Robert Šulka

Poznámka o izomorfizme topologických faktoroidov

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 6 (1956), No. 3, 137--142

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126368

POZNÁMKA O IZOMORFIZME TOPOLOGICKÝCH FAKTOROIDOV

ROBERT ŠULKA
Katedra deskriptívnej geometrie Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

V tomto článku nadväzujem na prácu [3] a na tam zavedené pojmy topologického rozkladu, topologického grupoidu a topologického faktoroidu. V súhlase s tým používam väčšinou tie isté označenia ako v práci [3].

Poznámka 1. Prvky topologického priestoru G budeme označovať x, y, z, a, b, ... jeho úplný systém okolí Σ a okolia z Σ budeme označovať U, V, W, ...; prvky rozkladu $[G]_1$ na G budeme označovať $X_1, Y_1, Z_1, A_1, B_1, \ldots$, úplný systém okolí topologického priestoru $[G]_1$ budeme označovať Σ_1 a okolia z Σ_1 budeme označovať U_1, V_1, W_1, ...; prvky rozkladu $[G]_2$ na G budeme označovať $X_2, Y_2, Z_2, A_2, B_2, \ldots$, úplný systém okolí topologického priestoru $[G]_2$ budeme označovať Σ_2 a okolia z Σ_2 budeme označovať $U_2, V_2, W_2, \ldots$; prvky rozkladu $\{G\}$ na $[G]_1$ budeme označovať $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., úplný systém okolí topologického priestoru $\{G\}$ budeme označovať Σ^* a jeho okolia U^*, V^*, W^*, ... Topologické priestory G, $[G]_1$, $[G]_2$, $\{G\}$ a ich úplné systémy okolí sú definované tak ako v článku [3]. Pritom označovanie okolí je tak volené, že U_1 je množinou všetkých tried $X_1 \in [G]_1$, pre ktoré $X_1 \cap U \neq 0$, V_1 je množinou všetkých tried $Y_1 \in [G]_1$, pre ktoré $Y_1 \cap V \neq 0$ atď. ...; U_2 je množinou všetkých tried $X_2 \in [G]_2$, pre ktoré $X_2 \cap U \neq 0$, V_2 je množinou všetkých tried $Y_2 \in [G]_2$, pre ktoré $Y_2 \cap V \neq 0$ atď. ...; U^* je množinou všetkých tried $\mathfrak{X} \in \{G\}$, pre ktoré $\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0$, V^* je množinou všetkých tried $\mathfrak{Y} \in \{G\}$, pre ktoré $\mathfrak{Y} \cap V_1 \neq 0$ atď. ...

Nech $[G]_1$ je rozklad na množine G a $\{G\}$ rozklad na množine $[G]_1$. Potom môžeme vytvoriť nový rozklad $[G]_2$ na množine G, definovaný tak, že každá trieda X_2 rozkladu $[G]_2$ je súčtom všetkých tých tried X_1 rozkladu $[G]_1$, ktoré sú prvkami tej istej triedy $\mathfrak{X}$ rozkladu $\{G\}$. To môžeme napísať takto: $X_2 = \bigcup_{X_1 \in \mathfrak{X}} X_1$ pre každú triedu $X_2 \in [G]_2$. Potom hovoríme, že rozklad $[G]_2$, je zákrytom rozkladu $[G]_1$, vynúteným rozkladom $\{G\}$. O rozklade $[G]_1$ hovoríme, že je zjemnením rozkladu $[G]_2$ (pozri [1]).

Poznámka 2. V ďalšom volíme označenie tried $X_2, Y_2, Z_2, \ldots$ z $[G]_2$ a tried $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \ldots$ z $\{G\}$ tak, aby platili vzťahy $X_2 = \bigcup_{X_1 \in \mathfrak{X}} X_1$, $Y_2 = \bigcup_{Y_1 \in \mathfrak{Y}} Y_1 \ldots$

Veta 1. *Nech G je topologický priestor a Σ jeho úplný systém okolí. Nech $[G]_1$ je topologický rozklad na G a Σ_1 nech je úplný systém okolí topologického priestoru $[G]_1$. Nech $\{G\}$ je topologický rozklad na $[G]_1$. Potom zákryt $[G]_2$ rozkladu $[G]_1$ vynútený rozkladom $\{G\}$ je tiež topologickým rozkladom.*

Dôkaz. Máme dokázať, že $\bigcup_{X_2 \cap U \neq 0} X_2$ je otvorená množina. Dokážeme si najprv, že $X_2 \cap U \neq 0$ vtedy a len vtedy, ak $\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0$ (kde pre $\mathfrak{X}$ a X_2 platí $X_2 = \bigcup_{X_1 \in \mathfrak{X}} X_1$).

