Mathematica Bohemica

Jan Fischer; Pavel Kolář; Bohdan Maslowski; Jan Seidler; Štefan Schwabik

Ivo Vrkoč šedesátiletý

Mathematica Bohemica, Vol. 116 (1991), No. 4, 412–424

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126031`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1991

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

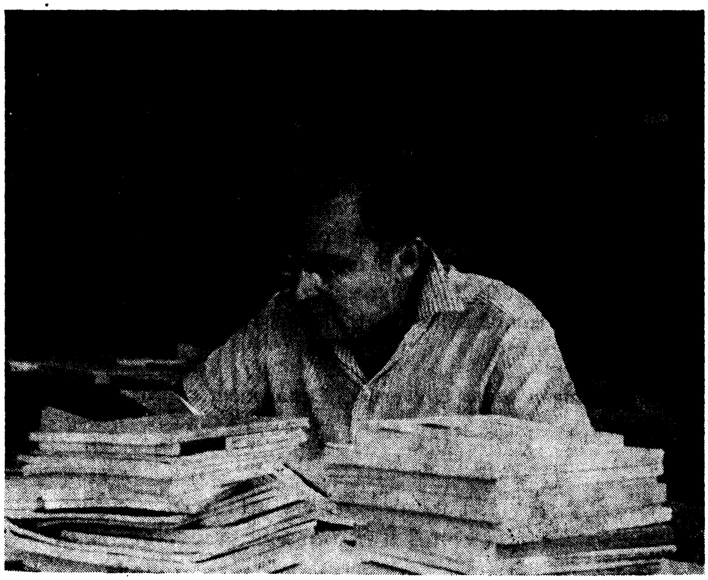
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

ZPRÁVY

IVO VRKOČ ŠEDESÁTILETÝ

Jan Fischer, Pavel Kolář, Bohdan Maslowski, Jan Seidler, Štefan Schwabik, Praha

Zdá se být neuvěřitelné, že pan Ivo Vrkoč, DrSc. se narodil už 10. června 1931. Stalo se to v Kladně a všem, kdo Iva Vrkoče znají, se zdá, že to muselo být o hodně později. Velmi mladý se totiž stal Matematikem a se vším všudy jím zůstal dodnes. To je asi důvod, proč na něm neúprosný běh času — alespoň v našich očích — nezanechal stopy.



Po ukončeném studiu matematiky na Přírodovědecké (později Matematicko-fyzikální) fakultě UK v Praze nastoupil I. Vrkoč do Matematického ústavu ČSAV. Dostal se do skupiny mladých matematiků, kteří uposlechli výzvy starších (v tomto případě to byl Vladimír Knichal) a s vervou se pustili na plochu, která u nás neměla historické zázemí, tj. do oblasti kvalitativní teorie obyčejných diferenciálních rovnic. V relativně krátkém čase se skupina propracovala na světovou špičku. A I. Vrkoč byl jedním z předních členů skupiny. V roce 1955 publikoval svou první matematickou práci [1], která se ihned zařadila do světového kontextu. Totéž se dá říci i o práci

[2], kterou napsal spolu s J. Kurzweilem. V těchto prvních československých pracích věnovaných moderní kvalitativní teorii obyčejných diferenciálních rovnic šlo o problematiku obracení vět o stabilitě, resp. nestabilitě, které byly odvozeny pomocí ljapunovských funkcí. V práci [1] jde o Četajevovu větu o nestabilitě, která byla poprvé publikována v r. 1934 a v podrobnější podobě pak v knize N. G. Četajev: Ustojčivosť dviženija (Gostechizdat, Moskva 1946). Vrkoč zde ukázal, že když triviální řešení systému

