujúca

Veta 2,2. *Podpologrupa $H[T]$ obsahuje ľavú [pravú] jednotku každého prvku pologrupy S vtedy a len vtedy, ak každý (H, T)-ideál v pologrupe S je úplný (H, T)-ideál v S.*

Dôsledok 2,2. *Ak každý $(H, \emptyset)$-ideál pologrupy S je úplný, potom $S = HS$.*

Na príklade ukážeme, že obrátené tvrdenie neplatí.

Príklad 2,2. Nech pologrupa $S = \{a, b, c, d\}$. Násobenie v S je dané multiplikatívnou tabuľkou:

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	b
c	a	a	a	a
d	a	a	c	d

Nech $H = \{a, b, d\}$, potom $HS = S$. Množina $\{a, b\}$ je $(H, \emptyset)$-ideál v S a nie je úplný $(H, \emptyset)$-ideál.

Veta 2,3. *Nech L_i pre každé $i \in I$ je úplné $(H_i, \emptyset)$-ideál v pologrupe S_i a $H = \prod_{i \in I} H_i$, $S = \prod_{i \in I} S_i$. Potom $L = \prod_{i \in I} L_i$ je úplný $(H, \emptyset)$-ideál v S.*

Dôkaz. Nech L_i pre každé $i \in I$ je úplný $(H_i, \emptyset)$-ideál v S_i, potom $H_i L_i = L_i$ pre každé $i \in I$. Z toho vyplýva $(\prod_{i \in I} H_i)(\prod_{i \in I} L_i) = \prod_{i \in I} H_i L_i = \prod_{i \in I} L_i$. To znamená, že $\prod_{i \in I} L_i$ je úplný $(H, \emptyset)$-ideál v S.

Veta 2,4. *Nech L je úplný $(H, \emptyset)$-ideál v pologrupe $S = \prod_{i \in I} S_i$. Potom*

(1) *$P_i(L)$ je úplný $(P_i(H), \emptyset)$*-ideál v pologrupe S_i.

(2) *$\prod_{i \in I} P_i(L)$ je úplný $(\prod_{i \in I} P_i(H), \emptyset)$-ideál v S.*

Dôkaz. (1) Nech L je úplný $(H, \emptyset)$-ideál v pologrupe S. Potom $P_i(L)$ je $(P_i(H), \emptyset)$-ideál v S_i podľa vety 1,4. Nech a_i je ľubovoľný prvok z $P_i(L)$. Potom existuje prvok $\alpha \in L$ taký, že $\alpha(i) = a_i$. Pretože L je úplný $(H, \emptyset)$-ideál v S, potom existujú prvky $\eta \in H$ a $\lambda \in L$ také, že $\eta\lambda = \alpha$. Z toho pre každé $i \in I$ dostaneme $\eta(i)\lambda(i) = \alpha(i)$, kde $\alpha(i) = a_i$, $\eta(i) = h_i \in P_i(H)$ a $\lambda(i) = l_i \in P_i(L)$. Teda $a_i = h_i l_i$. Z toho vyplýva tvrdenie (1).

(2) Tvrdenie (2) vyplýva z (1) a vety 2,3.

Poznámka. Na príklade ukážeme, keď L je úplný $(H, \emptyset)$-ideál v $S = \prod_{i \in I} S_i$, potom nemusí platiť $L = \prod_{i \in I} P_i(L)$. Pozri príklad 1,1, b).

Veta 2,5. *Nech H_i pre každé $i \in I$ je podpologrupa pologrupy S_i a $H = \prod_{i \in I} H_i$, $S = \prod_{i \in I} S_i$. Každý $(H, \emptyset)$-ideál pologrupy S je úplný $(H, \emptyset)$-ideál v S vtedy a len vtedy, keď každý $(H_i, \emptyset)$-ideál v pologrupe S_i je úplný $(H_i, \emptyset)$-ideál.*

Dôkaz. I. Nech každý $(H, \emptyset)$-ideál v S je úplný $(H, \emptyset)$-ideál. Nech a_i je ľubovoľný prvok z S_i. Podľa vety 2,1 podpologrupa H obsahuje ľavú jednotku každého prvku pologrupy S. Potom existuje prvok $\alpha \in S$ taký, že $\alpha(i) = a_i$. To znamená, že existuje prvok $\xi \in H$ taký, že $\xi\alpha = \alpha$. Teda $\xi(i)\alpha(i) = \alpha(i)$, kde $\xi(i) = x_i \in H_i$. Z toho vyplýva, že $x_i a_i = a_i$. Z toho podľa vety 2,1 dostaneme, že každý $(H_i, \emptyset)$-ideál v S_i je úplný.

