Viliam Chvál; Melichar Kopas

Представление квазирегулярных конфигураций

Mathematica Bohemica, Vol. 116 (1991), No. 2, 119–131

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126143

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КВАЗИРЕГУЛЯРНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

VILIAM CHVÁL, MELICHAR KOPAS, Košice

(Поступило в редакцию 28. 3. 1988)

Summary. A quasiregular configuration is a finite partial plane, which not contains proper closed configuration. In this paper the authors investigate a representations of quasiregular configurations in real projective space and in comples projective plane.

Настоящая статья посвящена проблеме представимости конфигруаций определенного класса в проективной плоскости и в проективном пространстве. Напомним, что возможность представления некоторых конфигураций изучалась относительно давно и детально. Так конфигурацию $(12_4, 16_3)$ изучали Гессе [1], Метелка [2], Быджовски [3] и другие. Брук и Боус в [4] доказали представимость частичной плоскости содержащей v прямых в v-мерном проективном пространстве. Один из авторов [5] доказал возможность представления свободной проективной плоскости в трёхмерном проективном пространстве.

1. В начале введём обозначения и некоторые результаты, которыми мы будем пользоваться в следующих разделах.

Конфигурацией мы называем частичную плоскость, т.е. конечную инцидентную структуру

$$\mathscr{K} = (\mathscr{B}, \mathscr{P}, \mathscr{I}),$$

где $\mathscr{B}$ — множество точек, $\mathscr{P}$ — множество блоков и $\mathscr{I} \subset \mathscr{B} \times \mathscr{P}$ — множество инциденций, причём каждая пара элементов из $\mathscr{B}(\mathscr{P})$ инцидентна не более чем с одним элементом из $\mathscr{P}(\mathscr{B})$.

Элементом конфигурации $\mathscr{K}$ мы считаем точку или блок на $\mathscr{K}$. Если $\alpha, \beta \in \mathscr{K}$, то

$$\tau(\alpha) = \tau(\beta) \quad [\tau(\alpha) \neq \tau(\beta)]$$

обозначает, что α, β — элементы одинакого [разного] типа, т.е. оба являются точками или блоками [один из них точка и второй блок].

Для $\alpha_i, \alpha_j \in \mathscr{K}$ мы будем пользоваться сокращением

$$\tau(\alpha_i) = \tau(i),$$
$$\tau(\alpha_j) = \tau(j).$$

Элементы $\alpha, \beta, \gamma \in \mathscr{K}$ мы называем *коэлементными,* если существует $\delta \in \mathscr{K}$ такое что

$$\alpha, \beta, \gamma \,\mathrm{I}\, \delta \,.$$

Коэлементные α, β, γ обозначаем $c(\alpha, \beta, \gamma)$, в противном случае пишем non $c(\alpha, \beta, \gamma)$.

Если $\beta, \gamma \,\mathrm{I}\, \alpha$, $\beta \neq \gamma$, то элемент α (единственный) мы обозначим $\alpha = \beta\gamma$ и $[\alpha]$ будет обозначать множество всех элементов из $\mathscr{K}$ инцидентных с α.

Конфигурация $\mathscr{K} = (\mathscr{B}, \mathscr{P}, \mathscr{I})$ *содержит* конфигурацию $\mathscr{K}^{\sim} = (\mathscr{B}^{\sim}, \mathscr{P}^{\sim}, \mathscr{I}^{\sim})$, если

$$\mathscr{B}^{\sim} \subset \mathscr{B}\,, \quad \mathscr{P}^{\sim} \subset \mathscr{P}\,, \quad \mathscr{I}^{\sim} \subset \mathscr{I}$$

(обозначение $\mathscr{K}^{\sim} \subset \mathscr{K}$). В этом случае $\mathscr{K}^{\sim}$ также называется *подконфигурацией* конфигурации $\mathscr{K}$. Если $\mathscr{K}^{\sim} \subset \mathscr{K}$ и $\mathscr{K} \neq \emptyset, \mathscr{K}$, то $\mathscr{K}^{\sim}$ называется *собственной* подконфигурацией конфигурации $\mathscr{K}$.

Если конфигурация $\mathscr{K} = (\mathscr{B}, \mathscr{P}, \mathscr{I})$ содержит конфигурацию $\mathscr{L} = (\mathscr{B}_1, \mathscr{P}_1, \mathscr{I}_1)$, то $\mathscr{K}/\mathscr{L}$ обозначает конфигурацию состоящую из элементов конфигурации $\mathscr{K}$, которые не принадлежат конфигурации $\mathscr{L}$.

Рангом элемента $\alpha \in \mathscr{K}$ называется число

$$h(\alpha, \mathscr{K}) = h(\alpha) = 2 - i(\alpha)\,,$$

где $i(\alpha)$ – число элементов конфигурации $\mathscr{K}$ инцидентных с элементом α. Если $h(\alpha) \geqq 0$, то элемент α называется *свободным* элементом конфигурации $\mathscr{K}$.

Конфигурация $\mathscr{K}$ *открыта*, если содержит по крайней мере один свободный элемент. В противном случае конфигурация *замкнута.*

Ранг конфигурации $\mathscr{K}$ определяется формулой

$$h(\mathscr{K}) = \min_{\alpha \in \mathscr{K}} h(\alpha)$$

В 4 мы существенным образом используем *теорему Гильберта о нулях* (Nullstellensatz) в следующей форме:

Теорема. *Пусть* $f_1, f_2, \ldots, f_n, f$ *– полиномы из* $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *над полем* F *и пусть* f *обращается в нуль во всех общих нулях полиномов* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *в алгебраически замкнутом расширении* $\bar{F}$ *поля* F. *Тогда существует натуральное число* $\varrho \in N$ *такое, что* f^{ϱ} *принадлежит идеалу порожденному полиномами* $f_1, f_2, \ldots, f_n$

2. В этом разделе мы определяем свободную конфигурацию и приводим некоторые её свойства.