Nech teda $X_2 \cap U \neq 0$, to znamená, že $\bigcup_{X_1 \in \mathfrak{X}} X_1 \cap U \neq 0$. Potom existuje také $X_1 \in \mathfrak{X}$, že $X_1 \cap U \neq 0$. Teda existuje $X_1 \in \mathfrak{X}$, že $X_1 \in U_1$ a preto $\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0$. Nech naopak $\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0$. V tom prípade existuje také X_1, že $X_1 \in \mathfrak{X}$ a $X_1 \in U_1$. Teda existuje $X_1 \in \mathfrak{X}$, že $X_1 \cap U \neq 0$. Z toho plynie že $X_2 \cap U = \bigcup_{X_1 \in \mathfrak{X}} X_1 \cap U \neq 0$, čo sme mali dokázať.

Pre každé X_2 platí $X_2 = \bigcup_{X_1 \in \mathfrak{X}} X_1$. Pre tie X_2, pre ktoré $X_2 \cap U \neq 0$ a len pre tie X_2 platí $\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0$. Teda pre tie X_2, pre ktoré $X_2 \cap U \neq 0$, je $\bigcup_{X_2 \cap U \neq 0} X_2 = \bigcup_{X_1 \in \mathfrak{X}} X_1 = \bigcup_{X_1 \in M} X_1$, kde $M = \bigcup_{\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0} \mathfrak{X}$. No $M = \bigcup_{\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0} \mathfrak{X}$ je otvorená množina, pretože $\{G\}$ je topologický rozklad. Teda existuje taký systém Ω_1 okolí $V_1 \in \Sigma_1$, že $\bigcup_{V_1 \in \Omega_1} V_1 = \bigcup_{\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0} \mathfrak{X} = M$. No $\bigcup_{X_1 \in V_1} X_1$ pre každé V_1 je otvorená množina v G, pretože $[G]_1$ je topologickým rozkladom a preto $\bigcup_{X_2 \cap U \neq 0} X_2 = \bigcup_{X_1 \in M} X_1$. (kde $M = \bigcup_{V_1 \in \Omega_1} V_1$) ako súčet otvorených množín $\bigcup_{X_1 \in V_1} X_1$ je tiež otvorená.

Zostáva nám ešte dokázať, že každá množina X_2 je uzavrená v G. K tomu stačí dokázať, že množina $G - X_2$ je otvorená v G. Pre túto množinu môžeme písať $G - X_2 = \bigcup_{X_1 \notin \mathfrak{X}} X_1$. Pretože však $\mathfrak{X}$ je uzavretá v $[G]_1$, je $[G]_1 - \mathfrak{X}$ otvorená v $[G]_1$. Existuje teda taký systém Π_1 okolí $V_1 \in \Sigma_1$, že $[G]_1 - \mathfrak{X} = \bigcup_{V_1 \in \Pi_1} V_1$ a máme $G - X_2 = \bigcup_{X_1 \notin \mathfrak{X}} X_1 = \bigcup_{X_1 \in [G]_1 - \mathfrak{X}} X_1 = \bigcup_{X_1 \in P} X_1$, kde $P = \bigcup_{V_1 \in \Pi_1} V_1$. Nakoľko však $\bigcup_{X_1 \in V_1} X_1$ pre každé $V_1 \in \Sigma_1$ je otvorená množina v G ($[G]_1$ je totiž topologickým rozkladom), je aj $G - X_2 = \bigcup_{X_1 \in P} X_1$, ako súčet otvorených množín $\bigcup_{X_1 \in V_1} X_1$ otvorenou množinou v G a dôkaz je ukončený.

