Matematický časopis

Jozef Rovder

Niektoré vlastnosti diferenciálnej rovnice $y'' + f(x)|y| = 0$

Matematický časopis, Vol. 20 (1970), No. 2, 141--149

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126382

Matematický časopis 20 (1970), No. 2

NIEKTORÉ VLASTNOSTI DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE $y''' + f(x)\,|y| = 0$

JOZEF ROVDER, Bratislava

V nasledujúcej práci sú dané postačujúce podmienky, aby všetky riešenia rovnice $y''' + f(x)\,|y| = 0$ boli neoscilatorické, resp. oscilatorické. Dokázaná je aj existencia riešenia tejto rovnice bez nulových bodov.

Lema 1. *Nech v diferenciálnej rovnici*

$$y''' + f(x)\,|y| = 0 \tag{1}$$

je $f(x) \in C_0(a, b)$ a nech na celom intervale (a, b) je $f(x) \geqq 0$. Nech $y(x)$ je riešenie rovnice (1), ktoré vyhovuje začiatočným podmienkam $y(x_1) = y'(x_1) = 0$, $y''(x_1) > 0$ (resp. $y''(x_1) < 0$) $x_1 \in (a, b)$. Potom v intervale (a, x_1) je $y(x) > 0$, $y'(x) < 0$, $y''(x) > 0$ (resp. v intervale (x_1, b) je $y(x) < 0$, $y'(x) < 0$, $y''(x) < 0$).

Lema 2. *Nech v diferenciálnej rovnici (1) je $f(x) \in C_0(a, b)$ a $f(x) \leqq 0$ na celom intervale (a, b). Nech $y(x)$ je riešenie tejto rovnice, ktoré vyhovuje začiatočným podmienkam $y(x_1) = y'(x_1) = 0$, $y''(x_1) > 0$ (resp. $y''(x_1) < 0$), $x_1 \in (a, b)$. Potom v intervale (x_1, b) je $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$, $y''(x) > 0$ (resp. v intervale (a, x_1) je $y(x) < 0$, $y'(x) > 0$, $y''(x) < 0$).*

Dôkaz týchto lem plynie z nasledujúcej formuly (existencia a jednoznačnosť riešenia rovnice (1) daného začiatočnými podmienkami plynie z vety 1 v práci [1]):

$$y'' = -\int_{x_1}^{x} f(t)\,|y(t)|\,\mathrm{d}t + y''(x_1).$$

Lema 3. *Nech v diferenciálnej rovnici (1) je $f(x) \in C_0(a, b)$ a $f(x) \geqq 0$ na intervale (a, b). Nech $y(x)$ je riešenie rovnice (1) s vlastnosťou $y(x_1) = y(x_2) = 0$, $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. Nech je $y(x) > 0$ ($y(x) < 0$) na intervale (x_1, x_2). Potom riešenie $y(x)$ nemá v intervale (x_2, b) (v intervale (a, x_1)) nulový bod.*

Lema 4. *Nech v diferenciálnej rovnici (1) je $f(x) \in C_0(a, b)$ a nech na intervale (a, b) je $f(x) \leqq 0$. Nech $y(x)$ je riešenie tejto rovnice s vlastnosťou $y(x_1) = y(x_2) = 0$, $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a, b)$. Nech je $y(x) > 0$ ($y(x) < 0$) na intervale (x_1, x_2). Potom riešenie $y(x)$ v intervale (a, x_1) $((x_2, b))$ nemá nulový bod.*

Dôkazy týchto lem sú v podstate analogické. Dokážeme napríklad lemu 3. Pretože je $y(x) > 0$ ($y(x) < 0$) v intervale (x_1, x_2) a $y(x_1) = y(x_2) = 0$, existuje bod $c \in (x_1, x_2)$ v ktorom má funkcia $y(x)$ maximum (minimum), t. j. $y''(c) \leqq 0$ ($y''(c) \geqq 0$). Integrovaním rovnice (1) v medziach od c po x dostaneme

$$y''(x) = -\int_c^x f(t)\,|y(t)|\,dt + y''(c).$$

Odtiaľ vyplýva, že pre $x > c$ je $y''(x) \leqq 0$, t. j. $y(x)$ je konkávna funkcia vpravo od bodu c, teda má najviac jeden nulový bod a to je bod x_2. Pre $x < c$ a $y''(c) \geqq 0$ je $y''(x) \geqq 0$, t. j. $y(x)$ je konvexná funkcia, má teda najviac jeden nulový bod vľavo od bodu c a tým je bod x_1.

