Matematicko-fyzikálny časopis

Ján Horniaček

Zobrazenie súčinu projektívnych príbuzností na priamke

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 11 (1961), No. 1, 45--56

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126352`

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 11, 1, 1961

ZOBRAZENIE SÚČINU PROJEKTÍVNYCH PRÍBUZNOSTÍ NA PRIAMKE

JÁN HORNIAČEK, Bratislava

Práca [1] sa zaoberá zobrazením projektívnych príbuzností na priamke na projektívny trojrozmerný priestor. Rovnicami

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$

kde $a_{11}, \ldots, a_{22}$ sú reálne čísla, pre ktoré platí $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 \neq 0$, je určená projektívna príbuznosť na priamke, v ktorej bodu o projektívnych súradniciach (x_1, x_2) odpovedá bod (x_1', x_2'). Táto príbuznosť sa nezmení, ak miesto čísel $a_{11}, \ldots, a_{22}$ dosadíme čísla $\lambda a_{11}, \ldots, \lambda a_{22}$. Teda každej takejto príbuznosti môžeme priradiť bod trojrozmerného projektívneho priestoru o súradniciach $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$. Príbuznosti, pre ktoré platí $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, sú regulárne projektivity; tie, pre ktoré platí $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, sú singulárne projektivity. Ak položíme

$$a_{11} = y_1, \quad a_{12} = y_2, \quad a_{21} = y_3, \quad a_{22} = y_4, \tag{1}$$

potom body odpovedajúce singulárnym projektivitám vyhovujú rovnici

$$y_1y_4 - y_2y_3 = 0, \tag{2}$$

čo je regulárna priamková kvadrika Q. Identická projektivita

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= \quad x_2, \end{aligned} \tag{3}$$

sa zobrazí do bodu $E(1, 0, 0, 1)$.

Tento článok sa bude zaoberať kolineáciami určenými súčinmi projektívnych príbuzností $\boldsymbol{B}$. $\boldsymbol{A}$.

Nech príbuznosť $\boldsymbol{B}$ je pevná, určená rovnicami

$$\begin{aligned} x_1' &= b_1x_1 + b_2x_2, \\ x_2' &= b_3x_1 + b_4x_2; \end{aligned} \tag{4}$$

príbuznosť $\boldsymbol{A}$ nech je premenná, daná rovnicami

$$\begin{aligned} x_1'' &= a_{11}x_1' + a_{12}x_2', \\ x_1'' &= a_{21}x_1' + a_{22}x_2'. \end{aligned} \tag{5}$$

Príbuznosti $\mathbf{B}$ je priradený bod $B(b_1, b_2, b_3, b_4)$, príbuznosti $\mathbf{A}$ bod $A(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$. Pre súčin $\mathbf{B} . \mathbf{A}$ v tomto poradí po malej úprave dostávame:

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= (a_{11}b_1 + a_{12}b_3)\,x_1 + (a_{11}b_2 + a_{12}b_4)\,x_2, \\
x'_2 &= (a_{21}b_1 + a_{22}b_3)\,x_1 + (a_{21}b_2 + a_{22}b_4)\,x_2.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Súčin $\mathbf{B} . \mathbf{A}$ je zase projektívna príbuznosť, ktorej je priradený bod $A'(a'_{11}, a'_{12}, a'_{21}, a'_{22})$. Tak pri pevnom bode B každému bodu A odpovedá bod A', pričom medzi ich súradnicami platí vzťah:

$$
\begin{aligned}
a'_{11} &= b_1a_{11} + b_3a_{12}, \\
a'_{12} &= b_2a_{11} + b_4a_{12}, \\
a'_{21} &= \qquad\qquad\qquad b_1a_{21} + b_3a_{22}, \\
a'_{22} &= \qquad\qquad\qquad b_2a_{21} + b_4a_{22}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Tieto rovnice sú rovnicami kolineácie $\mathbf{K}$ v priestore, ktorá každému bodu A priestoru priraďuje bod priestoru A'. Vyšetrujme teraz bližšie túto kolineáciu. Jej samodružné body splňujú sústavu rovníc:

$$
\begin{aligned}
(b_1 - \rho)\,a_{11} + b_3a_{12} \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0, \\
b_2a_{11} + (b_4 - \rho)\,a_{12} \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0, \\
(b_1 - \rho)\,a_{21} + b_3a_{22} &= 0, \\
b_2a_{21} + (b_4 - \rho)\,a_{22} &= 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Charakteristická rovnica je