$$\text{(1)} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x)$$

s funkcí f spojitě diferencovatelnou podle x není stabilní, pak existuje funkce $V(t, x)$, která má vlastnosti požadované Četajevovou větou. Využil přitom jemné techniky, jejíž obtížnost spočívá v dokonalém prozkoumání vlastností řešení v okolí nestabilní rovnovážné polohy systému a v konstrukci funkce $V(t, x)$, která těchto vlastností využije. Problém charakterizace stability klidové polohy systému (1) pomocí ljapunovské funkce v případě spojité pravé strany vyřešil T. Yoshizawa, zkonstruoval ale ljapunovskou funkci, která nebyla spojitá. Konstrukce spojité ljapunovské funkce je dána v práci [2]. V [2] je dokázáno, že stabilitu nebo stejnoměrnou stabilitu klidové polohy nelze vždy charakterizovat pomocí hladké ljapunovské funkce a jsou uvedeny nutné a postačující podmínky na pravou stranu f systému (1), které zaručí existenci hladké ljapunovské funkce. Výsledky to jsou „ostré" a právem vešly brzy po svém vzniku do monografií, které jsou dodnes v problematice stability autoritativní. Málokterému z našich matematiků se podařilo tak jako I. Vrkočovi zapsat se do dějin svými matematickými prvotinami. A je třeba také říci, že dodnes trvá dobrá pověst pražské školy kvalitativní teorie obyčejných diferenciálních rovnic právě díky těmto raným pracím I. Vrkoče a J. Kurzweila.

V práci [4] I. Vrkoč podal české matematické veřejnosti stručnou zprávu o obsahu své kandidátské disertační práce. Tu pak publikoval v plné časopisecké podobě v práci [5], která rovněž brzy zaujala specialisty v teorii stability v celosvětovém měřítku. O 15 let později S.-N. Chow a J. A. Yorke (Ljapunov theory and perturbation of stable and asymptotically stable systems J. Differential Equations, 15 (1974), 308–321) tuto práci charakterizovali jako „monumental paper" a udělali to při plném vědomí obsahu těchto slov.

V práci [5] se Vrkoč zabýval systémem

$$\text{(1)} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x)$$

s $f(t, 0) = 0$ za předpokladu, že pravá strana (1) splňuje Carathéodoryovy podmínky. Systém pak má triviální řešení $x = 0$, které Vrkoč nazval *integrálně stabilním*, jestliže ke každému $\delta > 0$ existuje $B(\delta) > 0$ tak, že

a) $\lim\limits_{\delta \to 0} B(\delta) = 0$, a

b) když funkce $\eta(t, x)$ splňuje podmínku

$$\int_{t_0}^{\infty} \sup_{\|x\| \leqq B(\delta)} \|\eta(t, x)\| \, dt < \delta,$$

potom každé řešení $x(t)$ systému

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \eta(t, x),$$

pro které je $\|x(t_0)\| < \delta$ může být rozšířeno pro $t \geqq t_0$ a je $\|x(t)\| < \delta$ pro $t \geqq t_0$ (t_0 může být různé pro různá řešení $x(t)$).

Přidáním atraktivity triviálního řešení pak zavedl pojem *asymptotické integrální stability* a vyšetřoval tyto nové koncepce ve vztahu k jiným pojmům (stabilita vůči trvale působícím poruchám, variační stabilita, silná stabilita), které byla v té době známé. Monumentalita této Vrkočovy práce spočívá zejména v tom, že vychází z předtuchy, že velká porucha působící po krátký čas nemůže rozumný systém (1) vyvést z rovnováhy a že tuto předtuchu rigorózně převádí do formy trvalého poznatku. Mimořádný výkon v této práci představuje charakterizace integrální stability a asymptotické integrální stability pomocí vhodné ljapunovské funkce. To vyžaduje velmi jemné techniky zejména, když se pro stabilní řešení konstruuje příslušná ljapunovská funkce. Nelze se divit, že práce [5] se záhy objevila v monografiích jako fundamentální poznatek v oblasti kvalitativní teorie obyčejných diferenciálních rovnic (A. Halanay - 1966, W. Hahn - 1967, T. Yoshizawa - 1966). I kdyby Ivo Vrkoč napsáním práce [5] ukončil svou matematickou aktivitu, zůstalo by jeho jméno pro matematiky pracující v této oblasti trvalým pojmem.