Veta 1. *Nech v diferenciálnej rovnici (1) je $f(x) \in C_0(a, b)$ a nech je $f(x) \geqq 0$, resp. $f(x) \leqq 0$ na celom intervale (a, b). Potom každé riešenie rejto rovnice s dvojnásobným nulovým bodom môže mať najviac jeden nulový bod a to jednoduchý.*

Dôkaz. Vetu dokážeme iba v prípade, keď je $f(x) \geqq 0$. Pre $f(x) \leqq 0$ je dôkaz tejto vety podobný. Nech bod x_1 je dvojnásobný, t. j. $y(x_1) = y'(x_1) = 0$. Môžu nastať dva prípady: $y''(x_1) > 0$, alebo $y''(x_1) < 0$. Ak je $y''(x_1) \geqq 0$, potom podľa lemy 1 vľavo od bodu x_1 je $y(x) > 0$. Ak vpravo od bodu x_1 má $y(x)$ nulový bod x_2, potom podľa lemy 3 nemá už vpravo od bodu x_2 nulový bod. Bod x_2 nemôže byť dvojnásobný, pretože ak by bol, potom musí byť $y''(x_2) > 0$ a teda podľa lemy 1 je $y(x) > 0$ pre $x < x_2$, čo je v spore s tým, že $y(x_1) = 0$.

Podobne v druhom prípade, t. j. keď $y''(x_1) < 0$, podľa lemy 1 vpravo od bodu x_1 je $y(x) < 0$. Ak by vľavo od bodu x_1 existoval nulový bod x_2, potom podľa lemy 3 nemá $y(x)$ vľavo od bodu x_2 nulový bod. Bod x_2 nemôže byť dvojnásobný, pretože vpravo od dvojnásobneho bodu, v ktorom je druhá derivácia záporná, riešenie klesá, čo je v spore s podmienkou $y(x_1) = 0$.

Dôsledok. *Každé riešenie rovnice (1) má za tých istých predpokladov ako vo vete 1 najviac jeden dvojnásobný nulový bod.*

Veta 2. *Nech v diferenciálnej rovnici (1) je $f(x) \in C_0(a, b)$ a nech je $f(x) \geqq 0$, resp. $f(x) \leqq 0$ na celom intervale (a, b). Potom každé riešenie tejto rovnice má najviac tri nulové body (včítane násobnosti).*

Dôkaz. Ak jeden nulový bod je dvojnásobný, potom tvrdenie tejto vety vyplýva z vety 1. Nech teraz žiaden z nulových bodov nie je dvojnásobný a nech existujú tri nulové body $x_1 < x_2 < x_3$, t. j. $y(x_1) = y(x_2) = y(x_3) = 0$, $y'(x_i) \neq 0$, $i = 1, 2, 3$. Keď je $f(x) \geqq 0$, potom podľa lemy 3 môže nastať len prípad, že je $y(x) < 0$ v intervale (x_1, x_2) a $y(x) > 0$ v intervale (x_2, x_3). Potom podľa tej istej lemy je vľavo od x_1 $y(x) > 0$, vpravo od x_3 je $y(x) < 0$, teda $y(x)$ má najviac tri nulové body a to x_1, x_2, x_3.

Ak je $f(x) \leqq 0$ vetu 2 dokážeme podobným spôsobom, avšak namiesto lemy 3 použijeme v dôkaze lemu 4.

Veta 3. *Nech je funkcia $f(x) \in C_0(a, \infty)$ a $f(x) \geqq 0$, pričom znamienko = neplatí v žiadnom čiastočnom intervale intervalu (a, ∞). Potom existujú riešenia $u(x)$, $v(x)$ rovnice (1) pre ktoré platí:*

$$u(x) \,.\, u'(x) \,.\, u''(x) \neq 0;\ u(x) > 0,\ u'(x) < 0,\ u''(x) > 0,\ \lim_{x\to\infty} u'(x) = \lim_{x\to\infty} u''(x) = 0;$$

$\lim_{x\to\infty} u(x)$ existuje,

$$v(x) \,.\, v'(x) \,.\, v''(x) \neq 0;\ v(x) < 0,\ v'(x) < 0,\ v''(x) < 0;\ \lim_{x\to\infty} v(x) = \lim_{x\to\infty} v'(x) = -\infty,\ v''(x) \text{ klesá}.$$

Ak predpokladáme naviac, že platí $f'(x) \geqq 0$, potom pre riešenia $u(x)$, $v(x)$ platí aj $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} v''(x) = -\infty$.