$$
\begin{vmatrix}
b_1 - \rho, & b_3, & 0, & 0 \\
b_2, & b_4 - \rho, & 0, & 0 \\
0, & 0, & b_1 - \rho, & b_3 \\
0, & 0, & b_2, & b_4 - \rho
\end{vmatrix} = 0, \tag{9}
$$

po úprave

$$
\rho^2 - \rho(b_4 + b_1) + b_1b_4 - b_2b_3 = 0. \tag{9'}
$$

Jej korene sú

$$
\rho_{1,2} = \frac{b_3 + b_1 \pm \sqrt{(b_4 - b_1)^2 + 4b_2b_3}}{2}.
$$

Druh tejto kolineácie závisí od počtu samodružných bodov a teda od koreňov charakteristickej rovnice, čiže od výrazu $(b_4 - b_1)^2 + 4b_2b_3$. Podrobnejšie o tejto kolineácii povieme neskoršie, kde v súčine $\mathbf{B} . \mathbf{A}$ za projektivitu $\mathbf{B}$ budeme uvažovať jednotlivé typy projektivít na priamke.

Všimnime si teraz súčin predchádzajúcich projektivít v opačnom poriadku, teda súčin **A . B**. Pre tento dostaneme rovnice:

$$(10)\qquad \begin{aligned} x_1' &= (b_1a_{11} + b_2a_{21})\,x_1 + (b_1a_{12} + b_2a_{22})\,x_2,\\ x_2' &= (b_3a_{11} + b_4a_{21})\,x_1 + (b_3a_{12} + b_4a_{22})\,x_2. \end{aligned}$$

Súčin je zase projektivita, ktorej je priradený bod $\bar{A}(\bar{a}_{11}, \bar{a}_{12}, \bar{a}_{21}, \bar{a}_{22})$. Pre jeho súradnice platí:

$$(11)\qquad \begin{aligned} \bar{a}_{11} &= b_1a_{11} + b_2a_{21},\\ \bar{a}_{12} &= b_1a_{12} + b_2a_{22},\\ \bar{a}_{21} &= b_3a_{11} + b_4a_{21},\\ \bar{a}_{22} &= b_3a_{12} + b_4a_{22}. \end{aligned}$$

Tieto rovnice určujú kolineáciu $\bar{\boldsymbol{K}}$, v ktorej bodu A je priradený bod $\bar{A}$. Charakteristická rovnica tejto kolineácie je

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} b_1-\rho, & 0, & b_2, & 0\\ 0, & b_1-\rho, & 0, & b_2\\ b_3, & 0, & b_4-\rho, & 0\\ 0, & b_3, & 0, & b_4-\rho \end{vmatrix} = 0,$$

po úprave

$$\rho^2 - \rho(b_4 + b_1) + b_1b_4 - b_2b_3 = 0,$$

čo je rovnica zhodná s charakteristickou rovnicou súčinu **B . A**.

Uvažujme teraz za projektivitu **B** (v predchádzajúcich súčinoch) postupne jednotlivé typy projektivít na priamke.

I. Nech projektivitou **B** je *regulárna hyperbolická projektivita*. Jej rovnice upravíme vhodnou voľbou súradnicového systému na tvar:

$$(13)\qquad \begin{aligned} x_1' &= b_1x_1,\\ x_2' &= b_4x_2, \end{aligned}$$

kde je $b_1 \neq b_4$. V porovnaní zo (4) je teda $b_2 = b_3 = 0$.

a) Dosadením koeficientov tejto projektivity do (7) dostávame rovnice kolineácie ${}^h\boldsymbol{K}$, ktorú určuje súčin **B . A**:

$$(14)\qquad \begin{aligned} a_{11}' &= b_1a_{11},\\ a_{12}' &= b_4a_{12},\\ a_{21}' &= b_1a_{21},\\ a_{22}' &= b_4a_{22}. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnica je

$$\begin{vmatrix} b_1 - \rho, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & b_4 - \rho, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & b_1 - \rho, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & b_4 - \rho \end{vmatrix} = 0,$$

čiže $(b_1 - \rho)^2 (b_4 - \rho)^2 = 0$. Korene sú: $\rho_{1,2} = b_1$, $\rho_{3,4} = b_4$.

