Blanka Kolibiarová

# O pologrupách, ktorých každá čiastočná pologrupa má ľavú jednotku

*Matematicko-fyzikálny časopis*, Vol. 7 (1957), No. 3, 177--182

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126424

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VII, 3 — 1957

# O POLOGRUPÁCH, KTORÝCH KAŽDÁ ČIASTOČNÁ POLOGRUPA MÁ ĽAVÚ JEDNOTKU

BLANKA KOLIBIAROVÁ
Katedra matematiky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

V práci [1] zaoberal sa Vorobjev vlastnosťami pologrúp, ktorých každá čiastočná pologrupa má jednotku. V tejto práci sa zaoberám všeobecnejším prípadom — pologrupami, ktorých každá čiastočná pologrupa má ľavú jednotku. Hoci niektoré vety v našich úvahách majú podobný charakter ako výsledky práce [1], nepodarilo sa mi nájsť všeobecnú konštrukciu vyšetrovaných pologrúp (pri pologrupách, ktoré skúmal Vorobjev, je takáto konštrukcia možná; pozri [1]).

## I

Nech $S$ je pologrupa. Znakom $I(S)$ budeme označovať množinu všetkých idempotentov v $S$. Prvok $e \in S$ nazývame ľavou jednotkou pologrupy $S$, ak pre každé $a \in S$ platí $ea = a$.

**Definícia 1.** *V $I(S)$ zaveďme reláciu $\varrho$ takto: Pre prvky $e_i, e_K \in I(S)$ platí $e_i \varrho e_K$, ak existuje taký prvok $x \in S$, že $e_i = e_K x$.*

**Veta 1.** *$e_i \varrho e_K$ platí vtedy a len vtedy, keď $e_i = e_K e_i$.*

Dôkaz. Nech $e_i \varrho e_K$. Potom existuje také $x \in S$, že $e_i = e_K x$. Potom $e_K e_i = e_K(e_K x) = e_K x = e_i$.

Obrátené tvrdenie je zrejmé.

**Veta 2.** *Relácia $\varrho$ (daná definíciou 1) je quasi-usporiadaním* [3] *množiny $I(S)$.*

Dôkaz. Zrejme $e_i \varrho e_i$ pre každé $e_i \in I(S)$. Nech $e_i \varrho e_K$, $e_K \varrho e_l$; potom $e_i \varrho e_l$, pretože $e_i = e_K e_i = (e_l e_K) e_i = e_l(e_K e_i) = e_l e_i$.

**Definícia 2.** *Budeme hovoriť, že pologrupa $S$ má vlastnosť $L$, ak každá čiastočná pologrupa pologrupy $S$ má ľavú jednotku.*

Poznámka. Ak pologrupa $S$ má vlastnosť $L$, aj každá jej čiastočná pologrupa má zrejme vlastnosť $L$.

**Veta 3.** *Nech pologrupa $S$ má vlastnosť $L$. Potom pre ľubovoľné prvky $e_i, e_K \in I(S)$ nastáva aspoň jedna z možností $e_i \varrho e_K$, $e_K \varrho e_i$.*

Dôkaz. Nech $E$ je čiastočná pologrupa vytvorená prvkami $e_i, e_K$. Pologrupa $E$ má prvky tvaru $e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \ldots, e_{i_n}$ (indexy $i_1, i_2, \ldots, i_n$ značia niektoré z čísel $i$, $\kappa$). Nech $e_L = e_{\kappa_1} \cdot e_{\kappa_2} \cdot \ldots, e_{\kappa_m}$ (indexy $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_m$ značia niektoré z čísel $i, \kappa$) je ľavou jednotkou v $E$. Potom $e_L e_{\kappa_m} = e_{\kappa_m}$. Avšak $e_{\kappa_m} = e_L e_{\kappa_m} = (e_{\kappa_1}, e_{\kappa_2}, \ldots, e_{\kappa_m}) e_{\kappa_m} = e_{\kappa_1}, e_{\kappa_2}, \ldots, e_{\kappa_m} = e_L$, t. j. $e_L = e_{\kappa_m}$, teda alebo $e_L = e_i$, alebo $e_L = e_K$. V prvom prípade $e_K = e_i e_K$, t. j. $e_K \varrho e_i$, v druhom prípade $e_i = e_K e_i$, t. j. $e_i \varrho e_K$.