V r. 1962 pak uveřejnil Vrkoč práci [7], v níž je z hlediska charakterizace ljapunovskou funkcí vyšetřena stabilita triviálního řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic vůči trvale působícím poruchám. Nezůstal ani zde nic dlužen rafinovaným analytickým technikám a ukončil touto prací etapu, která přinesla pražské škole kvalitativní teorie obyčejných diferenciálních rovnic její obecné uznání a věhlas ve světě. Byla to etapa mimořádně plodná, vycházela z klasických ruských tradic počínajících A. M. Ljapunovem a vytvořila vlastně most k modernímu analytickému přístupu k ljapunovským funkcím tím, že vzala v úvahu skutečnost, že našim stoletím v analýze hýbe Lebesgueův integrál. Meztím Vrkoč v r. 1961 uveřejnil práci [6]. Obrátil se v ní k topologickým aspektům stability řešení systému (1) a dokázal, že když jsou pro systém (1) dány nějaké podmínky (např. Carathéodoryovy) zaručující existenci řešení, potom je množina těch výchozích stavů systému v okamžiku $t = 0$, z nichž vychází stabilní (ekvistabilní, stejnoměrně stabilní) řešení, množina typu G_δ. Toto je sám o sobě hezký výsledek. Vrkoč ale v práci dokazuje i to, že když je v $\mathbb{R}^2$ dána množina $\mathcal{M}$ typu G_δ, potom existuje systém (1) v $\mathbb{R}^2$ tak, že každé jeho řešení vycházející v okamžiku $t = 0$ z bodu $x \in \mathcal{M}$ je stejnoměrně stabilní a každé jeho řešení vycházející v okamžiku $t = 0$ z bodu x, který je v doplňku množiny $\mathcal{M}$, je nestabilní. Navíc ještě ukazuje, že systém (1) lze určit tak, že jeho pravá strana má spojité parciální derivace všech řádů. Základní myšlenky důkazu tohoto tvrzení jsou platné i pro obecný případ $\mathbb{R}^n$. Důkaz je však podán jen pro $n = 2$, technika je už i tak dost komplikovaná. Pro případ jednorozměrné autonomní obyčejné diferenciální rovnice (tj. dynamického systému) pak je ještě uveden důmyslný popis množiny, z níž vycházejí nestabilní trajektorie. Tato Vrkočova práce je odborníkům v topologické dynamice známa, dodnes ale před ní stojí v úctě, protože je ukázkou toho, co dovede udělat hluboké porozumění metodám analýzy a jejích využití v zdánlivě abstraktním odvětví matematiky.

Po tomto velmi plodném období matematických výkonů Ivo Vrkoč stoupil do další oblasti, která u nás neměla tradici – tou je výzkum stochastických diferenciálních rovnic.

Z dnešního pohledu je problematika stochastických diferenciálních rovnic teorii obyčejných diferenciálních rovnic dosti odlehlá a je spíše řazena do teorie pravděpodobnosti. Cesta I. Vrkoče od rovnic obyčejných ke stochastickým je ale přímá. Prvé stochastické práce [9] a [11] jsou jistým pokračováním dřívějšího zkoumání stability s tím, že uvažované poruchy na pravé straně rovnice mají náhodný charakter. Tyto články se ještě nezabývají „pravými“ Itôovými stochastickými rovnicemi, ale tzv. náhodnými diferenciálními rovnicemi, v nichž náhodný proces vstupující do pravé strany rovnice má dostatečně regulární trajektorie. Řešení je proto možno chápat v klasickém Carathéodoryho smyslu (není tedy zahrnut případ „bílého šumu“).