Charakteristická rovnica má dva korene dvojnásobné. Hodnosť charakteristického determinantu je pre obidva dve. Teda v podmienke (8), pre samodružné body, dostávame pre každý koreň charakteristickej rovnice dve rovnice lineárne nezávislé. Pre $\rho_{1,2} = b_1$, po prepísaní podľa vzťahov (1), ich tvar je

$$(15) \equiv o_1 \qquad \begin{aligned} (b_4 - b_1)\, y_2 &= 0, \\ (b_4 - b_1)\, y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Pre $\rho_{3,4} = b_4$

$$(16) \equiv o_2 \qquad \begin{aligned} (b_1 - b_4)\, y_1 &= 0, \\ (b_1 - b_4)\, y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dvojice rovníc (15), (16) určujú priamky, ktoré sú navzájom mimobežné a sú geometrickým miestom samodružných bodov. Podobne by sme dostali rovnice pre samodružné roviny. Tieto tvoria dva zväzky rovín, ktorých osi splývajú s priamkami o_1, o_2. Teda ${}^hK$ je dvojosová kolineácia s osami o_1, o_2. Ak spojíme ľubovoľný bod jednej osi s ľubovoľným bodom druhej osi, dostaneme samodružnú priamku. Teda odpovedajúce si body v tejto kolineácii ležia na priečke mimobežných osí idúcej jedným z nich.

Veta 1. *Charakteristický dvojpomer kolineácie* ${}^hK$ *sa rovná charakteristickému dvojpomeru hyperbolickej projektivity* (13).

Dôkaz: Vyjadrime charakteristický dvojpomer kolineácie ${}^hK$. Je to dvojpomer bodov (O_1O_2AA'), kde O_1, O_2 sú samodružné body po jednom na priamkach o_1, o_2; A, A' sú odpovedajúce si body v kolineácii ${}^hK$ ležiace na priamke O_1O_2. Zvoľme na o_1 bod $O_1(z_1, 0, z_3, 0)$, na o_2 bod $O_2(0, z_2, 0, z_4)$. Priamka O_1O_2 má potom parametrické vyjadrenie:

$$\begin{aligned} y_1 &= l_1 z_1, \\ y_2 &= l_2 z_2, \\ y_3 &= l_1 z_3, \\ y_4 &= l_2 z_4. \end{aligned}$$

Na tejto priamke si zvolíme bod $A(l_1 z_1, l_2 z_2, l_1 z_3, l_2 z_4)$. Dosadením do sústavy (14) za $a_{11}, \ldots, a_{22}$ dostaneme k nemu odpovedajúci bod $A'(b_1 l_1 z_1, b_4 l_2 z_2, b_1 l_1 z_3, b_4 l_2 z_4)$.

Parametre bodov O_1, O_2, A, A' na priamke O_1O_2 sú tieto:

$$\begin{aligned} O_1 &\dots 1, 0, \\ O_2 &\dots 0, 1, \\ A &\dots l_1, l_2, \\ A' &\dots b_1 l_1, b_4 l_2. \end{aligned}$$

Potom charakteristický dvojpomer $(O_1O_2AA') = \dfrac{l_2}{-l_1} : \dfrac{b_4 l_2}{-b_1 l_1} = \dfrac{b_1}{b_4}$.

Pomer b_1/b_4 je konštantný, pretože b_1, b_4 sú stále hodnoty, vystupujúce ako koeficienty pevnej hyperbolickej projektivity (13).

Jednoduchým výpočtom zistíme, že charakteristický dvojpomer projektivity **B** je tiež b_1/b_4.

Z poslednej vety a z odseku pred ňou vyplýva táto konštrukcia bodu odpovedajúceho danému bodu:

Daným bodom A, ku ktorému hľadáme odpovedajúci bod, zostrojíme priečku mimobežiek o_1, o_2, nájdeme jej priesečníky s osami o_1, o_2, t. j. body O_1, O_2 a na priamke o_1, o_2 nájdeme bod A' tak, aby platilo $(O_1O_2AA') = b_1/b_4$.

Veta 2. Osi kolineácie $^h\mathbf{K}$ o_1, o_2 sú tvoriace priamky toho istého regulu kvadriky Q, prechádzajúce priesečníkmi priamky $e \equiv E^hE'$ s kvadrikou. Pritom bod $^hE'$ je bod priradený bodu $E(1, 0, 0, 1)$, v kolineácii $^h\mathbf{K}$ a jeho súradnice podľa (14) sú $^hE'(b_1, 0, 0, b_4)$.

