A. V. Volovoi

Тауберова теорема ассоциированная с гипотезой Вейла

Mathematica Bohemica, Vol. 116 (1991), No. 3, 276–280

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126178

ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА АССОЦИРОВАННАЯ С ГИПОТЕЗОЙ ВЕЙЛЯ

А. В. ВОЛОВОЙ, Москва

(Поступило в редакцию 22. 3. 1989)

Summary. В этой статье мы изучаем остаток в двучленной асимптотике функции распределения собственных значений для эллиптического оператора на компактном многообразии без края. Для этого мы показываем тауберову теорему.

AMS Classification: 35J25, 35P20.

Двучленная асимптотика функции распределения собственных значений рассматривалась, например, в [1—5] (см. также библиографию в [4]). Впервые она была получена в [3] при некоторых условиях на меру множеств, связанных с замкнутыми бихарактеристиками. В работах [1], [5] получено улучшение оценки остатка в двучленной асимптотике на логарифмический член для случая оператора Лапласа при сильных дополнительных предположениях геометрического типа. В настоящей работе это улучшение получено для общих эллиптических операторов на замкнутом многообразии. При этом достаточным для справедливости улучшенной асимптотики является условие на меру множеств траекторий гамильтонова потока, близких к периодическим. Это условие вляется естественным усилением условий [3].

1. На замкнутом n-мерном многообразии X на $1/2$-плотностях рассматривается классический эллиптический самосопряженный псевдодифференциальный оператор (ПДО) A порядка $m > 0$ с главным символом $a_m(x, \xi) \geqq 0$. Через Φ^t обозначим гамильтонов поток на T^*X, ассоциированный с a_m. Пусть $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots$ — собственные значения оператора A, $N(\lambda)$ — обычная функция распределения этих собственных значений. Положим $S^*X = \{(x, \xi) \mid a_m(x, \xi) = 1\}$ и пусть μ-мера на S^*X, индуцированная гладкой положительной плотностью, d — расстояние на S^*X, индуцированное римановой метрикой на S^*X.

Зафиксируем на S^*X атлас $\{W_j, f_j\}_{j=1,\ldots,J}$, где $f_j\colon W_j \to \tilde{W}_j \subset \mathbb{R}^{2n-1}_{(z^j)}$ соответствующий набор координатных отображений S^*X. Через $\|\cdot\|_j$ обозначим евклидову норму в $\mathbb{R}^{2n-1}_{(z^j)}$, ассоциированную с гладкими координатами $(z^j) = (z)$ определенными в окрестности замыкания W_j. Введем для каждого $t \in \mathbb{R}$ „сквозное" отображение:

$$\Phi^t_{i,j} = f_i \circ \Phi^t \circ f_j^{-1}\colon f_j(\Phi^{-t}(W_i) \cap W_j) \to \tilde{W}_i \,.$$

Определение. Пусть $\{S^M(t)\}_{M\in\mathbb{N}}$ — набор вещественных положительных функций на $[0, +\infty)$. Будем говорить, что этот набор связан с потоком Φ^t, если для каждого $M \in \mathbb{N}$, для любого мультииндекса α, $|\alpha| \leqq M$, любого $t \in \mathbb{R}$ и любых $i, j \in (1, \ldots, j)$

$$\|\partial_z^\alpha \Phi_{i,j}^t(z)\|_i \leqq S^M(|t|) \tag{1}$$

при $z \in f_j(\Phi^{-t}(W_i) \cap W_j)$.

Часто мы будем, считая M достаточно большим, говорить что Φ^t связан с функцией $S(t) = S^M(t)$.

Мы будем предполагать, что $S(t)$ удовлетворяет следующим требованиям:

а) $S(t)$ положительная и неубывающая функция,

б) $S(1) > 1$,

в) $S(t) \in C^1$ и существуют $\varkappa > 0$, $D > 0$, такие что $|S'(t)| \leqq D\,S(t)^{2-\varkappa}$ при $t > 1$,

г) существует такая константа $D_1 > 0$, что $S(t) \geqq D_1 t$ при $t > 1$,

д) либо при любом $\gamma \in (0, 1)$ существуют $h_1, h_2, C_1, C_2 > 0$ такие, что при каждом $t > 1/\gamma$

$$C_1(\gamma)\,S(t)^{h_1(\gamma)} \leqq S(\gamma t) \leqq C_2(\gamma)\,S(t)^{h_2(\gamma)}, \tag{2}$$

где $h_2(\gamma) \to 0$ при $\gamma \to 0$, либо выполнена оценка

$$S(t) \leqq t^{C_1}, \quad t > 1, \tag{3}$$

где постоянные $C, C_1 > 0$ не зависят от t.