Dôkaz. K dôkazu existencie riešenia $u(x)$ použijeme vetu 1 z práce [2], podľa ktorej, ak sú splnené predpoklady vety 3, existuje riešenie $z(x)$ rovnice $z''' + f(x)z = 0$ pre ktoré platí $z(x) \,.\, z'(x) \,.\, z''(x) \neq 0$; $\operatorname{sgn} z(x) = \operatorname{sgn} z''(x) \neq \operatorname{sgn} z'(x)$, $\lim_{x\to\infty} z'(x) = 0$. Pretože každé kladné riešenie rovnice $z''' + f(x)\,z = 0$ je riešením aj rovnice (1) z toho vyplýva, že existuje riešenie $u(x)$ rovnice (1) pre ktoré platí $u(x) \,.\, u'(x) \,.\, u''(x) \neq 0$, $u(x) > 0$, $u'(x) < 0$, $u''(x) > 0$, $\lim_{x\to\infty} u'(x) = 0$.

Z rovnice (1) ďalej vyplýva, že $u''' = -f(x)\,|u| \leqq 0$, teda $u''(x)$ klesá v intervale (a, ∞). Pretože $u'(x) > 0$, je $\lim_{x\to\infty} u''(x) = m \geqq 0$. Ak je $m > 0$, potom $u''(x) > m$ a pre $u'(x)$ potom platí nerovnosť $u'(x) > mx + k$. Z podmienky, že platí $\lim_{x\to\infty} u'(x) = 0$ plynie $m = 0$, Tým sme dokázali, že platí aj $\lim_{x\to\infty} u''(x) = 0$. Keďže funkcia $u(x)$ klesá a je kladná, z toho plynie, že $\lim_{x\to\infty} u(x)$ je konečná a nezáporná.

Ak predpokladáme naviac, že je $f'(x) \geqq 0$, platí tiež $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$. Dokážeme to nepriamo. Nech $\lim_{x\to\infty} u(x) = k > 0$. Funkcia $u(x)$ je klesajúca, preto je $u(x) > k$ pre všetky $x \in (a, \infty)$. Podľa predpokladu funkcia $f(x)$ je neklesajúca a nezáporná, preto je $\lim_{x\to\infty} f(x) = M > 0$ alebo ∞. Preto pre x dosť veľké je $f(x) > \dfrac{M}{2} > 0$ a teda aj súčin $f(x)\,u(x) > \dfrac{M \,.\, k}{2} > 0$. Z rovnice (1) však vyplýva, že je $u''' = -f(x)\,u < -Mk/2 < 0$, teda pre veľké x je $u''(x) < 0$ čo je v spore s tým, čo už bolo o $u''(x)$ dokázané. Platí teda aj $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$.

Pri dôkaze druhej časti (o riešení $v(x)$) poznamenajme, že každé záporné riešenie rovnice (1) je riešením rovnice $w''' - f(x)\, w = 0$ a obrátene. Potom podľa vety 5 z práce [2], ktoré tvrdí, že ak je $f(x) \geqq 0$ a znamienko $=$ neplatí v žiadnom čiastočnom intervale intervalu (a, ∞), má rovnica $w''' - f(x)\, w = 0$ riešenie $w(x)$ pre ktoré platí $\varepsilon w(x) < 0$, $\varepsilon w'(x) < 0$, $\varepsilon w''(x) < 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon w(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon w'(x) = -\infty$, $w''(x)$ klesá, $\varepsilon = \pm 1$, existuje riešenie rovnice (1) pre ktoré platí

$v(x)\; v'(x) \,.\, v''(x) \neq 0$; $v(x) < 0$, $v'(x) < 0$, $v''(x) < 0$: $\lim\limits_{x\to\infty} v(x) = \lim\limits_{x\to\infty} v'(x) = -\infty$, $v''(x)$ klesá.

Ak je naviac $f'(x) \geqq 0$, potom pre $x > x_0$, x_0 dostatočne veľké, platí $f(x) > \dfrac{M}{2}$. Pretože je $\lim\limits_{x\to\infty} v(x) = -\infty$ a $v''(x) < 0$ platí

$$\lim_{x\to\infty} v''(x) = \lim_{x\to\infty} \left[- \int_{x_0}^{x} f(t)\,|v(t)|\,\mathrm{d}t + v''(x_0) \right] <$$

$$< \lim_{x\to\infty} \left[-\frac{M}{2} \int_{x_0}^{x} |v(t)|\, \mathrm{d}t + v''(x_0) \right] = -\infty$$

a tým je veta 3 úplne dokázaná.