Dôkaz. Najprv dokážeme, že priamky o_1, o_2 ležia na kvadrike Q. Zvoľme dva body na priamke o_1: $O_1(z_1, 0, z_3, 0)$, $L_1(z_1, 0, 0, 0)$. Potom parametrické vyjadrenie osi o_1 je:

$$\begin{aligned} y_1 &= l_1' z_1 + l_2' z_1, \\ y_2 &= 0, \\ y_3 &= l_1' z_3, \\ y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Dosadením týchto vyjadrení do rovnice (2) kvadriky Q zistíme, že táto je splnená pre každé l_1', l_2', teda priamka o_1 leží na kvadrike. Tým istým spôsobom by sme zistili, že i os o_2 leží na kvadrike Q. Ako sme už povedali, priamky o_1, o_2 sú navzájom mimobežné, z čoho vyplýva, že sú to priamky jedného regulu.

V nasledujúcej časti dôkazu určíme priesečníky priamky $e \equiv {}^hE'E$ s kvadrikou Q. Parametrické vyjadrenie priamky e je

$$\begin{aligned} y_1 &= k_1' + k_2' b_1, \\ y_2 &= 0, \\ y_3 &= 0, \\ y_4 &= k_1' + k_2' b_4. \end{aligned}$$

Dosadením do rovnice kvadriky zistíme, že parametre bodov, v ktorých priamka e pretína kvadriku Q, sú $k'_1 = -b_4$, $k'_2 = 1$ pre jeden a $k'_1 = -b_1$, $k'_2 = 1$ pre druhý bod. Hľadané priesečníky potom sú

$$M(-b_4 + b_1, 0, 0, 0), \qquad N(0, 0, 0, -b_1 + b_4).$$

Dosadením súradníc bodu M do rovníc (15) zistíme, že tieto sú pre bod M splnené. Teda os o_1 určená rovnicami (15) prechádza bodom M. Dosadením súradníc bodu N do (16) zistíme, že os o_2 prechádza bodom N. Tým je veta dokázaná.

Poznámka. Charakteristický dvojpomer kolineácie ${}^h\boldsymbol{K}$, o ktorom sa hovorí vo vete 1, je rovný dvojpomeru bodov $(MNEB)$, pretože body M, N sú samodružné body priamok o_1, o_2 a E, $B \equiv {}^hE'$ sú odpovedajúce.

b) Dosadením koeficientov hyperbolickej projektivity (13) do rovníc (11) dostaneme rovnice kolineácie ${}^h\overline{\boldsymbol{K}}$, ktorú určuje súčin $\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{B}$ (súčin v opačnom poradí, ako bolo v predchádzajúcom):

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{11} &= b_1 a_{11}, \\
\bar{a}_{12} &= \quad b_1 a_{12}, \\
\bar{a}_{21} &= \qquad b_4 a_{21}, \\
\bar{a}_{22} &= \qquad\quad b_4 a_{22}.
\end{aligned}$$

Charakteristická rovnica

$$\begin{vmatrix} b_1 - \rho, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & b_1 - \rho, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & b_4 - \rho, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & b_4 - \rho \end{vmatrix} = 0$$

má korene $\rho_{1,2} = b_1$, $\rho_{3,4} = b_4$. Týmto koreňom odpovedajú v sústave (8) dve dvojice lineárne nezávislých rovníc, ktoré určujú množinu samodružných bodov. Pre $\rho = b_1$ po dosadení vzťahov (1) je to

$$(17) \equiv \bar{o}_1 \qquad \begin{aligned} (b_4 - b_1)\, y_3 \qquad\quad &= 0, \\ (b_4 - b_1)\, y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Pre $\rho = b_4$