II. Nech každý $(H_i, \emptyset)$-ideál pologrupy S_i je úplný $(H_i, \emptyset)$-ideál. Nech α

je ľubovoľný prvok z S a $\alpha(i) = a_i$ pre každé $i \in I$. Pretože každý $(H_i, \emptyset)$-ideál v S_i je úplný $(H_i, \emptyset)$-ideál. To podľa vety 2,1 znamená, že existuje prvok $x_i \in H_i$ taký, že $x_i a_i = a_i$ pre každé $i \in I$. Nech $\xi(i) = x_i$ pre každé $i \in I$, potom $\xi \in H$ a $\xi\alpha = \alpha$. Z toho podľa vety 2,1 dostaneme, že každý $(H, \emptyset)$-ideál v S je úplný $(H, \emptyset)$-ideál.

Definícia 2,2. *Nech S je pologrupa, $H, T (H \neq \emptyset, T \neq \emptyset)$ jej podpologrupy. Prvok $A \in I(H, T)$, $A \neq S$ nazývame maximálnym (H, T)-ideálom, keď neexistuje vlastná podmnožina A' v S $(A' \neq S)$ taká, že $A \subsetneqq A'$ a $A' \in I(H, T)$.*

Lema 2,1. *Nech S je pologrupa a H, T jej podpologrupy. Nech N je maximálny (H, T)-ideál v S taký, že $A = S \setminus N$ obsahuje aspoň dva prvky. Potom platí:*

Ak $HS \nsubseteq N$ a $ST \nsubseteq N$, potom $A = {}_H F_T^a \subseteq HaT$ pre každý prvok $a \in A$.

Dôkaz. I. Nech $HS \nsubseteq N$ a $ST \nsubseteq N$. Pretože $HS \nsubseteq N$, potom existuje prvok $x \in S$ taký, že $Hx \nsubseteq N$. To znamená, že $(Hx) \cap A \neq \emptyset$. Najprv ukážeme, že $(xT) \cap A \neq \emptyset$. Predpokladajme opak t. j. $xT \subseteq N$. Potom $S = N \cup {}_H(x)_T = N \cup x \cup Hx$. Keďže $ST \nsubseteq N$, potom existuje prvok $y \in A$, $y \neq x$ taký, že $yT \nsubseteq N$. Z predchádzajúceho vyplýva $y \in Hx$. Teda $yT \subseteq HxT \subseteq N$. To je spor s tým, že $yT \nsubseteq N$. Podobne dokážeme, že z $xT \nsubseteq N$ vyplýva $Hx \nsubseteq N$. Z predchádzajúceho vyplýva, že $(xT) \cap A \neq \emptyset$ práve vtedy, ak $(Hx) \cap A \neq \emptyset$.

Teraz dokážeme, že z $HS \nsubseteq N$ a $ST \nsubseteq N$ vyplýva $HST \nsubseteq N$. Predpokladajme opak t. j. $HST \subseteq N$. Nech a je ľubovoľný prvok z A, potom $S = N \cup {}_H(a)_T = N \cup a \cup Ha \cup aT$. Pretože A obsahuje aspoň dva prvky, potom $Ha \cup aT \nsubseteq N$. To znamená, že buď $(Ha) \cap A \neq \emptyset$, alebo $(aT) \cap A \neq \emptyset$. Nech napr. $(Ha) \cap A \neq \emptyset$, potom $(aT) \cap A \neq \emptyset$. Nech $a \in A$ a $b \in A \setminus \{a\}$, potom $b \in Ha \cup aT$. Nech napr. $b \in aT$, potom $Hb \subseteq HaT \subseteq N$. Z predchádzajúceho dostaneme $bT \subseteq N$. To znamená, že pre každé $b \in A \setminus \{a\}$ je $Hb \subseteq N$ a $bT \subseteq N$. Teda $N \subsetneqq N \cup \{b\} \neq S$. To je spor s tým, že N je maximálny (H, T)-ideál v S.