Ak je $f(x) \leqq 0$, potom pre rovnicu (1) platí podobná nasledujúca veta. Jej dôkaz je podobný predchádzajúcemu.

Veta 4. *Nech funkcia $f(x) \in C_0(a, \infty)$ a $(f(x) \leqq 0$, pričom $f(x) = 0$ neplatí v žiadnom čiastočnom intervale intervalu (a, ∞). Potom existujú riešenia $u(x)$ a $v(x)$ rovnice (1), pre ktoré platí*

$u(x) \,.\, u'(x) \,.\, u''(x) \neq 0$; $u(x) < 0$, $u'(x) > 0$. $u''(x) \leqslant 0$: $\lim\limits_{x\to\infty} u'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} u''(x) = 0$. $\lim\limits_{x\to\infty} u(x)$ *existuje*,

$$v(x) \,.\, v'(x) \,.\, v''(x) \neq 0;\; v(x) > 0,\; v'(x) > 0,\; v''(x) > 0;\; \lim_{x\to\infty} v(x) = \lim_{x\to\infty} v'(x) = \infty.$$

$v''(x)$ *rastie*.

Keď predpokladáme naviac, že je $f'(x) \leqq 0$, potom pre riešenie $u(x)$ a $v(x)$ platí aj $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} v''(x) = \infty$.

V ďalšej úvahe budeme používať ešte niektoré dôsledky nasledujúcej vety ([3], str. 217).

Veta *Nech $y(x)$, $z(x)$ sú riešenia rovníc*

(2) $$y''' + f(x)\,y = 0$$

(3) $$z''' + g(x)\,z = 0$$

a vyhovujú tým istým začiatočným podmienkam v bode a. Nech funkcie $f(x)$, $g(x)$ sú spojité na $\langle a, b\rangle$ a nech na tomto intervale je $f(x) > g(x) \geqq 0$. Nech riešenie $\bar{z}(x)$ rovnice (3), ktoré vyhovuje začiatočným podmienkam $\bar{z}(a) = \bar{z}'(a) = 0$. $\bar{z}''(a) = 1$ je kladné v intervale (a, b) a nech je aj $y(x) > 0$ v intervale (a, b). Potom je $y(x) < z(x)$ na $(a, b\rangle$.

Dôsledok 1. *Nech v intervale $\langle a, b\rangle$ platí $f(x) \geqq g(x) \geqq 0$. Nech riešenie $z(x)$ rovnice (3), ktoré vyhovuje začiatočným podmienkam $z(a) = z'(a) = 0$, $z''(a) > 0$* má nulový bod $x_0 \in (a, b\rangle$. *Potom riešenie $y(x)$ rovnice (2), ktoré vyhovuje tým istým začiatočným podmienkam v bode a, má nulový bod v intervale $(a, x_0\rangle$.*

Dôsledok 2. *Nech je $f(x) \leqq g(x) \leqq 0$ v intervale $\langle c, a\rangle$. Nech riešenia $y(x)$, resp. $z(x)$ rovníc (2), resp. (3) vyhovujú v bode a začiatočným podmienkam $y(a) = y'(a) = z(a) = z'(a) = 0$, $y''(a) = z''(a) > 0$ a nech $z(x)$ má nulový bod $x_0 \in \langle c, a)$. Potom aj riešenie $y(x)$ má nulový bod v intervale $\langle x_0, a)$.*

Dôkaz. Dôsledok 1 plynie bezprostredne z uvedenej vety. Poznamenajme iba, že ak platí pre funkcie $f(x)$, $g(x)$ aj znamienko rovnosti, t. j. $f(x) \geqq g(x) \geqq 0$, potom aj pre riešenia $y(x)$, $z(x)$ zodpovedajúcich rovníc bude platiť neostrá nerovnosť, t. j. $y(x) \leqq z(x)$ v intervale $\langle a, b\rangle$. Táto poznámka vyplýva z dôkazu uvedenej vety.

Dôsledok 2 dostaneme, ak v rovniciach (2), (3) zavedieme transformáciu nezávisle premennej $x = 2a - t$. Potom pre $x \in \langle c, a\rangle$ platí, že $t \in \langle a, 2a - c\rangle$. Ďalej označme $y(x) = y(2a - t) = u(t)$, $z(x) = z(2a - t) = v(t)$, $f(x) = -f(2a - t) = f^*(t)$, $g(x) = g(2a - t) = g^*(t)$. Teda $u(t)$ a $v(t)$ vyhovujú rovniciam

$$u'''(t) - f^*(t)\,u(t) = 0,$$

$$v'''(t) - g^*(t)\,v(t) = 0$$

a platí $-f^*(t) \geqq -g^*(t) \geqq 0$ pre $t \in \langle a, 2a - c\rangle$. Použitím dôsledku 1 na riešenie $u(t)$ a $v(t)$ a spätným návratom ku riešeniu $y(x)$, $z(x)$ plynie správnosť dôsledku 2.