$$(18) \equiv \bar{o}_2 \qquad \begin{aligned} (b_1 - b_4)\, y_1 \qquad\quad &= 0, \\ (b_1 - b_4)\, y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Teda samodružné body vyplňujú zase dve priamky, (17), (18), ktoré sú navzájom mimobežné. Tak ako v prípade a) by sme zistili, že priamky $\bar{o}_1$, $\bar{o}_2$ ležia na kvadrike Q a prechádzajú po rade bodmi M, N, priesečníkmi priamky $e \equiv E{}^h\bar{E}$ s kvadrikou Q. (${}^h\bar{E} \equiv {}^hE'$). Porovnaním rovníc priamok o_1, $\bar{o}_1$ a o_2, $\bar{o}_2$ vidíme, že každá z týchto dvojíc prechádza jedným spoločným bodom (prvá bodom M, druhá N), ale nesplývajú. Z toho všetkého ako vysledok vyplýva

veta 3. *Osi $\bar{o}_1$, $\bar{o}_2$ kolineácie ${}^h\bar{K}$ sú tvoriace priamky kvadriky Q prechádzajúce priesečníkmi priamky e s kvadrikou, a to združeného regulu, s regulom, do ktorého patria o_1, o_2.*

Ďalšie vlastnosti tejto kolineácie sú zhodné s vlastnosťami kolineácie ${}^hK$.

II. Nech projektivitou B je *regulárna parabolická projektivita.* Vhodnou voľbou súradnicového systému nadobudnú jej rovnice tvar

$$
x_1' = \lambda x_1 + b_2 x_2, \quad x_2' = \lambda x_2. \tag{19}
$$

V porovnaní so sústavou (4) je $b_1 = \lambda$, $b_2 = b_2$, $b_3 = 0$, $b_4 = \lambda$.

a) Dosadením týchto vzťahov do (7) dostaneme rovnice kolineácie ${}^pK$ určenej súčinom $B \, . \, A$:

$$
\begin{aligned}
a_{11}' &= \lambda a_{11}, \\
a_{12}' &= b_2 a_{11} + \lambda a_{12}, \\
a_{21}' &= \lambda a_{21}, \\
a_{22}' &= b_2 a_{21} + \lambda a_{22}.
\end{aligned} \tag{20}
$$

Charakteristická rovnica tejto kolineácie

$$
\begin{vmatrix}
\lambda - \rho, & 0, & 0, & 0 \\
b_2, & \lambda - \rho, & 0, & 0 \\
0, & 0, & \lambda - \rho, & 0 \\
0, & 0, & b_2, & \lambda - \rho
\end{vmatrix} = 0
$$

má 4násobný koreň $\rho_{1,2,3,4} = \lambda$. Hodnosť charakteristického determinantu pre tento koreň je dve. Potom v sústave (8) sú dve rovnice lineárne nezávislé. Po dosadení vzťahov (1) ich tvar je

$$
(21) \equiv o \qquad b_2 y_1 = 0, \quad b_2 y_3 = 0.
$$

Samodružné body vyplňujú priamku — os kolineácie — určenú rovnicami (21).

Tak by sme zistili i to, že samodružné roviny tvoria zväzok rovín, ktorého osou je priamka o (priamka samodružných bodov).

O vzájomnej polohe osi kolineácie a kvadriky Q hovorí

veta 4. *Os o kolineácie ${}^pK$ je tvoriaca priamka kvadriky prechádzajúca dotykovým bodom priamky $e \equiv E^pE'$ s kvadrikou Q, pričom bod ${}^pE'$ je bod odpovedajúci v tejto kolineácii bodu E a jeho súradnice podľa* (20) *sú:* ${}^pE'(\lambda, b_2, 0, \lambda)$.

Dôkaz. Najprv dokážeme, že os o leží na kvadrike. Zvoľme si na priamke o dva body: $C(0, 1, 0, 1)$, $D(0, 0, 0, 1)$. Jej parametrické vyjadrenie potom je:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \\ y_2 &= k_1, \\ y_3 &= 0, \\ y_4 &= k_1 + k_2. \end{aligned}$$

Dosadením do rovnice kvadriky Q zistíme, že táto je splnená pre každé k_1, k_2. Teda priamka o leží na kvadrike Q.

