

# Matematicko-fyzikálny časopis

---

Stanislav Kolník

Einfache Erklärung des Strahlversetzungseffektes bei Totalreflexion

*Matematicko-fyzikálny časopis*, Vol. 12 (1962), No. 3, 235--240

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/126323>

## Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1962

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## EINFACHE ERKLÄRUNG DES STRAHVERSETZUNGSEFFEKTES BEI TOTALREFLEXION

STANISLAV KOLNÍK, Bratislava

F. Goos und H. Hänchen [1] haben bei der experimentellen Untersuchung der Totalreflexion den Lichtversetzungseffekt beobachtet. Zuständige Messungen haben sie auf einer in der Luft angebrachten planparallelen Glasplatte gemacht. Eine Hälfte der unteren reflektierenden Seite dieser Platte war versilbert. Ein monochromatisches Lichtbündel von rechteckigem Querschnitt durchtrat die Platte so, daß es zur Reflexion teils auf dem versilberten Teil, teils auf der Trennfläche Glas-Luft kam. Dabei zeigte sich, daß die vom Glas total reflektierte Lichtbündelhälfte gegenüber derjenigen, vom Silber reflektierten, eine seitliche Versetzung erfuhr ebenso,

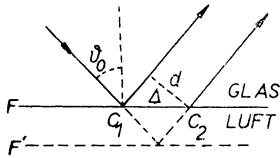


Abb. 1.

wie bei der Reflexion auf einer fiktiven Grenzfläche  $F'$  (Abb. 1). Die Strecke  $\overline{C_1C_2}$  gibt dabei die Lichtversetzung für einen ausgewählten Lichtstrahl längs der Grenzfläche an. Diese Versetzung bezeichnet man mit  $\Delta$ . In den Arbeiten [1], [2] und anderen wird  $d$  (Abb. 1) d. h. die Projektion von  $\overline{C_1C_2}$  als Lichtversetzung benutzt.

Die Erklärung dieses Effektes auf Grund einer annähernden Lösung der Maxwell'schen Gleichungen haben C. v. Fragstein [2], Cl. Schaefer [3], H. Wolter [4], K. Artmann [5], [6] und andere gegeben. Die Ausnützung der Eigenschaften verschiedener Lichtbündel von endlichem Querschnitt, die theoretisch begründete und mit einer Reihe von Experimenten bestätigte „Energiströmung“ im optisch dünneren Medium (die in einer Schicht, deren Dicke mit der Wellenlänge des benutzten Lichtes vergleichbar ist, entsteht) erlauben auch eine mögliche Erklärung.

Die Seitenversetzung bei Totalreflexion beobachtete A. Schoch [7] auch im Ultraschallgebiet (16 MHz) auf der Grenzfläche Xylol–Aluminium. Zur Erklärung dieser Verschiebung wird gewöhnlich nur wellenförmige Darstellung benutzt [8].

Die Strahlversetzung bei Totalreflexion, und zwar nicht nur der elektromagnetischen, sondern auch der elastischen Wellen, zeigt eine Abhängigkeit vom Polarisationszustand. Für Lichtwellen haben diese Abhängigkeit F. Goos und H. Lindberg-Hänchen bestätigt [9]. Das in der Einfallsebene polarisierte Licht zeigt in der Grenzfläche eine Versetzung [8]

$$\Delta_s = \frac{\lambda}{\pi} \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\sqrt{\sin^2 \vartheta - \frac{n^2}{N^2}}} \quad (1)$$

und das Licht, das in einer zur Einfallsebene senkrechten Ebene polarisiert, ist ergibt eine Versetzung

$$\Delta_p = \frac{\lambda}{\pi} \frac{N^2}{n^2} \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\sqrt{\sin^2 \vartheta - \frac{n^2}{N^2}}} \quad (1')$$

wo  $\vartheta > \vartheta_0$  Einfallswinkel,  $\vartheta_0$  Grenzwinkel,  $\sin \vartheta_0 = n/N$ ,  $\lambda$  Wellenlänge im Medium, aus dem das Licht kommt, und  $n$ ,  $N$  Brechzahlen der Luft und des anderen Mediums,

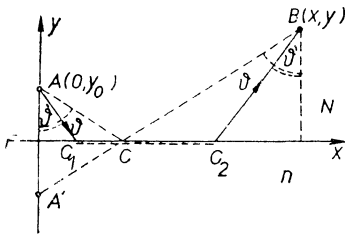


Abb. 2.