Přibližme problematiku prací [9] a [11] alespoň tím, že naznačíme speciální případ hlavního výsledku z [11]. Uvažujme třídu rovnic tvaru

$$\dot{x}_n = -\lambda_n x_n + S_n(t, \omega, x_n), \quad x_n(t_0) = x_0,$$

v nichž $\lambda_n > 0$ a S_n mají význam náhodných perturbací. Vrkočova pozornost je soustředěna na odhad asymptotického chování výrazů typu

$$\sup_{S_n} \mathsf{P}[\sup_{t_0 \leqq t \leqq t_n} x_n(t, \omega) > v_n] \tag{2}$$

při $n \to \infty$, $t_n \geqq t_0$ a v_n jsou daná čísla, $\mathsf{P}[\ldots]$ v (2) značí pravděpodobnost, že proces x_n na intervalu $[t_0, t_n]$ překročí alespoň jednou hranici v_n. Pokud vliv jednotlivých poruch klesá s $n \to \infty$ a poruchy přitom nezpůsobují „systematickou chybu“, je možno vyjádřit limitu výrazů (2) pomocí řešení rovnice vedení tepla. Matematické upřesnění předchozího tvrzení je ovšem značně náročné a je v [9] a [11] předmětem jemné analytické práce. Z uvedené souvislosti s parabolickými rovnicemi lze vytušit, že typickou oblastí aplikace citovaných výsledků jsou situace, kdy náhodné poruchy S_n v jistém smyslu konvergují k procesům „bez paměti“, tj. k procesům typu bílého šumu. Následný posun matematických zájmů I. Vrkoče k problematice stochastických diferenciálních rovnic je tedy velice přirozený. V tomto oboru se zabýval (odhlédneme-li od několika drobnějších prací), dvěma tématy: zobecněním metody průměru na stochastické diferenciální rovnice a úlohou maximální difúze při úniku z oblasti. Právě druhé z těchto témat navazuje na články [9] a [11]. Zásadním příspěvkem je zde [19], kde je problém řešen v nejobecnější podobě.

Uvažujme oblast D s dostatečně hladkou hranicí v $\mathbb{R}^n$, nechť je $x(t)$ řešením stochastické diferenciální rovnice

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{d}x(t) = f(t, x(t))\,\mathrm{d}t + B(t, x(t))\,\mathrm{d}w(t)\,, \quad x(0) = x_0 \in D\,,$$

v níž $w(t)$ značí Wienerův proces, koeficienty f, B jsou dostatečně hladké a splňují obvyklé předpoklady zajišťující existenci a jednoznačnost řešení. Označme τ čas prvního výstupu procesu $x(t)$ z oblasti D. Nechť je v rovnici (3) koeficient lokálního posunutí f zvolen pevně, zatímco koeficient difúze B se může měnit. Potom i čas $\tau = \tau_B$ závisí na B; cílem Ivo Vrkoče bylo nalézt maximum z pravděpodobností $\mathsf{P}[\tau_B \leqq T]$, že proces $x(t)$ dosáhne hranice oblasti D dříve, než v nějakém (pevném) čase T, ve třídě všech „rozumných" koeficientů B. V práci [19] je nalezena podmínka, kdy je maximální pravděpodobnost dosažena pro nějakou matici difúze $B(t, x)$. Uvažujme matice B takové, že BB^{T} je pozitivně semidefinitní v $Q = (0, T) \times D$ a parabolická rovnice

$$\text{(4)} \qquad u_t(t,x) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\big(B(T-t,x)\,D_x^2 u(t,x)\,B(T-t,x)^{\mathrm{T}}\big) + \big(f(T-t,x), D_x u(t,x)\big)$$

s okrajovými podmínkami

$$\text{(5)} \qquad \lim_{t\to 0+} u(t,x) = 0\,, \quad x \in D\,, \quad \lim_{x\to y} u(t,x) = 1\,, \quad y \in \partial D\,, \quad t \geqq 0\,,$$

má jediné omezené řešení v Q. Matici $\tilde{B}$ nazveme maximální, pokud maximalizuje hodnotu $P[\tau_B \leqq T]$ ve třídě všech matic B s právě uvedenými vlastnostmi, pro něž je navíc $B(t, x)\,B(t, x)^{\mathrm{T}} - \tilde{B}(t, x)\,\tilde{B}(t, x)^{\mathrm{T}}$ pozitivně semidefinitní při $(t, x) \in Q$. Jedním z hlavních obecných výsledků [19] je pak věta, podle níž je matice $\tilde{B}$ maximální (v terminologii [19] silně maximální), je-li omezené řešení rovnice