Určime teraz vzájomnú polohu priamky e a kvadratiky Q. Parametrické vyjadrenie priamky e je:

$$\begin{aligned} y_1 &= l_1\lambda + l_2, \\ y_2 &= l_1 b_2, \\ y_3 &= 0, \\ y_4 &= l_1\lambda + l_2. \end{aligned}$$

Po dosadení do rovníc kvadriky Q zistíme, že priamka e sa dotýka plochy Q a parametre odpovedajúce dotykovému bodu sú:

$$l_2 = -\lambda, \qquad l_1 = 1.$$

Dotykový bod je potom $T(0, b_2, 0, 0)$. Týmto bodom prechádza priamka o, čo vidieť po jeho dosadení do rovníc (21).

b) Dosadením koeficientov projektivity (19) do (11) za b_1, b_2, b_3, b_4 dostaneme rovnice kolineácie ${}^{p}\bar{\mathbf{K}}$, ktorú určuje súčin $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= \lambda a_{11} + b_2 a_{21}, \\ \bar{a}_{12} &= \lambda a_{12} + b_2 a_{22}, \\ \bar{a}_{21} &= \lambda a_{21} +, \\ \bar{a}_{22} &= \lambda a_{22}. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnica má tie isté korene ako pri kolineácii ${}^{p}\mathbf{K}$, t. j. $\rho_{1,2,3,4} = \lambda$. Z podmienky (8) pre samodružné body dostávame os kolineácie $\bar{o}$, ktorej rovnice sú

$$(22) \equiv \bar{o} \qquad \begin{aligned} b_2 y_3 &= 0, \\ b_2 y_4 &= 0. \end{aligned}$$

O tejto by sme zistili, tak ako v prípade a), že je to tvoriaca priamka kvadriky Q idúca bodom T regulu združeného s regulom v prípade a).

III. Nech projektivitou $\mathbf{B}$ je *regulárna eliptická projektivita*. Vhodnou voľbou súradnicovej sústavy dostaneme pre ňu rovnice:

$$(23) \qquad \begin{aligned} x_1' &= r_2 x_2, \\ x_2' &= r_1 x_1. \end{aligned}$$

kde r_1, r_2 sú opačných znamienok, čiže $r_1 r_2 < 0$. V porovnaní s rovnicami (4) je

$$b_1 = 0, \qquad b_2 = r_2, \qquad b_3 = r_1, \qquad b_4 = 0.$$

Dosadením týchto vzťahov do (7) dostaneme rovnice kolineácie ${}^{e}\boldsymbol{K}$ určenej súčinom $\boldsymbol{B}\,.\,\boldsymbol{A}$:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \quad r_1 a_{12} \quad, \\ a'_{12} &= r_2 a_{11} \quad, \\ a'_{21} &= \qquad\qquad r_1 a_{22}, \\ a'_{22} &= \qquad r_2 a_{21} \quad. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnica tejto kolineácie je

$$\begin{vmatrix} -\rho, & r_1, & 0, & 0 \\ r_2, & -\rho, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -\rho, & r_1 \\ 0, & 0, & r_2, & -\rho \end{vmatrix} = 0.$$

Po úprave dostaneme

$$(\rho^2 - r_1 r_2)(\rho^2 - r_1 r_2) = 0.$$

Korene potom sú

$$\rho_{1,2,3,4} = \pm \mathrm{i}\sqrt{|r_1 r_2|},$$

teda dva korene dvojnásobné. Pre každý tento koreň je hodnosť charakteristického determinantu dve. V rovniciach (8) pre samodružné body sú dve rovnice lineárne nezávislé. Ich tvar po prepísaní podľa (1) je

$$\begin{aligned} r_2 y_1 - (\pm \mathrm{i}\sqrt{|r_1 r_2|})\, y_2 &= 0, \\ -(\pm \mathrm{i}\sqrt{|r_1 r_2|})\, y_3 + r_1 y_4 &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Samodružné body vypĺňujú dve komplexne združené priamky o rovniciach (24). Ďalšie vlastnosti tejto kolineácie sú obdobné ako pri dvojosovej kolineácii ${}^{h}\boldsymbol{K}$.

IV. Nech projektivitou $\boldsymbol{B}$ je *identická projektivita*

$$\begin{aligned} x'_1 &= t x_1 \quad, \\ x'_2 & \qquad t x_2 . \end{aligned}$$

V porovnaní s rovnicami (4) máme

$$b_1 = t, \qquad b_2 = 0, \qquad b_3 = 0, \qquad b_4 = t.$$

Dosadením týchto vzťahov do (7) dostaneme rovnice kolineácie ${}^{i}\boldsymbol{K}$ určenej súčinom $\boldsymbol{B}\,.\,\boldsymbol{A}$:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= t a_{11} \quad, \\ a'_{12} &= \quad t a_{12} \quad, \\ a'_{21} &= \qquad t a_{21} \quad, \\ a'_{22} &= \qquad\quad t a_{22} . \end{aligned}$$

Dostávame jednoduchý prípad identickej kolineácie. Obdobne i kolineácia ${}^{i}\mathbf{K}$ by bola identická.