Veta 5. *Nech funkcia $f(x) \in C_0(x_0, \infty)$. Nech $x_1, \bar{x}_1, y_1, \bar{y}_1 \ldots, x_n, \bar{x}_n, y_n, \bar{y}_n, \ldots$ je rastúca postupnosť čísel z intervalu (x_0, ∞). Nech existuje taká kladná konštanta M^3, že pre funkciu $f(x)$ platia nerovnosti:*
$f(x) \geqq M^3$, ak $x \in \langle x_n, \bar{x}_n\rangle$ a $f(x) \leqq -M^3$, ak $x \in \langle y_n, \bar{y}_n\rangle$, $n = 1, 2, \ldots$. pri-

čom dĺžka intervalov je $d(\langle x_n, \bar{x}_n\rangle) \geqq \frac{8\pi}{3\sqrt{3}M}$, $d(\langle y_n, \bar{y}_n\rangle) \geqq \frac{8\pi}{3\sqrt{3}M}$. *Nech funkcia* $f(x)$ *má v intervaloch* $(\bar{x}_n, y_n), (\bar{y}_n, x_{n+1}), n = 1, 2, \ldots$ *práve jeden nulový bod. Potom každé riešenie rovnice* (1) *je oscilatorické.*

Dôkaz. Predovšetkým odhadneme vzdialenosť nulových bodov riešenia diferenciálnej rovnice $z''' + M^3z = 0$ s dvojnásobným nulovým bodom. Toto riešenie s dvojnásobným nulovým bodom x_0 má tvar

$$z(x) = \pm\frac{1}{2}Ae^{-Mx}\left\{e^{\frac{3}{2}Mx_0} + 2e^{\frac{3}{2}Mx} \, . \sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}M(x - x_0) - \frac{1}{6}\pi\right]\right\}.$$

Pre nulové body tohto riešenia platí:

$$-\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}M(x - x_0) - \frac{1}{6}\pi\right] = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}M(x-x_0)}$$

Vzdialenosť nulového bodu $\bar{x}$ funkcie $\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}M(x - x_0) - \frac{1}{6}\pi\right]$, ktorý je najbližšie vpravo k bodu x_0 je $\bar{x} - x_0 = \pi/(3\sqrt{3}M)$. Pretože vzdialenosť nulových bodov funkcie $\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}M(x - x_0) - \frac{1}{6}\pi\right]$ je $2\pi/\sqrt{3}M)$ a z vlastnosti funkcie exp $\left\{-\frac{3}{2}M(x - x_0)\right\}$ vyplýva, že pre vzdialenosť d nulových bodov riešenia $z(x)$ rovnice $z''' + M^3z = 0$ platí odhad:

$$d < 2\frac{\pi}{3\sqrt{3}M} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}M} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}M}.$$

Ten istý odhad platí aj pre riešenie s dvojnásobným nulovým bodom rovnice

$$z''' - M^3z = 0.$$

Pristúpme teraz k dôkazu vety 5. Dokážeme ju nepriamo. Nech existuje riešenie $y(x)$ rovnice (1), ktoré je kladné pre $x > x_0$. Potom z predpokladov vety vyplýva, že existujú intervaly $\langle y_{N-1}, \bar{y}_{N-1}\rangle$, $\langle x_N, \bar{x}_N\rangle$ ležiace vpravo od bodu x_0, medzi ktorými má funkcia $f(x)$ práve jeden nulový bod. Označme ho c_N. Riešenie $z(x)$ rovnice $z''' + M^3z = 0$ pri začiatočných podmienkach $z(x_N) = z'(x_N) = 0$, $z''(x_N) > 0$, má nulový bod v intervale $(x_N, \bar{x}_N)$, pretože vzdialenosť nulových bodov tohto riešenia je menšia ako dĺžka intervalu $(x_N, \bar{x}_N)$. Podľa dôsledku 1 aj riešenie $y_1(x)$ rovnice (1) so začiatočnými podmienkami $y_1(x_N) = y_1'(x_N) = 0$, $y_1''(x_N) = z''(x_N)$, má nulový bod v intervale $(x_N, \bar{x}_N)$, pretože pokiaľ je $y_1(x) > 0$, je $y_1(x)$ riešením i rovnice $y''' + f(x)\,y = 0$. Nulový bod riešenia $y_1(x)$ v intervale $(x_N, \bar{x}_N)$ označme a_N.