$$u_t(t,x) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\big(\tilde{B}(T-t,x)\,D_x^2 u(t,x)\,\tilde{B}(T-t,x)^{\mathrm{T}}\big) + \big(f(T-t,x), D_x u(t,x)\big)$$

s okrajovými podmínkami (5) konvexní v oblasti Q vzhledem k x. Důkaz tohoto tvrzení, založený na elegantní aplikaci Itôovy formule, ukazuje sepětí teorie stochastických diferenciálních rovnic Itôova typu a teorie parabolických parciálních diferenciálních rovnic. Z hlediska praktické použitelnosti vyvstává ovšem otázka, kdy má rovnice (4) jediné omezené řešení a zejména pak kdy je toto řešení konvexní. Nalezení explicitních postačujících podmínek formulovaných pomocí koeficientů rovnice věnoval Ivo Vrkoč značné úsilí, jehož výsledkem byla řada prací [23], [24], [26], [27] a [32]. Pro práce z této serie je příznačné, že z hlediska techniky důkazů spadají spíše do oblasti lineárních parciálních diferenciálních rovnic parabolického typu a obsahují řadu výsledků vyjasňujících některé speciální aspekty chování řešení takovýchto rovnic. Nejsou tedy zajímavé jen z hlediska stochastické analýzy.

Jak jsme se již zmínili, druhým stěžejním Vrkočovým stochastickým tématem je okruh technik, známých v teorii obyčejných diferenciálních rovnic jako metoda průměru. Metody průměrování, inspirované některými problémy fyziky (zejména mechaniky), umožňují přiblížit řešení rovnice s rychle oscilujícími koeficienty řešením rovnice se „zprůměrovanými" koeficienty, aniž bychom se dopustili větší chyby.

Přesněji, uvažujme stochastické diferenciální rovnice

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{d}X_\varepsilon(t) = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, X_\varepsilon(t)\right)\mathrm{d}t + B\left(\frac{t}{\varepsilon}, X_\varepsilon(t)\right)\mathrm{d}w(t)\,, \quad X_\varepsilon(0) = x_\varepsilon\,,$$

kde $\varepsilon > 0$ je malý parametr, $w(t)$ Wienerův proces (či obecnější spojitý proces s nezávislými přírůstky) a koeficienty lokálního posunutí f a difúze B splňují klasické podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení. Problém, zda za předpokladu existence funkcí $\bar{f}, \bar{B}$ a počáteční podmínky $\bar{x}$ splňujících

$$\bar{f}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x)\,\mathrm{d}t\,, \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |B(t, x) - \bar{B}(x)|^2\,\mathrm{d}t = 0\,,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} x_\varepsilon = \bar{x}\,,$$

konvergují řešení rovnice (6) v kvadratickém středu k řešení limitní rovnice

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{d}\bar{X}(t) = \bar{f}(\bar{X}(t))\,\mathrm{d}t + \bar{B}(\bar{X}(t))\,\mathrm{d}w(t)\,, \quad \bar{X}(0) = \bar{x}\,,$$

byl řešen positivně I. Vrkočem v [12] (a nezávisle I. I. Gichmanem v práci Diferencial'nye uravnenia so slučajnymi funkcijami, Zim. škola po teorii verojat. mat. stat., Kijev 1964, 41–85).