II. Nech $M = \{x : x \in S, HxT \subseteq N\}$. Ukážeme, že M je (H, T)-ideál v S. Nech h je ľubovoľný prvok z H a x ľubovoľný z M, potom $H(hx)T \subseteq H^2xT \subseteq HxT \subseteq N$. To znamená, že $HM \subseteq M$. Podobne dokážeme, že $MT \subseteq M$. Keďže $HST \nsubseteq N$, potom $M \neq S$. Z toho a predpokladu vyplýva $M = N$. To znamená, že pre každé $a \in A$ je $HaT \nsubseteq N$. Množina $N \cup HaT$ je (H, T)-ideál v S. Teda $S = N \cup HaT$ pre každé $a \in A$. Z toho vyplýva $A \subseteq HaT$ pre každé $a \in A$.

Z I., II. a podľa vety 6 z [10] dostaneme tvrdenie lemy 2,1 (pre prípad $H = T$ je lema 2,1 dokázaná v [1]).

Veta 2,6. *Nech H_i, T_i sú podpologrupy pologrupy S_i pre každé $i \in I$ a $S = \prod_{i \in I} S_i$, $H = \prod_{i \in I} H_i$, $T = \prod_{i \in I} T_i$.*

(a) *Nech N_i je maximálny (H_i, T_i)-ideál v S_i taký, že $H_iS_i \nsubseteq N_i$ a $S_iT_i \nsubseteq N_i$ a $S_i \setminus N_i$ obsahuje aspoň dva prvky pre každé $i \in I$. Nech $M_{ij} = N_i$ pre $i = j$ a $M_{ij} = S_i$ pre $i \neq j$ $(i \in I, j \in I)$. Potom*

$$N = \bigcup_{j \in I} \{\prod_{i \in I} M_{ij}\},$$

je maximálny (H, T)-ideál v S.

(b) *Nech N je maximálny (H, T)-ideál v S, taký, že $HS \nsubseteq N$ a $ST \nsubseteq N$ a $A = S \setminus N$ obsahuje aspoň dva prvky. Potom N sa dá písať v tvare*

$$N = \bigcup_{j \in I} \{\prod_{i \in I} M_{ij}\},$$

kde pre každé $i \in I$, $j \in I$ je $M_{ij} = N_i$ pre $i = j$ a $M_{ij} = S_i$ pre $i \neq j$. Množina N_i je buď prázdna množina a v tom prípade S_i je ${}_{H_i}\mathscr{F}_{T_i}$-jednoduchá, alebo N_i je maximálny (H_i, T_i)-ideál v S_i $(i \in I)$.

Dôkaz (a). Nech N_i je maximálny (H_i, T_i)-ideál v S_i taký, že $H_iS_i \nsubseteq N_i$ a $S_iT_i \nsubseteq N_i$ a $S_i \setminus N_i$ obsahuje aspoň dva prvky pre každé $i \in I$. Nech $M_{ij} = N_i$ pre $i = j$ a $M_{ij} = S_i$ pre $i \neq j$ $(i \in I, j \in I)$. Potom zrejme $N = \bigcup_{j \in I} \{\prod_{i \in I} M_{ij}\}$ je (H, T)-ideál v S a podľa lemy 2,1 $S_i \setminus N_i = {}_{H_i}F_{T_i}^{a_i} \subseteq H_ia_iT_i$, $a_i \in S_i \setminus N_i$, pre každé $i \in I$. Z toho vzhľadom na vetu 1,1 dostaneme

$$S \setminus N = S \setminus (\bigcup_{j \in I} \{\prod_{i \in I} M_{ij}\} = \prod_{i \in I} {}_{H_i}F_{T_i}^{a_i} = {}_HF_T^{\alpha},$$

kde $\alpha \in S$ a $\alpha(i) = a_i$ pre každé $i \in I$. Z predchádzajúceho podľa vety 6 z [10] dostaneme tvrdenie (a) vety 2,6.