**Veta 4.** *Nech pologrupa $S$ má vlastnosť $L$. Potom súčin idempotentov z $S$ je zas idempotent v $S$.*

Dôkaz. Nech $e_i, e_K \in S$ sú idempotenty. Podľa vety 3 alebo $e_i \varrho e_K$, alebo $e_K \varrho e_i$. Nech $e_i \varrho e_K$. Potom $(e_i e_K)(e_i e_K) = e_i(e_K e_i) e_K = e_i e_i e_K = e_i e_K$. Nech $e_K \varrho e_i$, potom $(e_i e_K)(e_i e_K) = e_K e_K = e_K = e_i e_K$.

**Dôsledok.** *Množina $I(S)$ je čiastočnou pologrupou pologrupy $S$, teda má ľavú jednotku.*

**Veta 5.** *Nutná a postačujúca podmienka, aby pologrupa $S$ mala vlastnosť $L$, je:*

1. *Pologrupa $S$ je súčtom disjunktných, periodických grúp, $S = \cup G_i$.*
2. *$I(S)$ je čiastočnou pologrupou pologrupy $S$ a má vlastnosť $L$.*

Dôkaz. a) Nech $S$ má vlastnosť $L$.

1. Nech $s \in S$. Uvažujme o čiastočnej pologrupe $S_1 = \{s, s^2, s^3, \ldots\}$. $S_1$ má podľa predpokladu ľavú jednotku $e_L$, ktorá je zrejme jednotkou v $S_1$. To však značí, že prvok $s$ je konečného rádu, nemá predperiódu, a teda podľa vety 7 z práce [2] je pologrupa $S$ súčtom disjunktných, periodických grúp.

2. Vyplýva z vety 4 a z definície 2.

b) Nech $S$ má vlastnosti 1,2. Nech $H$ je čiastočná pologrupa pologrupy $S$. Nech $h \in H$; potom podľa predpokladu 1 existuje prirodzené číslo $n$ také, že $h^n = e_h$, kde $e_h$ je idempotent, pričom $e_h h = h$. $I(H)$ je teda neprázdna množina. Množina $I(H)$ tvorí vzhľadom na predpoklad 2 čiastočnú pologrupu pologrupy $I(S)$, teda $I(H)$ obsahuje prvok $e_H$, pre ktorý platí $e_t \varrho e_H$ pre všetky $e_t \in I(H)$. Avšak potom je $e_H$ ľavou jednotkou v $H$, pretože $e_H h = e_H(e_h h) = (e_H e_h) h = e_h h = h$.

## II

V tomto odseku dokážeme niekoľko viet o ideáloch pologrupy $S$.

**Veta 6.** *Nech sa pologrupa $S$ dá vyjadriť ako súčet grúp $S = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$. Potom každý jej pravý ideál $R$ je súčtom grúp $G_\gamma$, t. j. $R = \bigcup_{\delta \in \Delta} G_\delta (\Delta \subseteq \Gamma)$.*

Dôkaz. Stačí ukázať: ak pre nejaké $\gamma \in \Gamma$ platí $G_\gamma \cap R \neq 0$, tak $G_\gamma \subseteq R$. Nech $x \in G_\gamma \cap R$. Nech $y \in G_\gamma$. Potom existuje taký prvok $t \in G_\gamma$, že $xt = y$. Pretože $x \in R$, je $y = xt \in R$.

**Dôsledok.** *Podľa vety 5 je každá pologrupa s vlastnosťou $L$ súčtom grúp $S = \bigcup_{i \in M} G_i$, teda každý jej pravý ideál je tiež súčtom grúp $G_i$, t. j. $R = \bigcup_{i \in M_1} G_i$ $(M_1 \subseteq M)$.*

Poznámka. Analogická veta platí pre ľavé ideály a pre ideály.