Bylo dokázáno, že platí dokonce

$$\text{(8)} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0+} \mathsf{E} \sup_{0\leq t\leq T} |X(t) - \bar{X}(t)|^2 = 0$$

pro každé $T > 0$ (přičemž E značí střední hodnotu). Výsledek typu (8) je dokázán i pro stochastické diferenciální rovnice v oblasti s adhezivní hranicí. Jak známo, úlohy průměrování jsou zvláštním případem problému spojité závislosti řešení diferenciální rovnice na parametru. Klasické výsledky o spojité závislosti jsou však pro tyto účely příliš slabé a je třeba zkoumat jemnější druh spojité závislosti, tzv. integrální spojitost. Síla tohoto přístupu se ukázala až později, v sedmdesátých letech, když Z. Artstein ve své známé práci (Continuous dependence on parameters: On the best possible results, J. Differential Equations 19 (1975), 214–225) vyjasnil, že výsledky typu integrální spojitosti jsou v jistém přirozeném topologickém smyslu uspořádání nejlepšími možnými výsledky o spojité závislosti na parametru. Podobné úvahy lze vést také o Vrkočově integrální stabilitě, která svou univerzalitou zahrne jiné běžně vyšetřované typy stability.

V práci [12] a dále pak v [13], [15] a [16] se Vrkoč v souvislosti s metodou průměru věnoval rovněž otázkám stability řešení a existence periodických řešení. Již v článku [12] je řešena úloha průměrování pro nekonečný časový horizont ($T = +\infty$) za předpokladu stejnoměrné asymptotické stability limitního řešení $\bar{X}$. V [15] a [16] je zkoumán obecný systém tvaru

$$\text{(9)} \qquad \mathrm{d}X_\varepsilon(t) = f(t, X_\varepsilon(t), \varepsilon)\,\mathrm{d}t + B(t, X_\varepsilon(t), \varepsilon)\,\mathrm{d}w_\varepsilon(t)\,, \quad X_\varepsilon(0) = x_0$$

závislý na parametru $\varepsilon > 0$ ve vztahu k deterministickému systému

$$\text{(10)} \qquad \dot{y}(t) = f(t, y(t), 0)\,, \quad y(0) = x_0\,.$$

Mimo jiné je ukázáno, že jsou-li koeficienty rovnice (9) integrálně spojité v ε v jistém stejnoměrném smyslu (kupříkladu se předpokládá, že

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^t |B(\tau, y(\tau), \varepsilon)|^2 \, dF_\varepsilon(\tau) = 0 , \quad F_\varepsilon(t) = \mathsf{E}|w_\varepsilon(t)|^2 ,$$

stejnoměrně v x_0), pak se exponenciální stabilita řešení rovnice (10) přenáší při dosti malých $\varepsilon > 0$ i na rovnici (9). Podobně je dokázána existence periodických řešení rovnice (9), jsou-li její koeficienty periodické v t. Z metodického hlediska je pozoruhodné, že obě práce [15] i [16] bohatě využívají technik zavedených krátce předtím J. Kurzweilem při vyšetřování invariantních variet obyčejných diferenciálních rovnic.

Zájem Ivo Vrkoče o problematiku průměrování a integrální spojitosti ožil opět v poslední době v souvislosti s výzkumem stochastických evolučních rovnic. Zásadního výsledku bylo dosaženo v práci [52], která pojednává o integrální spojitosti pro rovnici

$$\text{(11)} \qquad dX_\alpha(t) = [A\, X_\alpha(t) + f_\alpha(t, X_\alpha(t))] \, dt + \Phi_\alpha(t, X_\alpha(t)) \, dw(t) , \quad X_\alpha(0) = \varphi_\alpha$$

v Hilbertově prostoru $\boldsymbol{H}$. Přitom předpokládáme, že A je infinitezimální generátor silně spojité semigrupy $S(t)$ v $\boldsymbol{H}$, $w(t)$ je Wienerův proces s hodnotami v Hilbertově prostoru $\boldsymbol{K}$ s jaderným kovariančním operátorem W, f_α: $\mathbb{R}_+ \times \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$, Φ_α: $\mathbb{R}_+ \times \boldsymbol{H} \to L(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{H})$ splňují obvyklé podmínky měřitelnosti, lineárního růstu a lipschitzovskosti v prostorové proměnné, $\alpha > 0$. Rovnice (11) je interpretována v jemném smyslu, tj. jako integrální rovnice

$$X_\alpha(t) = S(t)\,\varphi_\alpha + \int_0^t S(t-s) f_\alpha(s, X_\alpha(s)) \, ds + \int_0^t S(t-s)\, \Phi_\alpha(s, X_\alpha(s)) \, dw(s) ,$$

druhý integrál na pravé straně je stochastický Itôův integrál.