V. 1. Nech projektivitou **B** je *singulárna projektivita II. druhu.* (Jej obrazom je bod kvadriky Q neležiaci v polárnej rovine bodu $E(1, 0, 0, 1)$ vzhľadom na kvadriku Q). Pre koeficienty tejto projektivity potom platí

$$b_1 b_4 = b_2 b_3. \tag{25}$$

Polárna rovina bodu E vzhľadom na kvadriku Q je

$$y_1 + y_4 = 0.$$

Teda bod B priradený projektivite **B** (tu uvažovanej) splňuje vzťah

$$-b_1 \neq b_4. \tag{26}$$

Súčin projektivity **B** a ľubovoľnej projektivity **A** určuje kolineáciu ${}^{s}\mathbf{K}_2$, ktorej rovnicami sú rovnice (7). V charakteristickej rovnici (9) po použití podmienky (25) absolútny člen je rovný nule. Táto rovnica má potom dva dvojnásobné korene, a to

$$\rho_{1,2} = b_4 + b_1, \qquad \rho_{3,4} = 0.$$

Hodnosť charakteristického determinantu pre každý z týchto koreňov je dve. Pre $\rho_{1,2} = b_4 + b_1$ dostávame v sústave (8) dve rovnice lineárne nezávislé, ktoré po prepísaní podľa vzťahov (1) majú tvar

$$(27) \equiv o_1 \qquad \begin{aligned} b_2 y_1 - b_1 y_2 &= 0, \\ -b_4 y_3 + b_3 y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Je to priamka samodružných bodov. Pre $\rho_{3,4} = 0$ dostávame v sústave (8) tiež dve rovnice lineárne nezávislé

$$(28) \qquad \begin{aligned} b_2 y_1 + b_4 y_2 &= 0, \\ b_1 y_3 + b_3 y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Tieto určujú priamku, ktorej bodom neodpovedajú v kolineácii ${}^{s}\mathbf{K}_2$ žiadne body priastoru.

Veta 5. *Priamky o_1, o_2 navzájom mimobežné sú tvoriace priamky kvadriky Q toho istého regulu. Priamka o_1 prechádza bodom ${}^{2}E' \equiv B$, priamka o_2 druhým priesečníkom P priamky $e \equiv E^{h}E'$ s kvadrikou Q.*

Dôkaz by sa urobil obdobne ako vo vete 2.

Veta 6. *Bod A' odpovedajúci ľubovoľnému bodu A priestoru, neležiacemu na o_2, je na priamke o_1 a na priečke p mimobežiek o_1, o_2 vedenej bodom A.*

Dôkaz. Bodu $A(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ podľa rovníc (7) odpovedá v kolineácii ${}^{s}\mathbf{K}_2$ bod

$$A'(b_1 a_{11} + b_3 a_{12},\ \ b_2 a_{11} + b_4 a_{12},\ \ b_1 a_{21} + b_3 a_{22},\ \ b_2 a_{21} + b_4 a_{22}).$$

Dosadením súradníc bodu A' do rovníc (27) zistíme, že bod A' leží na priamke o_1. Tým je prvá časť vety dokázaná. Zvoľme teraz ľubovoľný bod na priamke o_1. Nech je to bod $O_1(b_3, b_4, b_1, b_2)$. Podobne na o_2 bod $O_2(b_4, -b_2, b_3, -b_1)$. Priamka $p \equiv O_1O_2$ je ľubovoľná priečka mimobežiek o_1o_2. Jej ľubovoľný bod $A \not\equiv O_2$ má súradnice:

$$A(k_1b_3 + k_2b_4, \quad k_1b_4 - k_2b_2, \quad k_1b_1 + k_2b_3, \quad k_1b_2 - k_2b_1),$$

kde $k_1 \neq 0$. Dosadením týchto súradníc do (7) dostaneme po malej úprave súradnice odpovedajúceho bodu A' takto:

$$A'[b_3k_1(b_1 + b_4), \quad b_4k_1(b_1 + b_4), \quad b_1k_1(b_1 + b_4), \quad b_2k_1(b_1 + b_4)].$$

Porovnaním ľahko zistíme, že je $A' \equiv O_1$, teda A' je priesečníkom priamky o_1 a priamky p.