Nech $[G]_1$ a $[G]_2$ sú dva rozklady na množine G. Nech každá trieda X_2 rozkladu $[G]_2$ je súčtom niektorých tried X_1 rozkladu $[G]_1$. Potom môžeme definovať rozklad $\{G\}$ na množine $[G]_1$ takto: každá trieda $\mathfrak{X}$ rozkladu $\{G\}$ obsahuje práve všetky triedy X_1 rozkladu $[G]_1$, ktoré sú incidentné s tou istou triedou X_2 rozkladu $[G]_2$. O rozklade $[G]_2$ zase hovoríme, že je zákrytom rozkladu $[G]_1$, vynúteným rozkladom $\{G\}$ a o rozklade $[G]_1$, že je zjemnením rozkladu $[G]_2$ (pozri [1]).

Veta 2. *Nech G je topologický priestor a Σ jeho úplný systém okolí. Nech $[G]_1$ je topologický rozklad na G a Σ_1 úplný systém okolí topologického priestoru $[G]_1$. Nech $[G]_2$ je tiež topologickým rozkladom na G a nech je zákrytom rozkladu $[G]_1$. Σ_2 nech je úplným systémom okolí topologického priestoru $[G]_2$. Potom na množine $[G]_1$ existuje rozklad $\{G\}$, ktorý je topologickým rozkladom, ktorý vynucuje zákryt $[G]_2$ rozkladu $[G]_1$.*

Dôkaz. Zaveďme označenie $F = \bigcup\limits_{\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0} \mathfrak{X}$. Dokážeme teraz, že každá množina F je otvorená. Pre $\mathfrak{X}$ platí $\bigcup\limits_{X_1 \in \mathfrak{X}} X_1 = X_2$. Ďalej $\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0$ platí vtedy a len vtedy, ak $X_2 \cap U \neq 0$. Teda pre $X_1 \in \bigcup\limits_{\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0} \mathfrak{X} = F$ je $\bigcup\limits_{X_1 \in F} X_1 = \bigcup\limits_{X_2 \cap U \neq 0} X_2$. Pretože však $[G]_2$ je topologickým rozkladom, je $\bigcup\limits_{X_2 \cap U \neq 0} X_2$ otvorenou množinou v G. Existuje teda taký systém Φ okolí $V \in \Sigma$, že $\bigcup\limits_{V \in \Phi} V = \bigcup\limits_{X_2 \cap U \neq 0} X_2 = \bigcup\limits_{X_1 \in F} X_1$, čiže $\bigcup\limits_{V \in \Phi} V = \bigcup\limits_{X_1 \in F} X_1$. Označme znakom Ψ_1 systém všetkých okolí $V_1 \in \Sigma_1$, pre ktoré $V \in \Phi$ a nech $P = \bigcup\limits_{V_1 \in \Psi_1} V_1$. Pretože $\bigcup\limits_{V \in \Phi} V = \bigcup\limits_{X_1 \in F} X_1$ je pre $V \in \Phi$ $V \cap X_1 \neq 0$ iba ak $X_1 \in F$. Teda iba prvky $X_1 \in F$ patria do okolí $V_1 \in \Psi_1$ a teda aj do $P = \bigcup\limits_{V_1 \in \Psi_1} V_1$. Preto $P \subset F$. No na druhej strane z tej istej rovnice vyplýva, že každé $X_1 \in F$ má neprázdny prenik s niektorým $V \in \Phi$, teda pre niektoré $V \in \Phi$ platí $X_1 \cap V \neq 0$. To však znamená, že $X_1 \in V_1 \in \Psi_1$ a preto tiež $X_1 \in P = \bigcup\limits_{V_1 \in \Psi_1} V_1$. Teda $F \subset P$, ale pretože je tiež $P \subset F$, platí $F = P$, čiže $F = \bigcup\limits_{\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0} \mathfrak{X} = \bigcup\limits_{V_1 \in \Psi_1} V_1$ a je to otvorená množina, ako sme mali dokázať (pretože okolia V_1 sú otvorené).