Hlavním výsledkem [52] je následující věta: Platí-li

$$\text{(12)} \qquad \lim_{\alpha \to 0+} \int_s^t S(t-r) [f_\alpha(r, x) - f_0(r, x)] \, dr = 0 ,$$

$$\text{(13)} \qquad \lim_{\alpha \to 0+} \int_s^t \mathrm{Tr}\{(\Phi_\alpha(r, x) - \Phi_0(r, x)) \, W(\Phi_\alpha(r, x) - \Phi_0(r, x))^*\} \, dr = 0$$

pro všechna $x \in \boldsymbol{H}$, $0 \leqq s \leqq t$, a platí-li $\varphi_\alpha \to \varphi_0$ v $\boldsymbol{H}$, pak dostáváme

$$\text{(14)} \qquad \lim_{\alpha \to 0+} \sup_{0 \leqq t \leqq T} \mathsf{E}\|X_\alpha(t) - X_0(t)\|_{\boldsymbol{H}}^2 = 0$$

pro všechna $T > 0$.

Analýza konečněrozměrného případu ukazuje, že podmínka (13) je v podstatě nezeslabitelným požadavkem, avšak předpoklad (12) na nelineární složku koeficientu lokálního posunutí by bylo vhodné nahradit přirozenějším předpokladem

$$\text{(15)} \qquad \lim_{\alpha \to 0+} \int_s^t f_\alpha(r, x) \, dr = \int_s^t f_0(r, x) \, dr .$$

V [52] je dokázáno, že taková záměna je možná, je-li semigrupa $S(t)$ analytická; výsledek je v této formě aplikovatelný na běžné stochastické parciální diferenciální rovnice parabolického typu. Překvapivý protipříklad v připravovaném článku [56], sestrojený I. Vrkočem, ukazuje, že podobná záměna není možná pro stochastickou vlnovou rovnici, uvažujeme-li přirozený stavový prostor $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{W}^{1,2} \oplus \boldsymbol{L}^2$. Zároveň je ale v [56] ukázáno, že (12) lze nahradit slabším předpokladem (15), jestliže příslušně zeslabíme topologii stavového prostoru (např. pro vlnovou rovnici to znamená, že se staráme jen o $\boldsymbol{L}^2$ – konvergenci řešení a nikoliv o konvergenci derivací).

Průměrováním a integrální spojitostí v teorii stochastických evolučních rovnic se zabývá ještě článek [53], v němž je odvozen výsledek typu (14) pro úlohu s nekonečným časovým horizontem.

Významná je i spolupráce I. Vrkoče s fyziky, kteří se zabývají teorií elementárních částic.

Koncem šedesátých let se ve fyzice elementárních částic rozvinul nový obor – tzv. metoda analytických extrapolací. Jejím základním úkolem je vystihnout výsledky měření v nějaké (kinematické) oblasti analytickou funkcí (přesná fyzikální amplituda popisující výsledky měření je analytická funkce) a extrapolovat ji do jiné oblasti, ve které měření nebylo nebo nemohlo být provedeno. Přitom je nutno uvážit, že měření je zatíženo jistou experimentální chybou. Navíc je nejčastěji provedeno na hranici oblasti, ve které je hledaná funkce holomorfní. Tato úloha je velmi nejednoznačná. Malá chyba (rozdíl fyzikální funkce a její analytické aproximace) v oblasti měření může způsobit velkou chybu v oblasti, do které extrapolujeme. Úloha je nekorektní v Hadamardově smyslu a to vede k tomu, že pro tuto oblast nelze získat žádnou netriviální fyzikální předpověď. Třídu uvažovaných funkcí je třeba omezit naložením vhodných matematických, a přitom fyzikálně přijatelných, stabilizujících předpokladů. Proto se ve fyzice věnovala velká pozornost nalezení tzv. stabilních extrapolačních metod. Stabilitou se zde rozumí následující vlastnost: je-li $f(z)$ holomorfní v nějaké oblasti komplexní roviny a stejnoměrně omezená na množině A, tj. $|f(z)| \leqq \varepsilon, z \in A$ pak její extrapolace do množiny B je stabilní vzhledem ke třídě funkcí F pokud je $\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{z \in B} \sup_{f \in F} |f(z)| = 0$. Třída funkcí F je přitom vymezena stabilizujícími předpoklady, o kterých jsme se zmínili výše.