Poznámka. Z dôkazu vidieť, že všetkým bodom priamky p odpovedá jeden bod $A' \equiv O_1$.

2. Nech projektivitou **B** je *singulárna projektivita I. druhu.* (Jej obrazom je bod kvadriky ležiaci v polárnej rovine bodu E vzhľadom na kvadriku Q.) Pre koeficienty tejto projektivity platí vzťah (25) a opak vzťahu (26), t. j.

$$-b_1 = b_4. \tag{29}$$

Rovnice kolineácie $^3\boldsymbol{K}_1$ určenej súčinom **B** . **A** dostaneme, ak do rovníc (7) dosadíme podmienku (29). Sú to:

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= b_1a_{11} + b_3a_{12}, \\
a'_{12} &= b_2a_{11} - b_1a_{12}, \\
a'_{21} &= \qquad\qquad\quad b_1a_{21} + b_3a_{22}, \\
a'_{22} &= \qquad\qquad\quad b_2a_{21} - b_1a_{22}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Charakteristická rovnica tejto kolineácie má štvornásobný koreň $\rho_{1,2,3,4} = 0$. Hodnosť charakteristického determinantu pre tento koreň je dve. V sústave (8) sú potom dve rovnice lineárne nezávislé. Po použití vzťahov (1) ich tvar je

$$\begin{aligned}
b_2y_1 - b_1y_2 &= 0, \\
b_1y_3 + b_3y_4 &= 0.
\end{aligned} \tag{31} \equiv o$$

Táto priamka je geometrickým miestom bodov, ktorým neodpovedá žiadny bod priestoru. Podobne ako v predchádzajúcich úvahách sa zistí, že priamka o je tvoriaca priamka kvadriky Q idúca bodom $B(b_1, b_2, b_3, -b_1)$. Ľubovoľnému bodu $A(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ priestoru, neležiacemu na o, odpovedá podľa rovníc (30) bod

$$A'(b_1a_{11} + b_3a_{12}, \quad b_2a_{11} - b_1a_{12}, \quad b_1a_{21} + b_3a_{22}, \quad b_2a_{21} - b_1a_{22}).$$

Dosadením jeho súradníc do (31) zistíme, že leží na priamke o.

LITERATÚRA

[1] Medek V., *Lineárne systémy projektívnych príbuzností na priamke,* Matematicko-fyzikálny časopis SAV, VI (1956), 98—108.
[2] Bydžovský B., *Úvod do algebraické geometrie,* JČMF, Praha 1948.

Došlo 22. 4. 1960.

Katedra deskriptívnej geometrie
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

ОТОБРАЖЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Ян Горнячек

Резюме

В этой статье рассматриваются произведения проективных преобразований прямой линии. Всякому проективному преобразованию **A** соответствует точка A трехмерного проективного пространства. Пусть произведению **B** . **A** (при постояним преобразовании **B**) отвечает точка A'. Это соотношение между точками A, A' является коллинеацией **K**. Последняя рассмотривается в таких случаях, когда **B** — регулярное проективное преобразование: гиперболическое, параболическое, эллиптическое, а также идентичное, как и в случае, когда **B**-сингулярное проективное преобразование. Здесь же рассмотривается произведение **A** . **B** определяющее коллинеацию **K**.

DIE ABBILDUNG DES PRODUKTES DER PROJEKTIVITÄTEN AUF EINER GERADEN

J. Horniaček

Zusammenfassung

In dieser Abhandlung werden die Produkte der Projektivitäten auf einer Geraden untersucht. Einer jeden Projektivität **A** ist ein Punkt A des dreidimenzionalen projektiven Raumes zugereiht. Dann entspricht dem Produkt **B** . **A** (bei einer festen Projektivität **B**) der Punkt A. Die Beziehung zwischen den Punkten A, A' ist die Kolineation **K**. Sie ist untersucht sowol in Fällen, wenn **B** eine reguläre hyperbolische, parabolische, eliptische oder identische Projektivität, als auch in dem Falle, wenn **B** eine singuläre Projektivität ist. Es ist auch das Produkt **A** . **B** untersucht, daß die Kolineation $\bar{\mathbf{K}}$ bestimmt.