das optisch dichter ist, bedeuten. Nach den Ergebnissen von G. Goos und H. Hänchen die Versetzung  $\Delta$  ändert sich sehr stark mit der Änderung des Einfallswinkels schon um einige Bogenminuten und das Maximum wird bei dem Grenzwinkel  $\vartheta = \vartheta_0$  erreicht. Nach den Formeln (1) und (1'), sowie nach denjenigen von F. Goos, K. Artmann, Cl. Schaefer und anderen sollen aber im Grenzwinkelgebiet beide Versetzungen ins Unendliche anwachsen. Trotzdem zur Verbesserung der Messungsmöglichkeiten der Versetzungen auch für  $\vartheta \rightarrow \vartheta_0$  war die Verwendung von 68 Zickzackreflexionen im Innern der Glasplatte notwendig. Mit Rücksicht auf diese Umstände und nicht nur wegen ihrer approximativen Bestimmung sind die Formeln (1) und (1') nur für annähernde zu halten. Die angeführten Relationen drücken die charakteristischen Größen der experimentellen Anordnung nicht aus und nach C. v. Fragstein und Cl. Schaefer die Feststellung von verschiedenen Versetzungen bei verschiedenen Messeinrichtungen nicht zu bezweifeln ist.

In weiterem wird gezeigt, daß die Strahlversetzung bei Totalreflexion auf Grund des Fermatschen Prinzips, also ohne direkter Lösung der Wellengleichung mit zugehörigen Randbedingungen beschreibbar und einfach erklärbar ist. Deswegen nehmen wir folgenden Fall in Erwägung.

Sei  $A$  ein leuchtender Punkt (oder Quelle allgemeiner Wellenbewegung) der sich in homogenem Medium mit Brechungsindex  $N$  befindet. Das Licht aus der Quelle  $A$  kann zu  $B$  entweder auf direktem Wege, oder durch Reflexion auf der Grenzfläche  $F$ , hinter der ein homogenes Medium mit Brechungsindex  $n < N$  liegt (Abb. 2), gelangen.

Sei  $A$  ein leuchtender Punkt (oder Quelle allgemeiner Wellenbewegung) der sich in homogenem Medium mit Brechungsindex  $N$  befindet. Das Licht aus der Quelle  $A$  kann zu  $B$  entweder auf direktem Wege, oder durch Reflexion auf der Grenzfläche  $F$ , hinter der ein homogenes Medium mit Brechungsindex  $n < N$  liegt (Abb. 2), gelangen.

Wenn aber der Punkt  $B$  die Bedingung

$$\frac{x}{y_0 + y} > \frac{n}{\sqrt{N^2 - n^2}} \quad (2)$$

erfüllt, ist die Voraussetzung zulässig, daß das Licht auch auf dem Wege  $AC_1C_2B$  gehen kann. Dabei liegt der Wegteil  $C_1C_2$  gerade unter der Grenzfläche, ist mit dieser parallel und  $\vartheta' < \vartheta$ . Zur Begründung dieser Voraussetzung ist es z. B. möglich einen allgemein bekannten Mandelschtam-Selenyi-Versuch anzuführen, der das Lichteindringen in optisch dünneres Medium (bei Bedingungen der Totalreflexion) bezeugt.

Der diesem Fall entsprechende optische Weg  $s_2(AB)$  ist wie folgt:

$$\begin{aligned} s_2(AB) &= (\overline{AC_1} + \overline{C_2B})N + \overline{C_1C_2}n = \\ &= (y_0 + y) \left( \frac{N}{\cos \vartheta'} - n \operatorname{tg} \vartheta' \right) + nx = s_2(\vartheta'). \end{aligned} \quad (3)$$

Eine einfache Berechnung, die die Gültigkeit des Fermatschen Prinzips respektiert, das in diesem Falle in der Form

$$\frac{ds_2}{d\vartheta'} = 0$$

verwendbar ist, zeigt, daß  $s_2(AB)$  für  $\sin \vartheta' = n/N$  ein Minimum ausweist. Wenn also das Licht unter dem Grenzwinkel zur Grenzfläche kommt und gleichzeitig die Bedingung (2) erfüllt, existiert ein extremer optischer Weg  $AC_1C_2B$  für den

$$s_2(AB) = (y_0 + y) \sqrt{N^2 - n^2} + xn. \quad (3')$$

Der optische Weg auf  $ACB$ , bezeichnet mit  $s_1(AB)$ , ist

$$s_1(AB) = N(y_0 + y) \sqrt{1 + \left( \frac{x}{y_0 + y} \right)^2}. \quad (4)$$