V ďalšom budeme označovať znakmi $G_i, G_j, G_K, \dots$ grupy z rozkladu $S = \bigcup G_i$ vo vete 5 a znakmi $e_i, e_j, e_K, \dots$ ich jednotky. Nech $e_i \in S$, vtedy symbol $\bigcup\limits_{e_K \varrho e_i} G_K$ bude značiť množinový súčet všetkých tých grúp $G_K$, pre jednotky ktorých platí $e_K \varrho e_i$.

**Veta 7.** *Nech pologrupa $S$ má vlastnosť L. Nech $e_i$ je idempotent v $S$. Potom pre každý prvok $g_t \in \bigcup\limits_{e_K \varrho e_i} G_K$ platí $g_t = e_i g_t$.*

Dôkaz. Nech $g_K \in G_K$, $e_K \varrho e_i$. Potom $g_K = e_K g_K = e_i e_K g_K = e_i g_K$.

**Veta 8.** *Nech pologrupa $S$ má vlastnosť L. Nech pre idempotenty $e_i$, $e_K$ platí $e_i \varrho e_K$. Nech $g_K \in G_K$. Potom $g_K e_i \in G_i$.*

Dôkaz. Najprv ukážeme, že $g_K e_i \in \bigcup\limits_{e_t \varrho e_i} G_t$. Nech $g_K e_i \in G_n$, t. j. existuje také prirodzené číslo $m$, že $(g_K e_i)^m = e_n$. Potom platí

$$e_n e_i = (g_K e_i)^m e_i = (g_K e_i)^m = e_n. \tag{1}$$

Podľa vety 3 nastáva aspoň jedna z možností $e_n \varrho e_i$, $e_i \varrho e_n$. V prvom prípade $G_n \subset \bigcup\limits_{e_t \varrho e_i} G_t$, v druhom prípade je vzhľadom na (1) $e_i = e_n e_i = e_n$, čiže opäť $G_n = G_i \subset \bigcup\limits_{e_t \varrho e_i} G_t$. To značí, že pre $g_K \in G_K$ platí $g_K e_i \in \bigcup\limits_{e_t \varrho e_i} G_t$.

Nech $g_K e_i \in G_t$, pričom $e_t \varrho e_i$. Potom

$$g_K e_i = (g_K e_i) e_t = g_K e_t. \tag{2}$$

Pre isté prirodzené číslo $m$ platí $g_K^m = e_K$. Pretože $g_K e_i \in G_t$, platí pre isté prirodzené číslo $n$ $(g_K e_i)^n = e_t$. Ďalej je vzhľadom na (2)

$$e_t = (g_K e_i)^{mn} = g_K e_t g_K e_t \dots g_K e_t g_K e_i.$$

Pretože $e_t (g_K e_t) = g_K e_t$, resp. $e_t (g_K e_i) = g_K e_i$, vidíme, že možno v poslednom výraze postupne vynechávať prvky $e_t$ (začínajúc prvým), takže po $mn - 1$ takýchto krokoch dostaneme $e_t = g_K^{mn} e_i = e_K e_i$. Ale $e_K e_i = e_i$, pretože sme predpokladali $e_i \varrho e_K$, teda $e_t = e_i$, čo značí, že $g_K e_i \in G_i$.

**Veta 9.** *Nech pologrupa $S$ má vlastnosť L. Nutná a postačujúca podmienka, aby množina $R$ bola pravým ideálom pologrupy $S$ je, aby pre isté $e_i \in S$ platilo $R = \bigcup\limits_{e_t \varrho e_i} G_t$.*

Dôkaz.

a) Nech $R = \bigcup\limits_{e_t \varrho e_i} G_t$. Nech $g_t \in G_t \subset R$, $g_K \in S$. Treba ukázať, že platí $g_t g_K \in \bigcup\limits_{e_t \varrho e_i} G_t$.