Пусть $\mathscr{L} \subset \mathscr{K}$, $\alpha \in \mathscr{K}/\mathscr{L}$ и пусть $\mathscr{L}(\alpha)$ – конфигурация, которая возникает из $\mathscr{L}$ присоединением элемента α. Напомним, что $\mathscr{L}(\alpha)$ состоит из элементов конфигурации $\mathscr{L}$ и элемента α, причём для $\gamma, \delta \in \mathscr{L}(\alpha)$ имеем

$$\gamma \,\mathrm{I}\, \delta \quad \text{в} \quad \mathscr{L}(\alpha) \Leftrightarrow \gamma \,\mathrm{I}\, \delta \quad \text{в} \quad \mathscr{K}\,.$$

Положим

$$\mathscr{L}(\alpha) = \mathscr{F}(\mathscr{L}, \alpha),$$

если элемент α свободный в $\mathscr{L}(\alpha)$.

Определение 1. *Пусть $\mathscr{K}, \mathscr{L}$ – конфигурации, $\mathscr{L} \subset \mathscr{K}$. Конфигурация $\mathscr{K}$ называется* свободным расширением *конфигурации $\mathscr{L}$, если существуют конечные последовательности*

$$\{\mathscr{K}_i\}_{i=0}^n, \ \{\alpha_i\}_{i=1}^n$$

такие, что

$$\mathscr{K}_0 = \mathscr{L},$$

$$\mathscr{K}_i = \mathscr{F}(\mathscr{K}_{i-1}, \alpha_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\mathscr{K}_n = \mathscr{K}.$$

Мы будем выражать этот факт формулой

$$\mathscr{K} = \mathscr{F}(\mathscr{L})$$

и последовательность $\{\mathscr{K}_i\}_{i=0}^n$ будем называть *порождающей последовательностью* конфигурации $\mathscr{K}$.

Конфигурация $\mathscr{K}$ *свободна*, если

$$\mathscr{K} = \mathscr{F}(\emptyset).$$

Конфигурация $\mathscr{K}$ называется *связной,* если для каждых двух элементов $\alpha, \beta \in \mathscr{K}$ существует последовательность

$$\{\alpha_i\}_{i=0}^n, \ \alpha_i \in \mathscr{K}$$

такая, что

$$\alpha = \alpha_0 \mathrm{I} \alpha_1 \mathrm{I} \alpha_2 \mathrm{I} \ldots \mathrm{I} \alpha_{n-1} \mathrm{I} \alpha_n = \beta.$$

Лемма 1. *Связная конфигурация ранга не менее* -1 *не содержит собственной замкнутой конфигурации.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{K}$ содержит собственную замкнутую конфигурацию $\mathscr{L}$. Если $\alpha \in \mathscr{L}$ и $\beta \in \mathscr{K}|\mathscr{L}$, то по предположению существует последовательность

$$\alpha = \alpha_0 \mathrm{I} \alpha_1 \mathrm{I} \alpha_2 \mathrm{I} \ldots \mathrm{I} \alpha_{n-1} \mathrm{I} \alpha_n = \beta.$$

Пусть $\alpha_i \in \mathscr{L}$ и $\alpha_{i+1} \notin \mathscr{L}$, $(0 \leqq i \leqq n-1)$. Так как $\mathscr{L}$ замкнута, то в $\mathscr{L}$ $i(\alpha_i) = 3$, и, следовательно, $\alpha_i \operatorname{non} \mathrm{I} \alpha_{i+1}$, что противоречит определению последовательности $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$.

Если конфигурация $\mathscr{K}$ не содержит совственной замкнутой конфигурации и $h(\mathscr{K}) = -1$, то мы её будем называть *квазирегулярной конфигурацией.*

Напомним, что для свободной конфигурации $h(\mathscr{K}) \geqq 0$ и для регулярной $h(\mathscr{K}) = -1$.

Теорема 1. *Если $\mathscr{K}$ квазирегулярная конфигурация и $\beta \in \mathscr{K}$, то $\mathscr{K}/\beta$ – свободная конфигурация.*

Доказательство. Обозначим $\mathscr{K}/\beta = \mathscr{L}$; пусть $|\mathscr{L}| = n$. Построим конечные последовательности

$$\{\mathscr{L}_i\}_{i=0}^n, \quad \{\alpha_i\}_{i=1}^n, \quad \alpha_i \in \mathscr{L}_i,$$