Ďalej dokážeme, že každá množina $\mathfrak{X} \in \{G\}$ je uzavretá v $[G]_1$. Utvorme množinu $[G]_1 - \mathfrak{X}$. Stačí dokázať, že táto je otvorená. $G - X_2$ je otvorená v G. Teda existuje taký systém Ω okolí $V \in \Sigma$, že $G - X_2 = \bigcup\limits_{V \in \Omega} V$. Ďalej $G - X_2 = G - \bigcup\limits_{X_1 \in \mathfrak{X}} X_1 = \bigcup\limits_{X_1 \notin \mathfrak{X}} X_1 = \bigcup\limits_{\mathfrak{X}_1 \in [G]_1 - \mathfrak{X}} X_1 = \bigcup\limits_{V \in \Omega} V$, čiže $\bigcup\limits_{X_1 \in [G]_1 - \mathfrak{X}} X_1 = \bigcup\limits_{V \in \Omega} V$. Označme Π_1 systém všetkých okolí V_1, pre ktoré $V \in \Omega$ a nech $R = \bigcup\limits_{V_1 \in \Pi_1} V_1$. Pretože $\bigcup\limits_{X_1 \in [G]_1 - \mathfrak{X}_1} X_1 = \bigcup\limits_{V \in \Omega} V$, platí pre $X_1 \in [G]_1 - \mathfrak{X}$ a len pre tieto X_1, že ich prenik s nejakým okolím $V \in \Omega$ je neprázdny, teda $X_1 \cap V \neq 0$. To však znamená, že $X_1 \in [G]_1 - \mathfrak{X}$ a len tieto X_1 patria do okolí $V_1 \in \Pi_1$ a teda tiež do $R = \bigcup\limits_{V_1 \in \Pi_1} V_1$. Preto $\bigcup\limits_{V_1 \in \Pi_1} V_1 = [G]_1 - \mathfrak{X}$ a tým je dôkaz hotový, pretože V_1 sú otvorené.

Príklad 1. Množina G nech je množinou všetkých usporiadaných dvojíc (ξ_1, ξ_2) reálnych čísel väčších ako 0. Táto množina je grupoidom, ak násobenie dvoch prvkov $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$ definujeme takto: $xy = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2)$. Ďalej je táto množina topologickým priestorom, ak napr. za úplný systém okolí Σ berieme systém všetkých okolí U, ktoré sú definované takto: U je množina všetkých dvojíc $x = (\xi_1, \xi_2)$, ktoré splňujú nerovnosti $0 \leqq |\xi_1 - \alpha_1| < \varepsilon$, $0 \leqq |\xi_2 - \alpha_2| < \varepsilon$, kde $(\alpha_1, \alpha_2) = a \in G$ a ε je nejaké kladné reálne číslo. Ukážeme teraz, že G je topologickým grupoidom. Majme dva ľubovoľné prvky $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ a $b = (\beta_1, \beta_2)$ z G. Nech W je ľubovoľné okolie prvku ab. W nech je množina všetkých prvkov $z = (\zeta_1, \zeta_2)$, ktoré splňujú nerovnosti $0 \leqq |\zeta_1 - (\alpha_1 + \beta_1)| < \varepsilon$, $0 \leqq |\zeta_2 - (\alpha_2 + \beta_2)| < \varepsilon$. Vezmime za okolie U prvku a množinu všetkých prvkov $x = (\xi_1, \xi_2)$, ktoré splňujú nerovnosti $0 \leqq |\xi_1 - \alpha_1| < \frac{\varepsilon}{2}$, $0 \leqq |\xi_2 - \alpha_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ a za okolie V prvku b množinu všetkých prvkov $y = (\eta_1, \eta_2)$, ktoré splňujú nerovnosti $0 \leqq |\eta_1 - \beta_1| < \frac{\varepsilon}{2}$, $0 \leqq |\eta_2 - \beta_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom zrejme $0 \leqq |(\xi_1 + \eta_1) - (\alpha_1 + \beta_1)| < \varepsilon$, $0 \leqq |(\xi_2 + \eta_2) - (\alpha_2 + \beta_2)| < \varepsilon$, z čoho vyplýva, že $UV \subset W$, čo sme mali dokázať (pozri [3]).