Наложим следующее условие на поток Φ^t, связанное с оценкой меры множества его траекторий, являющихся почти замкнутыми: для любого $\delta^0 > 0$ существуют такие $\alpha, \alpha_1, \beta_1, \beta > 0$, что для любого $T > \delta^0$

$$\begin{aligned}\mu\{(x, \xi) \in S^*X \mid \exists t \in (-T, -\delta^0) \cup (\delta^0, T)\colon d(\Phi^t(x, \xi), (x, \xi)) < \\ < \alpha_1\,S(T)^{-\alpha}\} < \beta_1\,S(T)^{-\beta}.\end{aligned} \tag{4}$$

Теорема 1. а) *Если $S(t)$ возрастает при $t \to +\infty$ быстрее любой степени и выполнены условия* (1), (2) *и* (4), *то при $\lambda \to +\infty$*

$$N(\lambda) = C_0\lambda^{n/m} + C_1\lambda^{(n-1)/m} + O(\lambda^{(n-1)/m}/S_{-1}(\lambda^{1/m})), \tag{5}$$

где $S_{-1}(\lambda)$ — обратная функция к S.

б) *Если $S(t) \leqq C_1 t^C$, $C_1, C \leqq O$, то*

$$N(\lambda) = C_0\lambda^{n/m} + C_1\lambda^{((n-1)/m} + O(\lambda^{(n-1)/m-\varepsilon}), \tag{6}$$

где

$$\varepsilon > 0, \quad C_0 = (2\pi)^{-n}\int_{a_m(x,\xi)\leqq 1} 1\,dx\,d\xi, \quad C_1 = -\frac{(2\pi)^{-n}}{m}\int_{S^*X} \operatorname{sub} A.$$

2. Переходя от оператора A к оператору $(A + C)^{1/m}$, можно считать, что $m = 1$.

При доказательстве теоремы 1 важную роль играет следующая тауберова теорема.

Теорема 2. *Пусть $n \geqq 2$, $\delta^0 \geqq 0$, $p \geqq 1$ и $N(\lambda)$ — неубывающая функция на $\mathbb{R}$, $N(\lambda) = O$ при $\lambda \leqq l$, где $l < 0$. Далее, пусть $N(\lambda) = 0(\lambda^n)$ при $\lambda \to +\infty$. Пусть $\varrho(\lambda) \in S(\mathbb{R})$, $\varrho(\lambda) \geqq 0$ при $\lambda \in \mathbb{R}$, ϱ четна и $\hat{\varrho}(0) = 1$, $\hat{\varrho} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Пусть $\hat{\varrho}_\delta(t) = \hat{\varrho}(\delta t)$ при $\delta \in (0, 1)$, а $\chi(t)$ такая гладкая функция, что $\chi(t) = 0$ при $|t| < \gamma/2$, $\chi(t) = 1$ при $|t| > \gamma$. Пусть $\hat{\varrho}_\delta^1(t) = \hat{\varrho}_\delta(t)\,\chi(t)$, $\hat{\varrho}_\delta^2(t) = \hat{\varrho}_\delta^1(t)\,(it)^{-1}$, $\hat{\varrho}_{0,\delta} = \hat{\varrho}_\delta - \hat{\varrho}_\delta^1$.*
Пусть S положительная, строго возрастающая функция на $[0, +\infty)$, удовлетворяющая условиям а)–д). *Пусть, кроме того,*

$$\left|\int \varrho_\delta^k(\lambda - \lambda')\,\mathrm{d}N(\lambda')\right| \leqq C\,S(\delta^{-1})^{-r}\,\lambda^{n-1} + C\,S(\delta^{-1})^L\,\lambda^{n-2}\,, \tag{7}$$

где $\lambda > 1$, $\delta \in (0, 1/\delta^0)$, $k = 1, 2$. Здесь C, L, $r > 0$ не зависят от δ и λ. Пусть при этом выполнено одно из следующих условий:

а) *$S(t)$ возрастает при $t \to +\infty$ быстрее любой степени и выполнено* (2),

б) *$S(t)$ вебет себя как степень при $t \to +\infty$. Пусть еще для любого $l \in \mathbb{N}$ и некоторых C, $C_l > 0$ равномерно по $\delta \in (0, 1/\delta^0)$, $\lambda \geqq 1$ имеет место оценка*

$$\left|\int \varrho_{0,\delta}(\lambda - \lambda')\,\mathrm{d}N(\lambda') - d_0\lambda^{n-1} - d_1\lambda^{n-2}\right| \leqq C\delta\lambda^{n-2} + C\lambda^{n-3}\,. \tag{8}$$

Пусть при $\lambda > 1$, $\delta_1 \geqq 1/\delta^0$ выполняется неравенство

$$\left|\int \varrho_{\delta_1}(\lambda - \lambda')\,\mathrm{d}N(\lambda')\right| \leqq C\delta_1^p\lambda^{n-1}\,, \tag{8'}$$