Nech $g_t g_K \in G_n$, t. j. existuje také prirodzené číslo $m$, že $(g_t g_K)^m = e_n$; potom platí $e_t e_n = e_t (g_t g_K)^m = (g_t g_K)^m = e_n$, čiže $e_n \varrho e_t$. Tento vzťah spolu so vzťahom $e_t \varrho e_i$ dáva $e_n \varrho e_i$, a teda $G_n \subset \bigcup\limits_{e_t \varrho e_i} G_t$, čo značí, že $g_t g_K \in \bigcup\limits_{e_t \varrho e_i} G_t$.

b) Nech $R$ je pravý ideál. Nech $e_i$ je jeho ľavá jednotka. Potom platí $e_\iota \in R$ pre všetky $e_\iota$, pre ktoré platí $e_\iota = e_i e_\iota$, t. j. $e_\iota \varrho e_i$. To však vzhľadom na vetu 6 značí, že $R = \bigcup\limits_{e_\iota \varrho e_i} G_\iota$.

**Veta 10.** *Nech pologrupa $S$ má vlastnosť $L$. Nech $e_i \in S$. Potom $\bigcup\limits_{e_\iota \varrho e_i} G_\iota$ je ľavým ideálom v $S$.*

Dôkaz. Nech $g_\iota \in \bigcup\limits_{e_\iota \varrho e_i} G_\iota$, $g_K \in S$. Treba ukázať, že $g_K g_\iota \in \bigcup\limits_{e_\iota \varrho e_i} G_\iota$. Podľa vety 3 nastáva aspoň jedna z možností $e_\iota \varrho e_K$, $e_K \varrho e_\iota$. V prvom prípade platí podľa vety 8 $g_K g_\iota = (g_K e_\iota)\, g_\iota \in G_\iota \subset \bigcup\limits_{e_\iota \varrho e_i} G_\iota$. V druhom prípade nech $g_K g_\iota \in G_n$, t. j. existuje také prirodzené číslo $m$, že $(g_K g_\iota)^m = e_n$. Potom $e_K e_n = e_K (g_K g_\iota)^m = (g_K g_\iota)^m = e_n$, čo značí $e_n \varrho e_K$. Pretože sme predpokladali $e_K \varrho e_\iota$, je $e_n \varrho e_\iota$, $e_\iota \varrho e_i$ a platí opäť $g_K g_\iota \in \bigcup\limits_{e_\iota \varrho e_i} G_\iota$.

**Veta 11.** *Nech pologrupa $S$ má vlastnosť $L$. Potom každý pravý ideál v $S$ je obojstranným ideálom v $S$.*

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva z viet 9 a 10.

Poznámka. Pre ľavé ideály neplatí veta analogická k vete 11.

Príklad: V pologrupe danej multiplikačnou tabuľkou

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
| $a_2$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
| $a_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |

ktorá má vlastnosť $L$, tvorí množina $\{a_3\}$ ľavý ideál, ktorý nie je pravým ideálom.

## III

Obsahom tohto odseku je niekoľko viet o homomorfizmoch.

**Veta 12.** *Nech pologrupa $S$ má vlastnosť $L$. Nech $S'$ je homomorfný obraz pologrupy $S$. Potom aj $S'$ má vlastnosť $L$.*

Dôkaz. Nech $H'$ je čiastočná pologrupa pologrupy $S'$. Potom $H'$ je homomorfným obrazom čiastočnej pologrupy $H \subset S$. Pologrupa $H$ má teda ľavú jednotku $e_H$. Nech obrazom prvku $e_H$ je $e'_H$. Zrejme je $e'_H$ ľavou jednotkou v $H'$

**Veta 13.** *Nech pologrupa $S$ má vlastnosť $L$. Nech $e_i \varrho e_K$. Potom zobrazenie $g_K \to g_K e_i$ (označme ho $\varphi_i^K$) je homomorfným zobrazením grupy $G_K$ do grupy $G_i$.*

Poznámka. Ľahko sa zistí, že $\varphi_i^K \varphi_K^i = \varphi_i^i$.

Dôkaz. Z vety 8 vyplýva $\varphi_i^K g_K \in G_i$. Nech $g_K$, $g'_K \in G_K$. Potom $\varphi_i^K g_K \varphi_i^K g'_K = (g_K e_i)(g'_K e_i) = g_K e_i (g'_K e_i) = g_K (g'_K e_i) = \varphi_i^K g_K g'_K$.