так, что

$$\mathscr{L}_i = \mathscr{F}(\mathscr{L}_{i-1}, \alpha_i).$$

Пусть $\mathscr{L}_n = \mathscr{L}$ и $\mathscr{L}_i$ уже построена и непуста. Возьмём элемент $\alpha_i \in \mathscr{L}_i$ такой, что $h(\alpha_i) \geqq 0$. Положим

$$\mathscr{L}_{i-1} = \mathscr{L}_i/\alpha_i.$$

Из предположений теоремы вытекает, что $\mathscr{L}_{i-1}$ – отркытая конфигурация и $\mathscr{L}_i = \mathscr{F}(\mathscr{L}_{i-1}, \alpha_i)$. Из конструкции следует, что

$$|\mathscr{L}_{i-1}| = |\mathscr{L}_i| - 1,$$

и поэтому

$$|\mathscr{L}_0| = 0, \quad \text{т.е.} \quad \mathscr{L}_0 = \emptyset.$$

Замечание 1. Из предществующей конструкции следует, что последовательность $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ можно избрать таким образом, что

$$h(\alpha_i, \mathscr{L}_i) = 2 \quad \text{для} \quad i \in I_2 = \{1, 2, \ldots, k\},$$
$$1 \leqq k < n,$$
$$h(\alpha_i, \mathscr{L}_i) = 1 \quad \text{для} \quad i \in I_1,$$
$$h(\alpha_i, \mathscr{L}_i) = 0 \quad \text{для} \quad i \in I_0.$$

Если $i \in I_0$, то существуют точно два элемента

$$\alpha_{\varphi(i)}, \alpha_{\psi(i)} \in \mathscr{L}_{i-1}$$

такие, что

$$\alpha_i = \alpha_{\varphi(i)}\alpha_{\psi(i)}.$$

Если $i \in I_1$, то существует единственный элемент

$$\alpha_{\varphi(i)} \in \mathscr{L}_{i-1}$$

такой, что

$$\alpha_i \, \mathrm{I} \, \alpha_{\varphi(i)}.$$

Следствие 1. *Пусть $\mathscr{K}$ — связная конфигурация, $h(\mathscr{K}) \geqq -1$ и $\beta \in \mathscr{K}$. Тогда конфигурация $\mathscr{K}|\beta$ свободна.*

Доказательство. Утверждение вытекает непосредственно из леммы 1 и теоремы 1.

Следствие 2. *Если $\mathscr{K}$ — связная конфигурация типа (n_3, n_3) и элемент $\beta \in \mathscr{K}$, то $\mathscr{K}|\beta$ — свободная конфигурация.*

Доказателство. Так как $h(\alpha) = -1$ для каждого элемента $\alpha \in \mathscr{K}$, утверждение вытекает непосредственно из следствия 1.

3. Целью этого раздела является изучение представимости квазирегулярных конфигураций в проективном пространстве в следующем смысле: Пусть $\mathscr{K} = (\mathscr{B}, \mathscr{P}, \mathscr{I})$ и $\mathscr{K}^{\sim} = (\mathscr{B}^{\sim}, \mathscr{P}^{\sim}, \mathscr{I}^{\sim})$ — конфигурации. Представлением конфигурации $\mathscr{K}$ в конфигурации $\mathscr{K}^{\sim}$ называется инъективное отображение $\phi\colon \mathscr{B} \cup \mathscr{P}$ в $\mathscr{B}^{\sim} \cup \mathscr{P}^{\sim}$ такое, что $\phi(\mathscr{B}) \subset \mathscr{B}^{\sim}$, $\phi(\mathscr{P}) \subset \mathscr{P}^{\sim}$ и $\alpha \mathrm{I} \beta \Leftrightarrow \phi(\alpha) \mathrm{I} \phi(\beta)$. Конфигурация $\mathscr{K}$ представима в конфигурации $\mathscr{K}^{\sim}$, если существует представление ϕ конфигурации $\mathscr{K}$ в $\mathscr{K}^{\sim}$.

Пусть $\pi_3(F)$ — трехмерное проективное пространство над полем F с характеристикой нуль. Пусть $\mathscr{K}_3(F) = (\mathscr{B}, \mathscr{P}, \mathscr{I})$ — конфигурация, для которой $\mathscr{B}$ множество точек в $\pi_3(F)$, $\mathscr{P}$ — множество плоскостей в $\pi_3(F)$ и $\mathscr{I}$ — отношение инцидентности в $\pi_3(F)$. Тогда имеет место теорема.

Теорема 2. *Квазирегулярная конфигурация представима в $\pi_3(F)$.*

Доказателство. Так как $\mathscr{K}$ квазирегулярна, существует элемент $\beta \in \mathscr{K}$ такой, что $h(\beta) = -1$. Обозначим $\mathscr{L} = \mathscr{K}|\beta$. По теореме 1 конфигурация $\mathscr{L}$ свободна. Пусть $\{\mathscr{L}_i\}_{i=0}^{n}$ — порождающая последовательность конфигурации $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_i = \mathscr{F}(\mathscr{L}_{i-1}, \alpha_i)$ и пусть элементы α_i избраны так (см. замечание 1) что

1) $h(\alpha_i, \mathscr{L}_i) = 2$ для $i \in I_2$, $i = 1, 2, \ldots, k$,
2) $h(\alpha_i, \mathscr{L}_i) = 1$ для $i \in I_1$,
3) $h(\alpha_i, \mathscr{L}_i) = 0$ для $i \in I_0$.

Мы построим отображение ϕ конфигурации $\mathscr{K}$ в $\mathscr{K}_3(F)$ со свойствами:

i) $\phi(\alpha_i) \neq \phi(\alpha_j)$, $\alpha_j \in \mathscr{L}_{i-1}$,
ii) $\phi(\alpha_i) \mathrm{I} \phi(\alpha_j) \Leftrightarrow \alpha_i \mathrm{I} \alpha_j$, $\alpha_j \in \mathscr{L}_{i-1}$,
iii) $\phi(\alpha_i)$ non I $\phi(\alpha_j)$ $\phi(\alpha_m)$ $\phi(\alpha_l)$,

для $\alpha_j, \alpha_m, \alpha_l \in \mathscr{L}_{i-1}$, $\tau(j) = \tau(m) = \tau(l) = \tau(i)$.