Z vlastnosti funkcie $f(x)$, že je $f(x) > 0$ pre $c_N < x \leqq \bar{x}_N$, $f(x) < 0$ pre $y_{N-1} \leqq x < c_N$ ukážeme, že aj riešenie $y_2(x)$ rovnice (1) s dvojnásobným nulovým bodom $c_N(y_2''(c_N) > 0)$ má nulový bod v intervale $(c_N, a_N\rangle$. Dokážeme to tiež nepriamo. Nech je $y_2(x) > 0$ na celom intervale $(c_N, a_N\rangle$ a teda aj na $\langle x_N, a_N\rangle$. Vynásobme funkciu $y_1(x)$ takou konštantou $c > 0$, aby funkcie $cy_1(x)$, $y_2(x)$ mali spoločný bod dotyku a nemali priesečník v intervale $\langle x_N, a_N\rangle$. Označme dotykový bod ξ. Potom $y_2(\xi) = cy_1(\xi)$, $y_2'(\xi) = cy_1'(\xi)$. Vzhľadom na to, že je $y_1(x) > 0$, $y_1'(x) < 0$ pre $x \in (c_N, x_N)$ (podľa lemy 1), existuje bod $a \in (c_N, x_N)$ pre ktorý platí $cy_1(a) = y_2(a)$, pričom je $y_2(x) - cy_1(x) \geqq 0$, $a \leqq x \leqq a_N$.

V intervale $\langle a, a_N\rangle$ je $\bar{y}_2(x) = y_2(x) - cy_1(x) \geqq 0$, $y_2(x) \geqq 0$ a $y_1(x) \geqq 0$ Preto $\bar{y}_2(x)$ je riešením rovnice (1) v tomto intervale a v bode ξ je $\bar{y}_2(\xi) = \bar{y}_2'(\xi) = 0$. Ukážeme, že aj $\bar{y}_2''(\xi) = 0$. Ak by bolo $\bar{y}_2''(\xi) > 0$, potom podľa lemy 1 je $y_2(x) > 0$ pre $x \in \langle a, \xi)$, t. j. $\bar{y}_2(a) > 0$, Z definície funkcie $\bar{y}_2(x)$ však vyplýva, že $\bar{y}_2(a) = 0$. Teda prípad $\bar{y}_2''(\xi) > 0$ nemôže nastať. Ak je $\bar{y}_2''(\xi) < 0$, potom z tej istej lemy dostaneme, že je $y_2(x) < 0$ pre $x \in (\xi, a_N\rangle$. Z definície funkcie $\bar{y}_2(x)$ však vyplýva $y_2(a_N) = y_2(a_N) - cy_1(a_N) > 0$. Z tohto sporu dostávame $\bar{y}_2''(\xi) = 0$, t. j. $y_2(x) = cy_1(x)$ na intervale $\langle a, a_N\rangle$. Z toho ale plynie, že $y_2(x)$ má nulový bod x_N a to je v spore s podmienkou, že $y_2(x)$ je kladné v intervale (c_N, a_N). Ukázali sme, že riešenie $y_2(x)$ rovnice (1) s dvojnásobným nulovým bodom $c_N(y_2''(c_N) > 0)$ má na intervale $(c_N, \bar{x}_N)$ nulový bod. Označme ho b_N.

Na začiatku dôkazu sme predpokladali, že je $y(x) > 0$ pre $x > x_0$. Môžu nastať dva prípady: $y'(c_N) \geqq 0$, alebo $y'(c_N) < 0$. Ak je $y'(c_N) > 0$ ukážeme, že $y(x)$ musí mať nulový bod v intervale $\langle c_N, b_N\rangle$. Podobne ako predtým vynásobme riešenie $y_2(x)$ konštantou $k > 0$ tak, aby funkcie $ky_2(x)$ a $y(x)$ mali v intervale (c_N, b_N) spoločný jediný bod a to bod dotyku η. Potom ako v predchádzajúcej časti ukážeme, že funkcia $\bar{y}(x) = y(x) - ky_2(x)$ je riešením rovnice (1) v intervale $\langle c_N, b_N\rangle$ a v bode η je $\bar{y}(\eta) = \bar{y}'(\eta) = 0$. Taktiež platí $\bar{y}''(\eta) = 0$. Skutočne, ak by bolo $\bar{y}''(\eta) > 0$, potom podľa lemy 1 by bolo $\bar{y}'(x) < 0$ pre $x \in \langle c_N, \eta)$, t. j. $\bar{y}'(c_N) < 0$. Z definície funkcie $\bar{y}(x)$ je však $\bar{y}'(c_N) \geqq 0$. Teda $\bar{y}''(\eta)$ nemôže byť kladná. Na druhej strane ak predpokladáme $\bar{y}''(\eta) < 0$, potom podľa tej istej lemy je $\bar{y}(x) < 0$ v intervale $(\eta, b_N\rangle$, t. j. $\bar{y}(b_N) < 0$, čo odporuje podmienke $\bar{y}(b_N) = y(b_N) - ky_2(b_N) > 0$. Z toho sporu plynie, že je $y(x) = ky_2(x)$, teda $y(x)$ má nulový bod b_N.