Es zeigt sich, daß bei der Erfüllung der Bedingung (2)

$$s_1(AB) > s_2(AB) \quad (5)$$

ist. Wenn man erwägt, daß

$$n < N; \quad x, y_0, y > 0,$$

ist es weiter zweckmässig die Ungleichung (5) in der Form

$$\sqrt{1 + \alpha^2} > \frac{n}{N} \alpha + \sqrt{1 - \frac{n^2}{N^2}} \quad (5')$$

zu schreiben, wobei

$$\alpha = \frac{x}{y_0 + y}.$$

Für gegebene Grenzfläche, d. h. konstantes  $n, N$ , kann man den Wertebereich  $\alpha$ , für den (5'), resp. (5) gilt, grafisch feststellen (Abb. 3). Die Geraden  $\eta_1(\alpha), \eta_2(\alpha)$ ,

$\eta_3(\alpha)$  entsprechen dabei der rechten Seite der Ungleichung (5') für verschiedene Verhältnisse  $n/N$  und die Kurve  $Y(x) = \sqrt{1 + x^2}$ . Aus der Lösung der Gleichung  $Y(x) = \eta(x)$  folgt, daß eine zweifache reale Wurzel

$$\alpha_{1,2} = \frac{n}{\sqrt{N^2 - n^2}} \quad (6)$$

existiert, die dem Berührungspunkt  $D$  auf der Kurve  $Y(x)$  entspricht. Die Abb. 3 zeigt, daß die Ungleichung (5') und auch (5) für alle  $x$  mit Ausnahme von (6) gilt. Eine physikalische Deutung haben nur diejenigen Fälle, wo

$$\alpha = \frac{x}{y_0 + y} > \frac{n}{\sqrt{N^2 - n^2}},$$

weil das Licht sich nur dann unter der Grenzfläche verbreiten kann. Der Fall (6) entspricht dem Durchgang des Lichtes auf dem Wege  $ACB$  bei Totalreflexion.

Aus dem Angeführten ist es klar, daß wenn für die Punkte  $A$  und  $B$  die Bedingung (2) erfüllt ist,  $s_1(AB) > s_2(AB)$  und gleichzeitig für die durch die Länge der Strecke  $C_1C_2$  gegebene Seitenverschiebung  $\Delta$  gilt

$$\begin{aligned} \Delta &= x - (y_0 + y) \operatorname{tg} \vartheta_0 = (y_0 + y)(\alpha - \operatorname{tg} \vartheta_0) = \\ &= (y_0 + y) \left( \frac{x}{y_0 + y} - \frac{n}{N \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_0}} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Aus der letzten Formel geht hervor, daß  $\Delta$  auch für den Grenzwinkel endlich bleibt. Zum Unterschied von (1) und (1') wird durch (7) auch die Abhängigkeit der Seitenverschiebung bei Reflexion von der experimentellen Anordnung getroffen, welche von C. v. Fragstein und Cl. Schaefer erwartet wird.

Für die Bestimmung des weiteren Lichtweges nach der Seitenverschiebung ist von gewisser Bedeutung der geometrische Ort der Punkte, für die

$$s_2(AB) = \text{konst} = s_{20}$$

bei der gewählten, festen Lage der Lichtquelle. Nach (3') ist dann (wenn man sich auf einen zweidimensionalen Fall beschränkt)

$$y = - \frac{n}{\sqrt{N^2 - n^2}} x + \frac{s_{20} - y_0 \sqrt{N^2 - n^2}}{\sqrt{N^2 - n^2}}.$$

Nach der Abb. 4 das Licht gelangt vom  $A$  unter dem Winkel  $\vartheta_0$  in alle Punkte der Strecke  $\overline{B_1B_0}$  der Gerade  $y$  auf dem gleichen optischen Weg. Das bedeutet, daß das von der Grenzfläche fortschreitende Licht entweder direkt reflektieren oder aus dem zweiten Medium mit einer bestimmten Verschiebung  $\Delta$  austreten kann. Die

Gerade  $y$  ist dabei als Wellenfront der sogenannten „Seitenwelle“ (russisch „bokovaja volna“ [8]) zu fassen; dies folgt daraus, daß die Normale dieser Welle mit der Normale der Grenzfläche einen Winkel  $\vartheta_0 = \arcsin(n/N)$  bildet. Mit Rücksicht darauf, daß die optischen Wege auf den Strecken  $\overline{C_1B_1}$ ,  $\overline{C_2B_2}$ , ... gleich groß wie diejenigen auf  $\overline{C_1B_0}$ ,  $\overline{C_2B_0}$ , ... sind, entspricht der durch  $B_0$  geführte Kreisbogen 4 einer

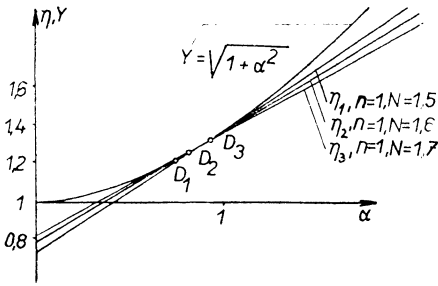


Abb. 3.