Предположим, что элементы

$$\phi(\alpha_l), \phi(\alpha_2), \ldots, \phi(\alpha_{i-1})$$

уже построены и построим элемент $\phi(\alpha_i)$ следующим образом: Пусть

$$M(i) = \{\phi(\alpha_j);\ j < i,\ \tau(\alpha_j) = \tau(\alpha_i)\}\ ,$$
$$N(i) = \{\phi(\alpha_j);\ j < i,\ \tau(\alpha_j) \neq \tau(\alpha_i),\ \alpha_j \mathrm{I}\, \alpha_i\}\ ,$$
$$P(i) = \{\phi(\alpha),\ \phi(\alpha) = \phi(\alpha_j)\,\phi(\alpha_m)\,\phi(\alpha_l)\ ,\quad j, m, l < i\ ,$$
$$\tau(\alpha) = \tau(\alpha_i),\ \alpha \mathrm{I}\, \alpha_i\}\ ,$$
$$R(i) = M(i) \cup N(i) \cup P(i)\ .$$

Пусть $\varkappa$ – прямая в $\pi_3(F)$, определённая следующим образом:

1) для $i \in I_2$ $\varkappa$ – произвольная, но фиксированная прямая в $\pi_3(F)$,
2) для $i \in I_1$ $\varkappa \mathrm{I}\, \phi(\alpha_{\varphi(i)})$,
3) для $i \in I_0$ $\varkappa = \phi(\alpha_{\varphi(i)})\,\phi(\alpha_{\psi(i)})$.

Обозначим $Q(i)$ множество всех элементов множества $R(i)$, которые инцидентны с прямой $\varkappa$.

Пусть
$$S(i) = [\varkappa]/Q(i)\ .$$

Очевидно, что $S(i) \neq \emptyset$.

Пусть теперь $\phi(\alpha_i)$ – любой элемент из $S(i)$ такой, что
$$\tau(\phi(\alpha_i)) = \tau(\alpha_i)\ ,\quad i \in I_0 \cup I_1 \cup I_2\ .$$

Из построения множеств $M(i)$, $N(i)$, $R(i)$, $Q(i)$ и $S(i)$ следует, что $\phi(\alpha_i)$ обладает свойствами i), ii), iii).

Теперь определим элемент $\phi(\beta)$. Пусть
$$\beta \mathrm{I}\, \alpha_j, \alpha_l, \alpha_n\ ,\quad 1 \leqq j\ ,\quad l < n$$

Положим
$$\phi(\beta) = \phi(\alpha_j)\,\phi(\alpha_l)\,\phi(\alpha_n)\ .$$

Докажем теперь, что ϕ – представление $\mathscr{K}$ в $\mathscr{K}_3(F)$.

1) Для $\alpha_i, \alpha_j \in \mathscr{K}/\beta$ и $j < i$

из ii) вытекает, что
$$\alpha_l \mathrm{I}\, \alpha_j \Leftrightarrow \phi(\alpha_i) \mathrm{I}\, \phi(\alpha_j)\ .$$

Если
$$\alpha_i \mathrm{I}\, \beta\ ,$$

то
$$i = j\ ,\quad \text{или}\quad i = l\ ,\quad \text{или}\quad i = n\ .$$

Из определения $\phi(\beta)$ следует, что $\phi(\beta) \mathrm{I}\, \phi(\alpha_i)$. Обратно, пусть
$$\phi(\beta) \mathrm{I}\, \phi(\alpha_i)\ ,\quad i < n\ .$$

Тогда

$$\phi(\alpha_n)\,\mathrm{I}\,\phi(\alpha_i)\,\phi(\alpha_j)\,\phi(\alpha_l)\,,$$

что противоречит свойству iii). Значит, два элемента инцидентны в $\mathscr{K}$ точно в случае, когда их образы инцидентны в $\mathscr{K}_3(F)$.

2) Далее докажем, что ϕ – инъективное отображение. Пусть $\alpha_i \neq \alpha_j$ и, например $j < i$. Тогда из i) следует, что $\phi(\alpha_j) \neq \phi(\alpha_i)$. Пусть

$$\phi(\alpha_i) = \phi(\beta)\,.$$

Так как

$$\phi(\beta) = \phi(\alpha_j)\,\phi(\alpha_l)\,\phi(\alpha_n)\,,$$

то

$$\phi(\alpha_j),\ \phi(\alpha_l),\ \phi(\alpha_n)\,\mathrm{I}\,\phi(\alpha_i)\,,$$

и поэтому в следствие 1)

$$\alpha_j,\ \alpha_n,\ \alpha_l\,\mathrm{I}\,\alpha_i\,.$$

Следовательно

$$\alpha_i = \alpha_j\,\alpha_n = \beta\,,$$

что невозможно.

Замечание 2. *По теореме 2 конечная квазирегулярная конфигурация представима в действительном трёхмерном проективном пространстве.*

4. В этом разделе мы исследуем проблему представления квазирегулярной конфигурации $\mathscr{K}$ в проективной плоскости над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.