Definujme si teraz rozklad $[G]_1$ na G: Nech α_1 a α_2 sú reálne čísla, $\alpha_1 > 0$ a $\alpha_2 \in (0, 1>$; nech potom $X_1 = \{(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2 + 1), (\alpha_1, \alpha_2 + 2), \ldots\}$ je triedou rozkladu $[G]_1$. Tento rozklad je topologickým rozkladom, pretože jednak každá trieda X_1 je uzavrenou množinou v G a jednak $\bigcup\limits_{X_1 \cap U \neq 0} X_1$ je otvorenou množinou v G pre každé U. Preto rozklad $[G]_1$ je topologickým priestorom (pozri [3]). Jeho úplný systém okolí označme Σ_1. Ďalej dokážeme, že rozklad $[G]_1$ je vytvárajúcim rozkladom. Nech $A_1 = \{(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2 + 1), \ldots\}$ a $B_1 = \{(\beta_1, \beta_2), (\beta_1, \beta_2 + 1), \ldots\}$ sú dva ľubovolné prvky rozkladu $[G]_1$. Potom dostávame $A_1B_1 = \{(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2), (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2 + 1), \ldots\}$ a platí $A_1B_1 \subset C_1 = \{(\gamma_1, \gamma_2), (\gamma_1, \gamma_2 + 1), \ldots\}$, pričom $\alpha_1 + \beta_1 = \gamma_1$ a $\alpha_2 + \beta_2 = \gamma_2$, ak $\alpha_2 + \beta_2 \leqq 1$ alebo $\alpha_2 + \beta_2 = \gamma_2 + 1$, ak $\alpha_2 + \beta_2 > 1$. To však znamená, že rozklad $[G]_1$ je topologickým faktoroidom na G. Definujme si ďalej rozklad $[G]_2$ na G takto: Nech množina X_2, ktorej prvky x sú tvaru $x = (\xi_1, \xi_2)$ — pričom ξ_2 prebieha pre každú množinu X_2 všetky reálne čísla väčšie ako 0 a ξ_1 je pre každú množinu X_2 konštantné, $\xi_1 \in (0, \infty)$ — je triedou rozkladu $[G]_2$. Tento rozklad je tiež topologickým rozkladom, pretože každá trieda $X_2 \in [G]_2$ je uzavretá množina v G a každá množina $\bigcup\limits_{X_2 \cap U \neq 0} X_2$ je otvorená množina v G. Rozklad $[G]_2$ je však tiež vytvárajúcim rozkladom. Nech A_2 a B_2 sú dve triedy z $[G]_2$. Prvky triedy A_2 nech sú tvaru $a = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1 \in (0, \infty)$, $\alpha_2 \in (0, \infty)$. Prvky triedy B_2 nech sú tvaru $b = (\beta_1, \beta_2)$, $\beta_1 \in (0, \infty)$, $\beta_2 \in (0, \infty)$. Potom prvky súčinu A_2B_2 majú tvar $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) = (\gamma_1, \gamma_2) = c$, kde $\alpha_1 + \beta_1 = \gamma_1$, $\alpha_2 + \beta_2 = \gamma_2$, $\gamma_1 \in (0, \infty)$, $\gamma_2 \in (0, \infty)$. Všetky tieto prvky c sú však prvkami tej istej triedy $C_2 \in [G]_2$. Preto rozklad $[G]_2$ je tiež topologickým faktoroidom na G. Podľa toho, ako sme utvorili rozklad $[G]_2$, je vidieť, že $[G]_2$ je zákrytom rozkladu $[G]_1$. Pritom každá trieda $X_2 \in [G]_2$ je súčtom všetkých tých tried $X_1 \in [G]_1$, ktorých prvky $x = (\xi_1, \xi_2) \in X_1$ majú na prvom mieste to isté číslo $\xi_1 \in (0, \infty)$. Zákryt $[G]_2$ rozkladu $[G]_1$ je vynútený istým rozkladom $\{G\}$ rozkladu $[G]_1$. Každá trieda $\mathfrak{X}$ rozkladu $\{G\}$ obsahuje ako prvky všetky tie triedy $X_1 \in [G]_1$, ktorých prvky $x = (\xi_1, \xi_2)$ majú na prvom mieste to isté číslo $\xi_1 \in (0, \infty)$. Podľa vety 2 je rozklad $\{G\}$ topologickým rozkladom.