V druhom prípade, t. j. ak je $y'(c_N) < 0$ musíme celú úvahu zopakovať pre interval $\langle y_{N-1}, \bar{y}_{N-1}\rangle$. V krátkosti ju naznačíme. Riešenie $z(x)$ rovnice $z''' - M^3 z = 0$ pri začiatočných podmienkach $z(\bar{y}_{N-1}) = z'(\bar{y}_{N-1}) = 0$ $z''(\bar{y}_{N-1}) >$

> 0 má v intervale $(y_{N-1}, \bar{y}_{N-1})$ nulový bod. Z dôsledku 2 plynie, že i riešenie $y_1(x)$ rovnice (1) pri tých istých začiatočných podmienkach má v intervale $(y_{N-1}, \bar{y}_{N-1})$ nulový bod. Ďalej sa ukáže, že aj riš2nie $y_2(x)$ rovnice (1) s dvojnásobným nulovým bodom c_N, t. j. $y_2(c_N) = y_2'(c_N) = 0$, $y_2''(c_N) > 0$ má v intervale (y_{N-1}, c_N) nulový bod. Označme ho b_M.

Teraz ukážeme, že riešenie $y(x)$ pre ktoré platí $y'(c_N) < 0$, má v intervale $< b_M, c_N)$ nulový bod. Pretože je $y_2(x) > 0$ v intervale (b_M, c_N), existuje konštanta $l > 0$ taká, že funkcia $\bar{y}(x) = y(x) - ly_2(x)$ má v nejakom bode $\xi \in \in (b_M, c_N)$ dvojnásobný nulový bod, pričom pre $b_M \leqq x \leqq c_N$ je $y(x) - ly_2(x) \geqq \geqq 0$. Keďže je aj $y(x) \geqq 0$, $y_2(x) \geqq 0$ v tomto intervale, je $\bar{y}(x)$ riešením rovnice (1). Ukážeme ešte, že je $\bar{y}''(\xi) = 0$. Ak platí $\bar{y}''(\xi) > 0$, potom podľa lemmy 2 je $\bar{y}'(x) > 0$ v intervale $(\xi, c_N\rangle$, t. j. $\bar{y}'(c_N) > 0$. Na druhej strane však z definície $\bar{y}(x)$ je $\bar{y}'(c_N) < 0$. Teda nemôže byť $\bar{y}''(\xi) > 0$. Ak je $\bar{y}''(\xi) < 0$, je podľa tej istej lemy $\bar{y}(x) < 0$ pre $x \in \langle b_M \xi)$, t. j. $\bar{y}(b_M) < 0$, čo je zase v spore s definíciou funkcie $\bar{y}(x)$, pre ktorú platí $\bar{y}(b_M) > 0$. Z toho sporu vyplýva, že je $\bar{y}''(\xi) = 0$, teda $y(x) = ly_2(x)$. Preto má $y(x)$ nulový bod $b_M \in (y_{N-1}, c_N)$. Tým sme dokázali, že $y(x)$ nemôže byť kladné pre $x > x_0$, ako sme to predpokladali na začiatku dôkazu tejto vety.

Rovnica (1) je nelineárna, preto musíme ešte ukázať, že aj predpoklad $y(x) < 0$ pre $x > x_0$ dovedie k sporu. Položme $z(x) = - y(x)$. Potom $z(x)$ vyhovuje rovnici

$$z''' - f(x)\,|z| = 0$$

pričom je $z(x) > 0$ pre $x > x_0$. Pre funkciu $- f(x)$ potom platí $- f(x) \leqq - M^3$ na intervale $\langle x_N, \bar{x}_N)$ a $- f(x) \geqq M^3$ na $\langle y_N, \bar{y}_N\rangle$. Teda funkcia $- f(x)$ spĺňa tie podmienky, za ktorých sme už vetu dokázali. Preto $z(x)$ a teda aj $y(x)$ musí mať vpravo od bodu x_0 nulový bod aj v tomto prípade.