Для простоты изложения мы введём сначала конфигурацию $\mathscr{K}^\sim$. Пусть для каждого $i \in I_1$ определён элемент $\beta_i \notin \mathscr{K}$. Элементами конфигурации $\mathscr{K}^\sim$ являются все элементы из конфигурации $\mathscr{K}$ и все элементы β_i, $i \in I_1$, причём для $i \in I_1$ $\tau(\beta_i) \neq \tau(\alpha_i)$ и β_i – элемент, которой инцидентен (в $\mathscr{K}^\sim$) только с α_i. Значит, в $\mathscr{K}$ всякой элемент α_i, $i \in I_1$ инцидентен с двумя элементами – $\alpha_{\varphi(i)} \in \mathscr{K}$ и $\beta_i = \alpha_{\psi(i)} \in \mathscr{K}^\sim/\mathscr{K}$. Очевидно, что $\mathscr{K}^\sim$ квазирегулярная конфигурация. Ясно, что мы можем избрать порождающую последовательность $\mathscr{L}_i^\sim$ конфигурации $\mathscr{K}^\sim$ таким образом, что $h(\alpha_i, \mathscr{L}_i^\sim) = 2$ для $i \in I_2 = \{1, 2, \ldots, k\}$ и $h(\alpha_i, \mathscr{L}_i^\sim) = 0$ для $i \in I_0 = \{k+1, k+2, \ldots, n\}$, причём присоединённые элементы β_i принадлежат первой группе. Значит, в $\mathscr{K}^\sim$ для $i = k+1, k+2, \ldots, n$ $\alpha_i = \alpha_{\varphi(i)}\alpha_{\psi(i)}$.

Как и в 3 мы предположим, что β – элемент из $\mathscr{K}$ ранга -1, инцидентный с элементами $\alpha_l, \alpha_m, \alpha_n$.

Конфигурация $\mathscr{K}$ представима в $\pi_2(F)$ глобально, если всякое представление конфигурации $\mathscr{K}/\beta$ в $\pi_2(F)$ можно продолжить до представления $\mathscr{K}$. Если существует представление в $\pi_2(F)$, но $\mathscr{K}$ не представима глобально то мы будем говорить, что $\mathscr{K}$ представима в $\pi_2(F)$ локально.

Замечание 3. *Очевидно, что всякое представление* $\mathscr{K}^{\sim}$ *в* $\pi_2(F)$ *порождает представление конфигурации* $\mathscr{K}$.

Верно и обратное утверждение, если только порядок поля F достаточно большой. Действительно, если ϕ – представление в $\pi_2(F)$ и $i \in I_1$, пусть $\phi(\beta_i)$ – элемент плоскости $\pi_2(F)$ со свойствами

1) $\tau(\phi(\beta_i)) \neq \tau(\alpha_i)$,
2) $\phi(\beta_i)\,\mathrm{I}\,\phi(\alpha_i)$,
3) $\phi(\beta_i)\,\mathrm{non\,I}\,\phi(\alpha)$ для всех $\alpha \in \mathscr{K}$, $\alpha \neq \alpha_i$.

Очевидно, что условия 1), 2), 3) не трудно вполнить например в случае $|F| > |\mathscr{K}|$.

Для $i \in I_2$ пусть x_i, y_i, z_i – трансцедентные элементы над полем F и пусть через X, Y и Z обозначают множества всех x_i, y_i, z_i соответственно. Дальше пусть для $i \in I_0$

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad x_i &= y_{\varphi(i)}z_{\psi(i)} - y_{\psi(i)}z_{\varphi(i)}\,,\\
y_i &= z_{\varphi(i)}x_{\psi(i)} - z_{\psi(i)}x_{\varphi(i)}\,,\\
z_i &= x_{\varphi(i)}y_{\psi(i)} - x_{\psi(i)}y_{\varphi(i)}\,.
\end{aligned}
$$

Ясно, что для всех $i \in I_0 \cup I_2$, x_i, y_i, z_i – многочлены в переменных из X, Y, Z и с коэфициентами из F_p (простое подполе поля F).

Для $i = 1, 2, \ldots, n$ пусть

$$M_i = \{j < i\colon \tau(j) \neq \tau(i),\ \alpha_j\,\mathrm{non\,I}\,\alpha_i\},$$

$$N_i = \{\{j, r\};\ j, r < i\colon \tau(j) = \tau(r) = \tau(i),\ \mathrm{non\,c}\,(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_r)\}\ .$$

Дальше для $i = 1, 2, \ldots, n$; $j \in M_i$ и $\{j, r\} \in N_i$ пусть

$$
\begin{aligned}
(2)\qquad g_{ij} &= x_ix_j + y_iy_j + z_iz_j\,,\\
g_{ijr} &= x_i(y_jz_r - y_rz_j) + y_i(z_jx_r - z_rx_j) + z_i(x_jy_r - x_ry_j)\,,
\end{aligned}
$$

$$(3)\qquad g_i = \prod_{j\in M_i} g_{ij} \cdot \prod_{\{j,r\}\in N_i} g_{ijr}\,,$$

$$(4)\qquad g = \prod_{i=1}^{n} g_i\,.$$

Так как $h(\beta) = -1$, существуют элементы $\alpha_l, \alpha_m, \alpha_n\,\mathrm{I}\,\beta$. Пусть

$$f = x_n(y_mz_l - y_lz_m) + y_n(z_mx_l - z_lx_m) + z_n(x_my_l - x_ly_m)\,.$$

Ясно, что $g_{ij}, g_{ijr}, g_i, g, f \in F_p[X, Y, Z]$ и что в случае поля F нулевой характеристики все эти многочлены принадлежат даже $Z_p[X, Y, Z]$. Для $i = 1, 2, \ldots, k$ пусть r_i, s_i, t_i – произвольные элементы из F и $A_i = (r_i, s_i, t_i) \in F^3$.