Nech G je grupoid, $[G]_1$ vytvárajúci rozklad na G a $[G]_2$ zákryt rozkladu $[G]_1$, vynútený rozkladom $\{G\}$ rozkladu $[G]_1$. Potom rozklady $[G]_2$ a $\{G\}$ sú vytvárajúcimi súčasne (pozri [1]). $[G]_1$, $[G]_2$ a $\{G\}$ sú faktoroidmi.

Veta 3. *Nech G je topologický grupoid a Σ jeho úplný systém okolí. Nech $[G]_1$ je topologický faktoroid na G (pozri [3]). Nech $\{G\}$ je topologický faktoroid na $[G]_1$. Potom faktoroid $[G]_2$, ktorý je zákrytom topologického faktoroidu $[G]_1$, vynúteným topologickým faktoroidom $\{G\}$, je tiež topologickým faktoroidom.*

Veta 4. *Nech G je topologický grupoid a Σ jeho úplný systém okolí. Nech $[G]_1$ a $[G]_2$ sú topologické faktoroidy na G. Nech $[G]_2$ je zákrytom topologického faktoroidu $[G]_1$, vynúteným faktoroidom $\{G\}$ na $[G]_1$. Potom faktoroid $\{G\}$ je tiež topologickým faktoroidom.*

Dôkaz. Obidve vety sú priamymi dôsledkami vety 1, 2 a vety 3 z [3].

Príklad 2. Rozklad $\{G\}$ z príkladu 1 je podľa vety 4 topologickým faktoroidom.

Veta 5. *Nech G je topologický grupoid* a Σ *jeho úplný systém okolí. Nech $[G]_1$ je topologický faktoroid na G. Nech ďalej $[G]_2$ je rozkladom na G a zákrytom topologického faktoroidu $[G]_1$, vynúteným rozkladom $\{G\}$ na $[G]_1$. Nech niektorý z rozkladov $[G]_2$* a *$\{G\}$ je topologickým faktoroidom. Potom je topologickým faktoroidom aj druhý z týchto rozkladov a tieto topologické faktoroidy sú izomorfné*

Dôkaz. Prvá časť tejto vety vyplýva z vety 3 a 4. Zostáva dokázať izomorfizmus topologických faktoroidov $[G]_2$ a $\{G\}$. Že $[G]_2$ a $\{G\}$ sú izomorfné ako faktoroidy, to je známe (pozri [1]). Pritom každej triede $\mathfrak{X} \in \{G\}$ je jedno — jednoznačne priradená tá trieda $f(\mathfrak{X}) = X_2 \in [G]_2$, pre ktorú platí $X_2 = \bigcup_{X_1 \in \mathfrak{X}} X_1$, kde $X_1 \in [G]_1$. Máme ešte dokázať spojitosť izomorfného zobrazenia f $\{G\}$ na $[G]_2$ a k nemu inverzného zobrazenia f^{-1}. Pri dokazovaní vety 1 sme ukázali, že $X_2 \cap U \neq 0$ vtedy a len vtedy, ak $\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0$, pričom platí $X_2 = \bigcup_{X_1 \in \mathfrak{X}} X_1$, $X_1 \in [G]_1$. Nech $\mathfrak{A}$ je ľubovoľný prvok z $\{G\}$. Tento sa zobrazí na prvok $f(\mathfrak{A}) = A_2$, pre ktorý platí $A_2 = \bigcup_{A_1 \in \mathfrak{A}} A_1$, $A_1 \in [G]_1$. Nech U_2 je ľubovoľné okolie triedy A_2. Všimnime si, že okolie U_2 triedy A_2 tvoria všetky tie triedy X_2, pre ktoré $X_2 \cap U \neq 0$. K okoliu $U_2 \in \Sigma_2$ existuje podľa poznámky 1 okolie $U \in \Sigma$, k okoliu $U \in \Sigma$ existuje okolie $U_1 \in \Sigma_1$ a k tomuto existuje okolie $U^* \in \Sigma^*$. Prvkami okolia U^* sú všetky triedy $\mathfrak{X} \in \{G\}$, pre ktoré platí $\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0$. Pretože $A_2 \in U_2$, je $A_2 \cap U \neq 0$. No pretože $X_2 \cap U \neq 0$ vtedy a len vtedy, ak $\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0$, vyplýva zo vzťahu $A_2 \cap U \neq 0$, že $\mathfrak{A} \cap U_1 \neq 0$ a teda $\mathfrak{A} \in U^*$. Triedy $\mathfrak{X} \in U^*$ sa zobrazia do tried $X_2 = f(\mathfrak{X})$, pre ktoré $X_2 = \bigcup_{X_1 \in \mathfrak{X}} X_1$,