а при $\lambda \leqq 1$, $\delta \in (0, 1/\delta^0)$

$$\left|\int \varrho_{0,\delta}(\lambda - \lambda')\,\mathrm{d}N(\lambda')\right| \leqq C_l(1 + |\lambda|)^{-l}\,.$$

Тогда при $\lambda \to +\infty$ в случае а)

$$N(\lambda) = \frac{d_0}{n}\lambda^n + \frac{d_1}{n-1}\lambda^{n-1} + O\left(\frac{\lambda^{n-1}}{S_{-1}(\lambda)}\right), \tag{9}$$

а в случае б)

$$N(\lambda) = \frac{d_0}{n}\lambda^n + \frac{d_1}{n-1}\lambda^{n-1} + O(\lambda^{n-1-\varepsilon})\,, \quad \varepsilon > 0\,. \tag{10}$$

Доказательство. Имеем для любого $\delta > 0$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\lambda} \mathrm{d}s \int \varrho_\delta(s - \lambda')\,\mathrm{d}N(\lambda') &= \int_{\lambda' > \lambda + \delta} \mathrm{d}N(\lambda') \int_{-\infty}^{\lambda} \varrho_\delta(s - \lambda')\,\mathrm{d}s + \\ &+ \int_{|\lambda - \lambda'| \leqq \delta} \mathrm{d}N(\lambda') \int_{-\infty}^{\lambda} \varrho_\delta(s - \lambda')\,\mathrm{d}s + \\ &+ \int_{\lambda' < \lambda - \delta} \mathrm{d}N(\lambda') \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho_\delta(s - \lambda')\,\mathrm{d}s - \int_{\lambda' < \lambda - \delta} \mathrm{d}N(\lambda') \int_{\lambda}^{+\infty} \varrho_\delta(s - \lambda')\,\mathrm{d}s\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Заметим, что 3-й член в правой части есть $N(\lambda - \delta)$, а левая часть с учетом (7) и (8) есть $(d_0/n)\,\lambda^n + (d_1/(n-1))\,\lambda^{n-1}$ с точностью до члена, который оценивается через $CS(\delta^{-1})^{-2}\,\lambda^{n-1} + CS(\delta^{-1})^L\,\lambda^{n-2}$. Действительно

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{-\infty}^{\lambda} \mathrm{d}s \int \varrho_\delta(s-\lambda')\,\mathrm{d}N(\lambda') = \\ &= \textstyle\int_{-\infty}^{\lambda} \mathrm{d}s \int \varrho_{0,\delta}(s-\lambda')\,\mathrm{d}N(\lambda') + \int_{-\infty}^{\lambda} \mathrm{d}s \int \varrho_\delta^1(s-\lambda')\,\mathrm{d}N(\lambda')\,.\end{aligned}$$

Изменим порядок интегрирования во втором интеграле. Воспользововшись (7), мы получим оценку, аналогичную (7), для него. Теперь для того, чтобы получить нужную оценку левой части (11) осталось воспользоваться (8) и равенством $\hat{\varrho}_{0,\delta} = \hat{\varrho}_\delta - \hat{\varrho}_\delta^1$.

Оценим 2-й член в правой части (11). В силу неотрицательности ϱ:

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{|\lambda-\lambda'|\leqq\delta} \mathrm{d}N(\lambda') \int_{-\infty}^{\lambda} \varrho_\delta(s-\lambda')\,\mathrm{d}s \leqq \int_{|\lambda-\lambda'|\leqq\delta} \mathrm{d}N(\lambda') \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho_\delta(s)\,\mathrm{d}s = \\ &= \textstyle\int_{|\lambda-\lambda'|\leqq\delta} \mathrm{d}N(\lambda') \leqq (\delta \int \varrho_{M\delta}(\lambda-\lambda')\,\mathrm{d}N(\lambda')\,,\end{aligned}$$

где C и M не зависят от δ и λ. Теперь осталось воспользоваться (7), (8) и (2–3), чтобы оценить его как $C\delta\lambda^{n-1} + CS(\delta^{-1})^L\,\lambda^{n-2}$. Оценим первый член в правой части (II). Имеем

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{\lambda'>\lambda+\delta} \mathrm{d}N(\lambda') \int_{-\infty}^{\lambda} \varrho_\delta(s-\lambda')\,\mathrm{d}s = \\ &= \textstyle\int_{\lambda'>\lambda+\delta} \mathrm{d}N(\lambda') \int_{-\infty}^{(\lambda-\lambda')/\delta} \varrho(s')\,\mathrm{d}s' \leqq B_l \int_{\lambda'>\lambda+\delta} ((\lambda'-\lambda)/\delta)^{-l}\,\mathrm{d}N(\lambda')\,,\end{aligned}$$