Наконец для $h = h(x_1, x_2, \ldots, x_k;\ y_1, y_2, \ldots, y_k; z_1, z_2, \ldots, z_k) \in F_p[X, Y, Z]$, пусть

$$
\begin{aligned}
&h(A_1, A_2, \ldots, A_k) =\\
&= h(r_1, r_2, \ldots, r_k;\ s_1, s_2, \ldots, s_k;\ t_1, t_2, \ldots, t_k)\,,
\end{aligned}
$$

Лемма 2. *Для* $A_1, A_2, \ldots, A_k \in F^3, \lambda \in F$ *и* $1 \leqq i \leqq n$ *существуют числа* $\omega_i, \omega, \varrho$ *такие, что*

$$g_i(\lambda A_1, \lambda A_2, \ldots, \lambda A_k) = \lambda^{\omega_i} g_i(A_1, A_2, \ldots, A_k),$$
$$g(\lambda A_1, \lambda A_2, \ldots, \lambda A_k) = \lambda^{\omega} g(A_1, A_2, \ldots, A_k),$$
$$f(\lambda A_1, \lambda A_2, \ldots, \lambda A_k) = \lambda^{\varrho} f(A_1, A_2, \ldots, A_k).$$

Доказательство. Утверждение следует непосредственно из (1)–(4).

Из леммы 2 следует, что $g(A_1, A_2, \ldots, A_k) = 0$ (соответственно $f(A_1, A_2, \ldots, A_k) = 0$) тогда и только тогда, когда $g(\lambda A_1, \lambda A_2, \ldots, \lambda A_k) = 0$ (соответственно $f(\lambda A_1, \lambda A_2, \ldots, \lambda A_k) = 0$). Так как A_i и λA_i ($\lambda \neq 0$) представляют один и тотже элемент α_i из $\pi_2(F)$, мы можем писать $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = 0$ и $g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = 0$ вместо $f(A_1, A_2, \ldots, A_k) = 0$ и $g(A_1, A_2, \ldots, A_k) = 0$ соответственно.

Лемма 3. 1) *Конфигурация* $\mathscr{K}^{\sim}$ *представима в* $\pi_2(F)$ *тогда и только тогда, когда у многочлена* f *имеется нулевая точка* $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, $A_i \neq (0, 0, 0)$, *для которой* $g(A_1, A_2, \ldots, A_k) \neq 0$.

2) *Если конфигурация* $\mathscr{K}^{\sim}$ *представима в* $\pi_2(F)$ *локально, то* $f \neq 0$.

Доказательство. Пусть ϕ – представление конфигурации $\mathscr{K}^{\sim}$ в $\pi_2(F)$. Для $1 \leqq i \leqq k$ пусть

$$\phi(\alpha_i) = [r_i, s_i, t_i] = [A_i] \neq (0, 0, 0).$$

Для $i > k$ из $\alpha_i = \alpha_{\varphi(i)}\alpha_{\psi(i)}$ следует

$$r_i = x_i(A_i, A_2, \ldots, A_k), \quad s_i = y_i(A_1, A_2, \ldots, A_k),$$
$$t_i = z_i(A_1, A_2, \ldots, A_k).$$

Если $j < i$ и $j \in M_i$, то $\phi(\alpha_j)$ non I $\phi(\alpha_i)$ и, значит,

$$r_j r_i + s_j s_i + t_j t_i = g_{ij}(A_1, A_2, \ldots, A_k) \neq 0.$$

Аналогично, для $\{j, r\} \in N_i$ имеет место nonc $(\phi(\alpha_n), \phi(\alpha_j), \phi(\alpha_i))$, т.е.

$$0 \neq \begin{vmatrix} r_i & s_i & t_i \\ r_j & s_j & t_j \\ r_r & s_r & t_r \end{vmatrix} = g_{ijr}(A_1, A_2, \ldots, A_k).$$

Значит, $g_i(A_1, A_2, \ldots, A_k) \neq 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и в силу того и $g(A_1, A_2, \ldots, A_k) \neq 0$.

Так как

$$\phi(\beta)\, \mathrm{I}\, \phi(\alpha_n)\, \phi(\alpha_m)\, \phi(\alpha_l),$$

мы имеем

$$\mathrm{c}(\phi(\alpha_n), \phi(\alpha_m), \phi(\alpha_l)),$$

или

$$0 = \begin{vmatrix} r_n & s_n & t_n \\ r_m & s_m & t_m \\ r_l & s_l & t_l \end{vmatrix} = f(A_1, A_2, \dots, A_k).$$

И так это значит, что мы получили нулевую точку многочлена f, для которой $g(A_1, A_2, \dots, A_k) \neq 0$.

Пусть обратно $f(A_1, A_2, \dots, A_k) = 0$, $g(A_1, A_2, \dots, A_k) \neq 0$ и $A_i \neq (0, 0, 0)$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$. Положим

$$\phi(\alpha_i) = [r_i, s_i, t_i] = [x_i(A_1, A_2, \dots, A_k), \; y_i(A_{i1}, A_2, \dots, A_k), \; z_i(A_1, A_2, \dots, A_k)] \tag{5}$$

и

$$\phi(\beta) = \phi(\alpha_n)\,\phi(\alpha_m). \tag{6}$$

Мы докажем, что (5), (6) определяют представление $\mathscr{K}^\sim$ в $\pi_2(F)$

а) Если $\phi(\alpha_i) = (0, 0, 0)$, то $i > k$. Для $j \neq \varphi(i)$, $\psi(i)$ мы получим

$$\begin{aligned} g_{ij}(A_1, A_2, \dots, A_k) &= x_i(A_1, A_2, \dots, A_k)\,x_j(A_1, A_2, \dots, A_k) + \\ &+ y_i(A_i, A_2, \dots, A_k)\,y_j(A_1, A_2, \dots, A_k) + \\ &+ z_i(A_1, A_2, \dots, A_k)\,z_j(A_1, A_2, \dots, A_k) = 0\,; \\ g(A_1, A_2, \dots, A_k) &= 0\,, \end{aligned}$$

что противоречит предположению. Значит (5), (6) действительно определяют элементы $\pi_2(F)$.