Funkcie, ktoré spĺňajú podmienky vety 5 sú napríklad $x^k \cos x$, $x^k \sin x$, kde k je ľubovoľná kladná konštanta.

Našli sme príklad funkcie, ktorá je oscilatorická a všetky riešenia rovnice (1) sú oscilatorické tiež. Taktiež sme ukázali, že ak je $f(x) \geqq 0$ alebo $f(x) \leqq 0$, potom podľa vety 2 sú všetky riešenia rovnice (1) neoscilatorické. Poznamenajme ešte, že ak $f(x)$ spĺňa podmienku

$$\int_{x_0}^{\infty} x^2\,|f(x)|\,dx < \infty$$

potom podľa vety 1 z práce [4], str. 289 je každé riešenie rovnice (1) neoscilatorické.

LITERATÚRA

[1] Rovder J., *Niektoré vlastnosti diferenciálnej rovnice $y'' + f(x)|y| = 0$*. Mat. časop. *19* (1969), 53—62.

[2] Švec M., *Einige asymptotische und oszillatorische Eigenschaften der Differentialgleichung* $y''' + A(x)y' + B(x)y = 0$, Czechosl. Math. J. *15* (90), 378—393.
[3] Mikusinski J., *Sur l'équation* $x^{(n)} + A(t)x = 0$, Ann. polon. math. I. 2 (1955), 207—221.
[4] Haupt O., *Über das asymptotische Verhalten der Lösungen gewisser linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Math. Z. *48* (1942—1943), 289—293.

Došlo 27. 1. 1968.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Strojníckej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej.
Bratislava

SOME PROPERTIES OF THE DIFFERENTIAL EQUATION $y''' + f(x)\,|y| = 0$

Jozef Rovder

Summary

In this paper some oscilatory and asymptotic properties of solution of the equation (1) are studied. It is proved:

Theorem 2. *Let $f(x) \in C_0(a, b)$ and $f(x) \geqq 0$ or $f(x) \leqq 0$ in the interval (a, b). Then every solution of the equation (1) has at most three zeros (including multiplicity) in the interval (a, b).*

Theorem 3. *Let $f(x) \in C_0(a, \infty)$, $f(x) \geqq 0$ in the interval (a, ∞) and suppose that function $f(x)$ does not equal in any sub-interval of the interval (a, ∞). Then there exists a solution $u(x)$, $v(x)$ of the equation (1) such that*

$$u(x) \,.\, u'(x) \,.\, u''(x) \neq 0,\ u(x) > 0,\ u'(x) < 0,\ u''(x) > 0,\ \lim_{x\to\infty} u'(x) = \lim_{x\to\infty} u''(x) = 0$$

$\lim\, u(x)$ *exists and is finite,*

$$v(x) \,.\, v'(x) \,.\, v''(x) \neq 0,\ v(x) < 0,\ v'(x) > 0,\ v''(x) < 0,\ \lim_{x\to\infty} v(x) = \lim_{x\to\infty} v'(x) = -\infty,$$

$v''(x)$ is decreasing.

If, furthermore it is $f'(x) \geqq 0$, then it holds also $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} v''(x) = -\infty$

Theorem 5. *Let $f(x) \in C_0(x_0, \infty)$ and $x_1, \bar{x}_1, y_1, y_1, \ldots, x_n, \bar{x}_n, y_n, \bar{y}_n, \ldots$ be the sequence increasing of numbers in the interval (x_0, ∞). Suppose that there exists constant $M^3 > 0$ such that*

$$f(x) \geqq M^3, \text{ if } x \in \langle x_n,\ x_n \rangle,\ f(x) \leqq -M^3 \text{ if } x \in \langle y_n, y_n \rangle,$$

where these intervals have the lenghts with the following properties

$$\mathrm{d}(\langle x_n, x_n \rangle) \geqq \frac{8\pi}{3\sqrt{3M}}, \quad \mathrm{d}(\langle y_n, \bar{y}_n \rangle) \geqq \frac{8\pi}{3\sqrt{3M}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Suppose that function $f(x)$ has in the intervals (x_n, y_n), (y_n, x_{n+1}) for all $n = 1, 2, \ldots$ only one zero. Then every solution of the equation (1) is oscillatory.