(b) Nech N je maximálny (H, T)-ideál v S taký, že $HS \nsubseteq N$, $ST \nsubseteq N$ a $A = S \setminus N$ obsahuje aspoň dva prvky. Potom podľa lemy 2,1 $A = {}_HF_T^{\alpha} \subseteq H\alpha T$ pre každé $\alpha \in A$. Z toho podľa vety 1,1 dostaneme $N = S \setminus (S \setminus N) = S \setminus A = (\prod_{i \in I} S_i) \setminus {}_HF_T^{\alpha} = (\prod_{i \in I} S_i) \setminus (\prod_{i \in I} {}_{H_i}F_{T_i}^{a_i}) = \bigcup_{j \in I} \{\prod_{i \in I} M_{ij}\}$, kde $M_{ij} = N_i = S_i \setminus {}_{H_i}F_{T_i}^{a_i}$ pre $i = j$ a $M_{ij} = S_i$ pre $i \neq j$, $a_i = \alpha(i)$ $(i \in I, j \in I)$. Ak $N_i = \emptyset$, potom $S_i = {}_{H_i}F_{T_i}^{a_i}$. To znamená, že S_i je ${}_{H_i}\mathscr{F}_{T_i}$-jednoduchá. Ak $N_i \neq \emptyset$, potom ukážeme, že N_i je maximálny (H_i, T_i)-ideál v S_i. Najprv ukážeme, že N_i je (H_i, T_i)-ideál v S_i. Predpokladajme opak. To znamená, že existuje aspoň jeden prvok $h_i[x_i]$ z $H_i[N_i]$, alebo aspoň jeden prvok $t_i[y_i]$ z $T_i[N_i]$ taký, že buď $hx_i \in {}_{H_i}F_{T_i}^{a_i}$, alebo $y_it_i \in {}_{H_i}F_{T_i}^{a_i}$. Nech napr. $h_ix_i \in {}_{H_i}F_{T_i}^{a_i}$. Z toho podľa vety 1,1 a poznámky 1,1 dostaneme $a_i \in H_i(h_ix_i)T_i \subseteq H_ia_iT_i$. To znamená, že $a_i \in H_ix_iT_i$. Ďalej z toho, že $a_i \in H_ix_iT_i$ pre $i = j$ a $a_j \in H_ja_jT_j$ pre každé $j \in I, j \neq i$ vyplýva $\alpha \in \prod_{i \in I} (H_im_iT_i) = (\prod_{i \in I} H_i)\mu(\prod_{i \in I} T_i)$, kde $\mu(i) = x_i \in N_i$ a pre každé $j \neq i$ je $\mu(j) = a_j$. To znamená $\mu \in N$. Z predchádzajúceho vyplýva, že $\alpha \in N$. To je spor s tým, že $\alpha \in A$. Pretože $S \setminus N_i = {}_{H_i}F_{T_i}^{a_i}$ a $N_i \in I(H_i, T_i)$, potom podľa vety 6 z [10] je N_i maximálny (H_i, H_i)-ideál v S_i.

Poznámka. Ak pologrupa S obsahuje práve jeden maximálny (H, T)-ideál N taký, že každý iný (H, T)-ideál $\neq$ S je podmnožinou N, potom ho budeme označovať $N^* = N$.

Z vety 2,6 a vety 8 z [10] vyplýva:

Ak sú splnené predpoklady vety 2,6 a v prípade

(a) je naviac $N_i = N_i^*$ pre každé $i \in I$. Potom $N = N^*$.

(b) je naviac $N = N^*$. Potom

$$N^* = \bigcup_{j \in I} \{\prod_{i \in I} M_{ij}\},$$

kde $M_{ij} = N_i$ pre $i = j$ a $M_{ij} = S_i$ pre $i \neq j$ $(i \in I,\ j \in I)$. Množina N_i je buď prázdna množina a v tomto prípade S_i je ${}_{H_i}\mathscr{I}_{T_i}$-jednoduchá, alebo N_i je maximálny (H_i, T_i)-ideál v S_i a $N_i = N_i^*$.

LITERATÚRA

[1] Bednarek A. R., Wallace A. D., *Relative ideals and their complements* I, Rev. Roum. Math. pures et appl., XI (1966), 13—22.

[2] Fabrici I., *On complete ideals in semigroups*, Mat. časop. *18* (1968), 34—39.

[3] Hrmová R., *Relative ideals in semigroups*, Mat. časop. *17* (1967), 206—223.

[4] Грмова Я., *Обобщенные идеалы в полугруппах*, Mat.-fyz. časop. *13* (1963), 41—54.

[5] Иван Я., *Простота и минимальные идеалы прямого произведения полугрупп*, Mat.-fyz. časop. *13* (1963), 114—124.

[6] Ляпин Е. С., *Полугруппы*, Москва 1960.

[7] Plemmous R., *Maximal ideals in the direct product of two semigroups*, Czechosl. Mat. J., *17* (92), (1967), 357—360.

[8] Шварц Ш., *Структура простых полугрупп без нуля*, Чехосл. матем. ж. *1* (76) (1951), 259—300.

[9] Zariski O., Samuel P., *Comutative algebra I*, Princeton 1958.

[10] Abrhan I., *Poznámka k maximálnym (H_1, H_2)-ideálom v pologrupách*, Mat. časop. *21* (1971)' 214-218.