б) Если $\phi(\alpha_j)\,\mathrm{I}\,\phi(\alpha_i)$ и $j < i$, то

$$r_i r_j + s_i s_j + t_i t_j = 0.$$

Так как

$$g(A_1, A_2, \dots, A_k) \neq 0,$$

мы получаем, что $j \notin M_i$, что влечёт $\alpha_i\,\mathrm{I}\,\alpha_j$. Пусть, обратно, $\alpha_j\,\mathrm{I}\,\alpha_i$, $j < i$. Тогда $j = \varphi(i)$ или $j = \psi(i)$. Предположим, что $j = \varphi(i)$. Из (1) мы получим

$$\begin{aligned} r_i r_j + s_i s_j + t_i t_j &= (s_j t_{\psi(i)} - s_{\psi(i)} t_j)\,r_j + \\ &+ (t_j r_{\psi(i)} - t_{\psi(i)} r_j)\,s_j + (r_j s_{\psi(i)} - r_{\psi(i)} s_j)\,t_j = 0\,, \end{aligned}$$

т.е. $\phi(\alpha_j)\,\mathrm{I}\,\phi(\alpha_i)$.

Следовательно, для $j, i = 1, 2, \dots, n$ $\alpha_i\,\mathrm{I}\,\alpha_j$ тогда и только тогда, когда $\phi(\alpha_i)\,\mathrm{I}\,\phi(\alpha_j)$.

Если $\phi(\alpha_j)\,\mathrm{I}\,\phi(\beta)$, то, в следствие (4) с $(\phi(\alpha_j), \phi(\alpha_m), \phi(\alpha_n))$ и $g_{njm}(A_1, A_2, \dots, A_k) = 0$. Отсюда следует, что $\{j, m\} \in N_i$ и, следовательно, с $(\alpha_j, \alpha_m, \alpha_n)$, что влечёт $\alpha_j\,\mathrm{I}\,(\alpha_m, \alpha_n) = \beta$.

Предположим наконец, что $\alpha_j \, \mathrm{I} \, \beta$. Тогда по определению β $j = n, m$ или l. В случае $j = n, m$ $\phi(\beta) \, \mathrm{I} \, \phi(\alpha_n), \phi(\alpha_m)$ по (5). Если $j = l$, то $f(A_1, A_2, \ldots, A_k) = 0$ влечёт $c\,(\phi(\alpha_n), \phi(\alpha_m), \phi(\alpha_l))$ и, следовательно, $\phi(\beta) = \phi(\alpha_n)\,\phi(\alpha_m) = \phi(\alpha_n)\,\phi(\alpha_l)$, т.е. $\phi(\beta) \, \mathrm{I} \, \phi(\alpha_l)$.

в) Покажем теперь, что отображение ϕ инъективно. Пусть

$$\phi(\alpha_i) = \phi(\alpha_j) = \phi(\alpha_{\varphi(j)}\alpha_{\psi(j)})$$

для $j < i$ и $\tau(i) = \tau(j)$.

Тогда

$$\phi(\alpha_{\varphi(i)}), \phi(\alpha_{\psi(j)}) \, \mathrm{I} \, \phi(\alpha_i)\,,$$

из чего следует (по б)

$$\alpha_{\varphi(j)}, \alpha_{\psi(j)} \, \mathrm{I} \, \alpha_i\,.$$

Поэтому

$$\{\varphi(j), \psi(j)\} = \{\varphi(i), \psi(i)\}$$

и, действительно, $\alpha_j = \alpha_i$.

Если $\phi(\alpha_i) = \phi(\beta) = \phi(\alpha_n)\,\phi(\alpha_m)$, то $\phi(\alpha_n), \phi(\alpha_m) \, \mathrm{I} \, \phi(\alpha_i)$ и, конечно, $\alpha_n, \alpha_m \, \mathrm{I} \, \alpha_l$. Так как $\beta = \alpha_n\alpha_m$, то $\beta = \alpha_i$.

Из а), б), в) следует, что ϕ – действительно является представлением $\mathscr{K}^{\sim}$ в $\pi_2(F)$.

2) Пусть теперь ϕ – представление конфигурации $\mathscr{K}^{\sim}/\beta$ в $\pi_2(F)$ и $f = 0$. Очевидно, что для

$$\phi(\beta) = \phi(\alpha_n)\,\phi(\alpha_m)\,,$$

из

$$0 = f(A_1, A_2, \ldots, A_k) = \begin{vmatrix} r_n & r_m & r_l \\ s_n & s_m & s_l \\ t_n & t_m & t_l \end{vmatrix}$$

следует $c(\phi(\alpha_n), \phi(\alpha_m), \phi(\alpha_l))$. Поэтому $\phi(\beta) \, \mathrm{I} \, \phi(\alpha_l)$ и ϕ есть действительно представление конфигурации $\mathscr{K}^{\sim}$. Это значит, что $\mathscr{K}$ вопреки предположению представима глобально в $\pi_2(F)$.