где l достаточно велико, B_l не зависит от λ и δ (мы воспользовались быстрым убыванием функции $\int_{-\infty}^{S} \varrho(s')\,\mathrm{d}s'$ при $S \to -\infty$). Последний интеграл можно оценить сверху через $B_l \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\int_{m\leqq(\lambda'-\lambda)/\delta\leqq m+1} \mathrm{d}N(\lambda')\right] m^{-l}$. Но

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{m\leqq(\lambda'-\lambda)/\delta\leqq m+1} \mathrm{d}N(\lambda') \leqq \int_{|\lambda'-\lambda|\leqq\delta_1} \mathrm{d}N(\lambda') \leqq \\ &\leqq \textstyle Cm\delta \int \varrho_{M\delta_1}(\lambda-\lambda')\,\mathrm{d}N(\lambda') \leqq \\ &\leqq C_1 m^{p+1}\delta(\lambda^{n-1} + S(\delta^{-1})^L\,\lambda^{n-2})\,,\end{aligned}$$

где $\delta_1 = 2m\delta$ и мы при $\delta_1 < 1/M\delta^0$ воспользовались (7), (8) и свойством д) функции $S(t)$, а при $\delta_1 \geqq 1/(M\delta^0)$ неравенством (8′). Значит при $l \geqq p+3$ первый член в правой части (11) оценится через

$$\begin{aligned}&(C\delta\lambda^{n-1} + CS(\delta^{-1})^L\,\lambda^{n-2}) \sum_{m=1}^{+\infty} m^{p+1-l} \leqq \\ &\leqq C_1\delta\lambda^{n-1} + C_1 S(\delta^{-1})^L\,\lambda^{n-2}\,.\end{aligned}$$

Аналогично оценивается 4-й член в правой части (11). После замены λ на $\lambda + \delta$ получим

$$N(\lambda) = \frac{d_0}{n}\lambda^n + \frac{d_1}{n-1}\lambda^{n-1} + r(\delta, \lambda)\,, \tag{12}$$

где при $\delta \in (0, 1/\delta^0)$, $\lambda > 1$

$$|r(\delta, \lambda)| \leqq C\delta\lambda^{n-1} + CS(\delta^{-1})^{-r}\,\lambda^{n-1} + CS(\delta^{-1})^L\,\lambda^{n-2}\,.$$

Пользуясь произволом в выборе δ, подставим в (12) $\delta^{-1} = \mu S_{-1}(\lambda)$ при $\lambda > \max\{1, S(\delta^0/\mu)\}$ в случае а) и $\delta^{-1} = \lambda^{\mu}$ при $\lambda > \max\{1, (\delta^0)^{1/\mu}\}$ в случае б), где $\mu > 0$ достаточно малая постоянная, не зависящая от λ, которую выберем позднее. Получим асимптотическую оценку в случае а) (для случая б) она получается аналогично). При $\delta^{-1} = \mu S_{-1}(\lambda)$ остаток $r(\delta, \lambda)$ оценится по модулю через В силу (2), мы сможем оценить 2-й член этого выражения через $C\lambda^{n-1-\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 > 0$, а 3-й член через $C\lambda^{n-2+h_2(\mu)L}$, где $h_2(\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$. Выберем $\mu > 0$ таким малым, что $h_2(\mu)\,L < 1$. Заметим, что из условия возрастания функции $S(t)$ при $t \to +\infty$ быстрее любой степени следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $C_1 > 0$ такое, что $S_{-1}(\lambda) \leqq C_1\lambda^{\varepsilon}$ при $\lambda > S(1)$. □

ЛИТЕРАТУРА

[1] *P. H. Berard:* On the wave equation on a compact Riemannian manifold without conjugate points. Math. Zeitschrift, *155* (1977), 249—276.

[2] *Д. Г. Васильев:* Двучленная асимптотика спектра краевой задачи при внутреннем отражении общего вида. Функц. анализ и его прил., *18* (1984), 1—13.

[3] *J. J. Duistermaat, V. W. Guillemin:* The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. Invent. Math., *29* (1975), 39—79.

[4] *V. Ivrii:* Precise spectral asymptotics for elliptic operators: Lecture Notes in Math. Beılin: Springer-Verlag, *1100* (1984).

[5] *B. Randoll:* The Riemann hypothesis for Selberg's zeta-function. Trans. of Amer. Math. Soc., *276* (1976), 203—223.

Souhrn

TAUBEROVA VĚTA ASOCIOVANÁ S WEYLOVOU HYPOTÉZOU

A. V. Volovoj

V článku je studován zbytek ve dvoučlenné asymptotice distribuční funkce vlastních čísel v případě eliptického operátoru na kompaktní varietě bez kraje.

Аддресс автора: Проф. *А. В. Воловой*, д. 36, к. 2, кв. 93, ул. Матвеевская, 119517 Москва, СССР.