**Veta 14.** *Nech pologrupa $S$ má vlastnosť $L$. Nech $g_i \in G_i$, $g_K \in G_K$, pričom $e_i \varrho e_K$. Potom $(\varphi_i^K g_K)\, g_i = g_K g_i$.*

Dôkaz. $(g_i^K g_K)\, g_i = (g_K e_i)\, g_i = g_K (e_i g_i) = g_K g_i$.

**Veta 15.** *Nech pologrupa $S$ má vlastnosť $L$. Nech zobrazenie $\Gamma$ je automorfizmom na každej z grúp $G_K$. Nech pre všetky $e_i, e_K$, pre ktoré $e_i \varrho e_K$, platí $\varphi_i^K \Gamma g_K = \Gamma \varphi_i^K g_K (g_K \in G_K)$. Potom zobrazenie $\Gamma$ zachováva vzťah $\Gamma(g_K g_i) = \Gamma g_K \Gamma g_i$ pre všetky $i, k$, pre ktoré $e_i \varrho e_K$.*

Dôkaz. Označme $\gamma_K$ automorfizmus grupy $G_K$ daný zobrazením $\Gamma$. Platí (používame vetu 13)

$$\Gamma(g_K g_i) = \Gamma(g_K e_i g_i) = \Gamma(\varphi_i^K g_K g_i) = \gamma_i(\varphi_i^K g_K g_i) = \gamma_i(\varphi_i^K g_K)\, \gamma_i g_i =$$
$$= (\varphi_i^K \gamma_K g_K)\, \gamma_i g_i = [(\gamma_K g_K)\, e_i]\, \gamma_i g_i = (\gamma_K g_K)(\gamma_i e_i)(\gamma_i g_i) =$$
$$= (\gamma_K g_K)\, \gamma_i(e_i g_i) = (\gamma_K g_K)(\gamma_i g_i) = \Gamma g_K \Gamma g_i .$$

## LITERATÚRA

1. Воробьев Н. Н., Ассоциативные системы, всякая подсистема которых имеет единицу, доклады Академии Наук СССР 1953, Том LXXXVIII, Но 3, 393—396. 2. Schwarz Št., Teória pologrúp, Sborník prác Prírodovedeckej fakulty Slovenskej univerzity v Bratislave, č. 6 (1943), 1—64. 3. Birkhoff G., Lattice theory, New York 1948, kap. I, § 4.

Došlo 10. 4. 1957.

# О ПОЛУГРУППАХ, ВСЯКАЯ ЧАСТИЧНАЯ ПОЛУГРУППА КОТОРЫХ ИМЕЕТ ЛЕВУЮ ЕДИНИЦУ

БЛАНКА КОЛИБИАРОВА

### Выводы

Пусть $S$ полугруппа. Скажем, что $S$ удовлетворяет условию $L$, если всякая частичная полугруппа полугруппы $S$ содержит левую единицу. Содержанием настоящей статьи является изучение полугрупп удовлетворяющих условию $L$.

Пусть $I(S)$ значит множество идемпотентов полугруппы $S$. Отношение $\varrho$ в $I(S)$ устанавливается следующим образом: для $e_i, e_K \in I(S)$ имеет место $e_i \varrho e_K$, если существует такой элемент $x \in S$, что $e_i = e_K x$.

Показывается, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы полугруппа $S$ удовлетворяла условию $L$, являтся: 1. $S$ можно писать как сумму непересекающихся периодических групп $S = \bigcup G_i$; 2. $I(S)$ есть частичная полугруппа полугруппы $S$ и удовлетворяет условию $L$ (теорема 5).

В дальнейшем мы обозначим через $G_i, G_K, \ldots$ группы разбиения $S = \bigcup G_i$ в теореме 5, и $e_i, e_K, \ldots$ их единицы. Если $e_i \in S$, то $\bigcup\limits_{e_i \varrho e_K} G_K$ значит сумму всех групп, для единиц которых имеет место $e_K \varrho e_i$.