Теорема 3. *Пусть F – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль и $\mathscr{K}$ – квазирегулярная конфигурация локально представима в конечной дезарговой плоскости. Тогда $\mathscr{K}$ представима в $\pi_2(F)$.*

Доказательство. Как мы заметили в замечании 3, мы можем предполагать, что конфигурация $\mathscr{K}^{\sim}$ локально представима в плоскости $\pi_2(GF(p^t))$. Если утверждение теоремы неверно, то для всякой нулевой точки $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, $A_i \neq 0$, многочлена f верно $g(A_1, A_2, \ldots, A_k) = 0$. Это верно и в случае $A_j = 0$, так как тогда для $i > j$ из α_i non $\mathrm{I}\alpha_j$ и $\tau(i) \neq \tau(j)$ следует $g_{ij}(A_1, A_2, \ldots, A_k) = 0$. Из теоремы Гильберта о нулях следует, что существуют многочлен $H \in \in Q[X, Y, Z]$ и $\varrho \in N$ такие, что

(7) $$g^\varrho = f \,.\, H \,.$$

Пусть h – наименьшее общее кратное знаменателей всех коэффициентов многочлена H. Отношение (7) мы можем переписать в виде

(8) $$hg^\varrho = f \,.\, H_1 \,,$$

где многочлен $H_1 \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$ и для всякого простого делителя r числа h существует коэффициент $h(r)$ многочлена H_1, который с ним взаимно прост.

Из (8) получим

(9) $$hg^\varrho = f \,.\, H_1 \ (\text{мод}\ \mathrm{p}) \,,$$

или, если (9) переписать как равенство многочленов над $GF(p^t)$, (мы их обозначим чертой)

(10) $$\bar{h}\bar{g}^\varrho = \bar{f} \,.\, \bar{H}_1 \,.$$

1) Если $\bar{h} = 0$, то $\bar{f} = 0$, так как $\bar{h}(p) \neq 0$ и, значит, $\bar{H}_1 \neq 0$, что в следствие леммы 3 противоречит предположению о локальной представимости конфигурации $\mathscr{K}^\sim$ в $\pi_2(GF(p^t)$.

И так, $\bar{h} \neq 0$.

2) Если $\bar{H}_1 = 0$, то из (10) следует

$$\bar{g}^\varrho = \bar{g} = 0 \,.$$

Так как в этом случае $\bar{g}(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_k) = 0$ для всякой точки $(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_k) \in \in GF(p^t)^{3k}$, то конфигурация $\mathscr{K}^\sim$ не представима в $\pi_2(GF(p^t))$.

3) И так, пусть $\bar{H}_1 \neq 0$, $\bar{h} \neq 0$. Из (10) следует, что для всякой точки $(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_k) \in GF(p^t)^{3k}$ $f(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_k) = 0$ влечёт $g(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_k) = 0$. Но это значит, что действительно $\mathscr{K}^\sim$ не представима в $\pi(GF(p^t))$. Это противоречие и доказывает теорему.

Пример. Пусть $\mathscr{R}$ – известная $(8_3, 8_3)$ конфигурация Рашевского с точками $1, 2, 3, \ldots, 8$ и прямыми 135, 126, 346, 247, 567, 458, 178, 238. Заметим, что $\mathscr{R}$ регулярна и тем самым выполнены предположения теорем 2 и 3. Не трудно проверить, что следующие точки (и соответствующие прямые) плоскости $\pi_2(F_3)$ $1 = (1, 0, 2)$, $2 = (1, 0, 0)$, $3 = (0, 1, 2)$, $4 = (0, 1, 0)$, $5 = (1, 1, 1)$, $6 = = (0, 0, 1)$, $7 = (1, 1, 0)$, $8 = (1, 2, 1)$ представляют $\mathscr{R}$ в $\pi_2(F_3)$. Из теоремы 3 следует представимость (локальная, конечно) конфигурации $\mathscr{R}$ в комплексной проективной плоскости.

Литература

[1] *M. Zacharias:* Neue Wege zur Hesseschen Konfiguration. Math. Nachr. *2* (1949), 163—107

[2] *V. Metelka:* Über ebene Konfigurationen (12_4, 16_3). Časopis pěst. mat. *80* (1955), 133—145.
[5] *B. Bydžovský:* Über zwei neue ebene Konfigurationen (12_4, 16_3). Czechoslovak Math. J. *4* (1954), 193—218.
[4] *R. H. Bruck, R. C. Bose:* Linear representations of projective planes in projective spaces. Algebra *4* (1966), 117—172.
[5] *V. Chvál:* Rappresentazione dei piani liberi nello spazio proiettivo, Rend. Ist. di Matem. Univ. di Trieste Vol. II, fasc. *II* (1970), 139—145.
[6] *O. Zariski, P. Samuel:* Commutative algebra II. V. Nostrand C., Princeton, 1960.

Souhrn

REALIZÁCIA KVAZIREGULÁRNYCH KONFIGURÁCIÍ

VILIAM CHVÁL, MELICHAR KOPAS

Kvaziregulárna konfigurácia je konečná parciálna rovina, ktorá neobsahuje vlastnú uzavretú konfiguráciu. Autori skúmajú realizáciu kvaziregulárnych konfigurácií v trojrozmerom projektívnom priestore a realizáciu jednej triedy kvaziregulárnych konfigurácií v komplexnej projektivnej rovine.

Адрес авторов: Viliam Chvál, Katedra teoretickej kybernetiky PF UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice; *Melichar Kopas,* Katedra matematiky VŠT, Švermova 9, 040 01 Košice.