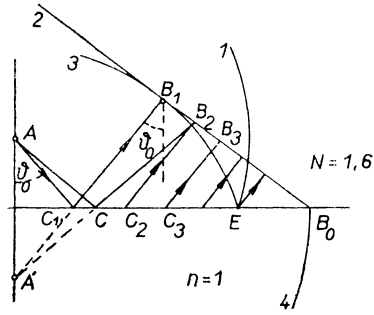


Abb. 4.

inhomogenen Welle, die sich im unteren Medium längs der Grenzfläche verbreitet; der den Punkt  $B_1$  schneidende Kreisbogen 3 entspricht der im Punkt  $C_1$  reflektierten Welle und der den Punkt  $E$  schneidende Kreisbogen 1 entspricht der im oberen Medium geradlinig fortschreitenden Welle. Der untere „Rand“, der Wellenfront 2 verbreitet sich samt der Welle im unteren Medium, der obere „Rand“ verbreitet sich samt der reflektierten Welle. Diese sind aber die charakteristischen Eigenschaften der Seitenwelle und deshalb der erwähnte geometrische Ort der Punkte des gleichen optischen Weges ist als Wellenfront der Seitenwelle zu fassen.

Seitenlichtwellen wurden bisher, wie dem Verfasser bekannt ist, nicht beobachtet; doch die seitlichen mechanischen Wellen gewöhnlich, z. B. in der seismischen Untersuchung gebraucht werden. In diesem Fall zeigt es sich, daß die Seitenwelle bei Verwendung der Impulsquelle zum Beobachter im Punkte  $B_2$  eher kommt auf dem Wege  $AC_1C_2B_2$  als die reflektierte Welle auf  $ACB_2$  (Abb. 4).

Die Analyse der Totalreflexion der Lichtwellen und selbstverständlich auch mechanischen Wellen auf Grund der Vorstellungen der geometrischen Optik führt zur Begründung der Existenz der Seitenverschiebung bei der Totalreflexion und zur Entstehung der Seitenwelle. Diese Erklärung gibt zwar keine Möglichkeit der direkten Feststellung der Phasen- und Amplituden Verhältnisse, verschiedener Abhängigkeiten von der Wellenlänge, der Untersuchung des Polarisationszustandes und der Erforschung in der Nähe des Grenzwinkels. Dagegen aber ist diese Berechnung ausnahmsweise einfach und gibt für die Seitenverschiebung einen endlichen, von der Eigenschaften der Versuchsanordnung abhängigen Wert.

## LITERATUR

- [1] Goos F., Hänchen H., Ann. Physik (6), 1, 333 (1947).
- [2] v. Fragstein G., Ann. Physik (6), 1, 271 (1949).
- [3] Schaefer Cl., v. Fragstein C., Ann. Physik (6), 6, 39 (1949).
- [4] Wolter H., Z. Naturforsch. 5a, 143 (1950).
- [5] Artmann K., Ann. Physik (6), 7, 209 (1950).
- [6] Artmann K., Ann. Physik (6), 8, 285 (1951).
- [7] Schoch A., Acustica 2, 17 (1952).
- [8] Brechovskich L. M., Volny v sloistych sredach, IAN SSSR, Moskva 1957, 92 - 100, 242 - 251.
- [9] Goos F., Lindberg-Hänchen H., Ann. Physik (6), 5, 251 (1949).
- [10] v. Fragstein C., Schaefer Cl., Ann. Physik (6), 12, 85 (1953).

Došlo 7. 2. 1962.

*Katedra teoretickej fyziky  
Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského  
v Bratislave*

## JEDNODUCHÝ VÝKLAD POSUNU SVETELNÉHO LÚČA PRI ÚPLNOM ODRAZE

Stanislav Kolník

### Suhrn

V článku sa vysvetľuje stranový posun pri totálnom odraze priamo z Fermatovho princípu na rozdiel od doterajších prác, ktoré sa opierajú o približné riešenia Maxwellových rovníc. Ukazuje sa tiež, že so stranovým posunom je vždy spojený vznik bočnej vlny.