Пусть $S$ полугруппа удовлетворяющая условию $L$. Для того, чтобы множество $R$ было правым идеалом полугруппы $S$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $e_i \in S$ имело место равенство $R = \bigcup\limits_{e_l \varrho e_i} G_l$ (теорема 9). — Всякий правый идеал является одновременно двусторонним идеалом, но не всякий левый идеал двусторонний как показывает пример в замечании к теореме 11.

Пусть $S$ полугруппа удовлетворяющая условию $L$. Пусть $e_i \varrho e_K$. Тогда отображение $g_K \to g_K e_i$ (обозначим его через $\varphi_i^K$) является гомоморфизмом группы $G_K$ в группу $G_i$ (теорема 13). — Далее $(\varphi_i^K g_K)\, g_i = g_K g_i$ (теорема 14).

Пусть в полугруппе $S$ удовлетворяющей условию $L$ отображение $\Gamma$ — автоморфизм на каждой из групп $G_K$. Пусть $\varphi_i^K\, \Gamma g_K = \Gamma \varphi_i^K g_K (g_K \in G_K)$ для всех $e_i$, $e_K$, для которых $e_i \varrho e_K$. Тогда $\Gamma(g_K g_i) = \Gamma g_K \Gamma g_i$ для всех $i$, $k$, для которых $e_i \varrho e_K$.

# ON THE SEMIGROUPS, EVERY SUBSEMIGROUP OF WHICH HAS A LEFT UNIT ELEMENT

BLANKA KOLIBIAROVÁ

Summary

Let $S$ be a semigroup. We shall say that $S$ satisfies the condition $L$ if every subsemigroup of $S$ has a left unit element. This paper deals with the properties of semigroups satisfying the condition $L$.

Let $I(S)$ be the set of idempotents of $S$. The relation $\varrho$ in $I(S)$ is defined as follows: let $e_i$, $e_K \in I(S)$, then $e_i \varrho e_K$ if and only if there exists an element $x \in S$ such that $e_i = e_K x$.

We quote here some of the theorems proved above.

Theorem 5. The necessary and sufficient condition that $S$ should satisfy the condition $L$ is: 1. $S$ can be written as a class sum of disjoint torsion groups, $S = \bigcup G_i$; 2. $I(S)$ is a subsemigroup of $S$ and satisfies the condition $L$.

In what follows the symbols $G_i$, $G_K$, ... mean always the groups in the decomposition $S = \bigcup G_i$ of the theorem 5, $e_i$, $e_K$, ... are their unit elements. Let $e_i \in S$, then the symbol $\bigcup\limits_{e_K \varrho e_i} G_K$ means the sum of all groups $G_K$ with $e_K \varrho e_i$.

Theorem 9. Let $S$ be a semigroup satisfying the condition $L$. Then a set $R$ of elements of $S$ is a right ideal of $S$ if and only if for some $e_i$ $R = \bigcup\limits_{e_\iota \varrho e_i} G_\iota$. — In theorem 11 is proved that every right ideal of $S$ is also a two-sided ideal of $S$, but there are left ideals which are not two-sided ideals.

Theorem 13. Let $S$ be a semigroup satisfying the condition $L$. Let $e_i \varrho e_K$. The transformation $g_K \to g_K e_i$ (denoted by $\varphi_i^K$) is a homomorphism of the group $G_K$ into the group $G_i$. — Then it holds $(\varphi_i^K g_K)\, g_i = g_K g_i$ (theorem 14).

Theorem 15. Let $S$ be a semigroup satisfying the condition $L$. Let the mapping $\Gamma$ is the automorphism of every group $G_K$. Let $\varphi_i^K \Gamma g_K = \Gamma \varphi_i^K g_K (g_K \in G_K)$ hold for all $e_i$, $e_K$ with $e_i \varrho e_K$. Then it holds $\Gamma(g_K g_i) = \Gamma g_K \Gamma g_i$ for all $i$, $\kappa$ for which $e_i \varrho e_K$ holds.