$X_1 \in [G]_1$. Ako sme však vyššie videli, platí pre tieto triedy X_2 vzťah $X_2 \cap U \neq 0$ (pretože $\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0$), patria teda tieto triedy do U_2 a preto je $f(U^*) \subset U_2$, čiže zobrazenie f je spojité. Nech teraz naopak U^* je ľubovoľné okolie triedy $\mathfrak{A}$. Prvky tohto okolia sú všetky triedy $\mathfrak{X}$, pre ktoré $\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0$. K okoliu $U^* \in \Sigma^*$ existuje okolie $U_1 \in \Sigma_1$, k okoliu $U_1 \in \Sigma_1$ existuje okolie $U \in \Sigma$ a k tomuto existuje okolie $U_2 \in \Sigma_2$. Prvkami okolia U_2 sú všetky triedy $X_2 \in [G]_2$, pre ktoré platí $X_2 \cap U \neq 0$. Pretože $\mathfrak{A} \in U^*$, je $\mathfrak{A} \cap U_1 \neq 0$. Pretože však $X_2 \cap U \neq 0$ vtedy a len vtedy, ak $\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0$, vyplýva zo vzťahu $\mathfrak{A} \cap U_1 \neq 0$, že $A_2 \cap U \neq 0$ a teda $A_2 \in U_2$. Pretože však platí $A_2 = \bigcup_{A_1 \in \mathfrak{A}} A_1$, $A_1 \in [G]_1$, je $f(\mathfrak{A}) = A_2 \in U_2$. Pre triedy $X_2 \in U_2$ potom je $f^{-1}(X_2) = \mathfrak{X}$, pričom pre $\mathfrak{X}$ a X_2 platí $X_2 = \bigcup_{X_1 \in \mathfrak{X}} X_1$, $X_1 \in [G]_1$. Podľa uvedeného však pre tieto $\mathfrak{X}$ platí $\mathfrak{X} \cap U_1 \neq 0$, (pretože $X_2 \cap U \neq 0$), teda tieto $\mathfrak{X}$ patria do okolia U^*, z čoho $f^{-1}(U_2) \subset U^*$ a veta je dokázaná.

Príklad 3. Topologické faktoroidy $[G]_2$ a $\{G\}$ z príkladu 2 sú podľa vety 5 izomorfné ako topologické grupoidy.

LITERATÚRA

1. Borůvka O., Úvod do theorie grup, Praha 1952. 2. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, Москва 1954. 3. Šulka R., Topologické grupoidy, Matematicko-fyzikálny časopis, Bratislava 1955.

Došlo 10. XII. 1955.

ЗАМЕТКА К ИЗОМОРФИЗМУ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОИДОВ

РОБЕРТ ШУЛКА

Выводы

В статьи доказана лемма: Пусть G топологический группоид и Σ его полная система окрестностей. Пусть $[G]_1$ топологический фактороид на G. Пусть $[G]_2$ разбиение на G и закрытые топологического фактороида $[G]_1$ вынужденное разбиением $\{G\}$ на $[G]_1$. Пусть одно из разбиений $[G]_2$ и $\{G\}$ топологический фактороид. Тогда другое разбиение тоже топологический фактороид и эти топологические фактороиды изоморфны.