Došlo 12. 8. 1969

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Strojníckej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej
Bratislava

ON $(H. T)$-IDEALS OF DIRECT PRODUCT OF SEMIGROUPS

Imrich Abrhan

Summary

Let S be a semigroup and let H, T be subsemigroups of S.

Let $I(H, T) = \{N : N \subseteq S,\ N \neq \emptyset,\ HN \subseteq N,\ NT \subseteq N\}$. The elements $N \in I(H, T)$ will be called (H, T)-ideals of S.

A semigroup S is called ${}_H\mathscr{I}_T$-simple if $I(H, T) = \{S\}$.

An element $N \in I(H, T)$ is a minimal (H, T)-ideal of S if there is no $N' \in I(H, T)$ such that $N' \subsetneqq N$. The set of all minimal (H, T)-ideals of S will be denoted by $I_m(H, T)$.

An element $N \in I(H, T)$ is called a complete (H, T)-ideal of S if $HN = NT = N$.

An element $N \in I(H, T)$ and $N \neq S$ is called a maximal (H, T)-ideal of S if there is no $N' \in I(H, T)$ such that $N \subsetneqq N' \subsetneqq S$.

Let $\{S_i\}$, $i \in I$ (card $I > 1$) be an arbitrary system of semigroups. Denote by S the set of all functions ξ, defined on I such that $\xi(i) \in S_i$. Introduce in S a multiplication in this way: If $\alpha, \beta \in S$ are arbitrary elements of S, then the product $\gamma = \alpha\beta$ is given by $\gamma(i) = \alpha(i)\beta(i)$ (for every $i \in I$). The set S with this multiplication is a semigroup, which is called a direct product of semigroups $\{S_i\}$, $i \in I$, and is denoted by $S = \prod_{i \in I} S_i$.

The main results are the following theorems:

Theorem 1,2. *Let H_i, T_i be for every $i \in I$ subsemigroups of S and let $H = \prod_{i \in I} H_i$, $T = \prod_{i \in I} T_i$, $S = \prod_{i \in I} S_i$. The slmigroup S is ${}_H\mathscr{I}_T$-simple if and only if S_i is ${}_{H_i}\mathscr{I}_{T_i}$-simple for every $i \in I$.*

Theorem 1,6. *Let H_i, T_i be for every $i \in I$ subsemigroups of S and $H = \prod_{i \in I} H_i$, $T = \prod_{i \in I} T_i$, $S = \prod_{i \in I} S_i$. Let $N \subseteq S$ and $N \neq \emptyset$. Then $N \in I_m(H, T)$ if and only if $N = \prod_{i \in I} N_i$, where $N_i \in I_m(H_i, T_i)$ for every $i \in I$.*

Theorem 2,5. *Let H_i, T_i be subsemigroups of S_i for every $i \in I$ and $H = \prod_{i \in I} H_i$, $T = \prod_{i \in I} T_i$, $S = \prod_{i \in I} S_i$. Every (H, T)-ideal of the semigroup S is a complete (H, T)-ideal of S if and only if every (H_i, T_i)ideal of S_i $(i \in I)$ is a complete (H_i, T_i)-ideal of S_i $(i \in I)$.*

Theorem 2,6. *Let H_i, T_i be subsemigroups of S_i for every $i \in I$ and let $S = \prod_{i \in I} S_i$, $H = \prod_{i \in I} H_i$, $T = \prod_{i \in I} T_i$.*

(a) *Let N_i be a minimal (H_i, T_i)-ideal of S_i such that $H_iS \nsubseteq N_i$, $ST_i \nsubseteq N_i$ and* card *$A_i > 1$, where $A_i = S_i \setminus N_i$ for every $i \in I$. Let $M_{ij} = N_i$ for $i = j$ and let $M_{ij} = S_i$ for $i \neq j$ $(i, j \in I)$. Then*

$$N = \bigcup_{j \in I} \{\prod_{i \in I} M_{ij}\},$$

is a maximal (H, T)*-ideal of* S.

(b) *Let N be a maximal (H, T)-ideal of S such that $HS \nsubseteq N$, $ST \nsubseteq N$ and* card $A > 1$, *where $A = S \setminus N$. Then*

$$N = \bigcup_{j \in I} \{\prod_{i \in I} M_{ij}\},$$

where $M_{ij} = N_i$ for $i = j$ and $M_{ij} = S_i$ for $i \neq j$ $(i, j \in I)$. The set N_i is either the empty set, in which case S_i is ${}_{H_i}\mathcal{I}_{T_i}$-simple, or N_i is a maximal (H_i, T_i)-ideal of S_i $(i \in I)$.