Této úloze se I. Vrkoč věnoval v práci [25]. Jeden z jeho nejzajímavějších výsledků se týká možnosti stabilní extrapolace imaginární části $\operatorname{Im} f(z)$ funkce $f(z)$ z jedné části hranice oblasti holomorfnosti Γ_1 na její druhou část Γ_2, pokud je $f(z)$ omezená a podél části hranice Γ_2 existují omezené derivace funkce $f(z)$, tj. pro případ jednotkového kruhu se požaduje

$$\left|\frac{\mathrm{d}\operatorname{Re} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}{\mathrm{d}\varphi}\right| \leqq N\,, \quad \text{pro} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \in \Gamma_2\,.$$

Tato podmínka je z fyzikálního přijatelná v oblastech, kde nejsou rezonanční stavy. Ve zmíněné práci dokázal I. Vrkoč i další věty o stabilní extrapolaci, z nichž fyzikové mnohé využívali aniž by znali jejich přesné důkazy.

Jiný okruh Vrkočovy činnosti ve fyzice elementárních částic se týká těch vlastností rozptylové matice, které vyplývají z obecných fyzikálních principů. Tento výzkum je důležitý v situacích, kdy je namísto ucelené teorie k dispozici pouze soubor základních principů, které by měla každá budoucí teorie splňovat, a které typicky vedou ke třídě funkcí definované oblastí holomorfnosti, spojitostí na její hranici a chováním v bodě $z = \infty$.

Vrkočovi přísluší tato věta (viz [29]): Nechť $f(z)$ je

(1) holomofrní v D, kde D je horní polovina komplexní roviny, z níž je vyňat půlkruh o poloměru r_0 se středem v počátku,

(2) spojitá v uzávěru D s možnou výjimkou bodu $z = \infty$.

Buď dále

$$\operatorname{Im} f(z) \geqq 0 \quad \text{pro} \quad \operatorname{Im} z = 0\,, \quad \operatorname{Re} z \geqq r_1\,,$$

$$\operatorname{Im} f(z) \geqq 0 \quad \text{pro} \quad \operatorname{Im} z = 0\,, \quad \operatorname{Re} z \leqq -r_1\,,$$

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{f(z)}{z^2} = 0$$

a

$$\left(\int_{-\infty}^{-r} + \int_r^{\infty}\right) \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x}\, \mathrm{d}x > \int_0^{\pi} \operatorname{Re} f(r e^{i\varphi})\, \mathrm{d}\varphi \quad \text{kde} \quad r \geqq \max(r_0, r_1)\,. \tag{16}$$

Pak existuje takové R, že

$$\frac{\operatorname{Im} f(z)}{z} > 0 \quad \text{pro všechna} \quad z \in D\,, \quad |z| > R\,.$$

Tato věta umožnila odvození řady fyzikálně zajímavých korelací mezi chováním reálné a imaginární části amplitudy rozptylu, její fází a modulem a totálním účinným průřezem při limitně vysokých energiích. Poznamenejme, že totální účinný průřez je úměrný imaginární části amplitudy pro rozptyl na nulový úhel. Není náhodou, že tento teoretický výzkum se stal aktuální v sedmdesátých letech, kdy došlo k prudkému rozvoji stavby nových urychlovačů pro srážky částic při velmi vysokých srážkových energiích.

Vrkoč zasáhl do tohoto rozvoje svou příslovečnou schopností pochopit matematickou podstatu fyzikálního problému a odvozovat „úsporné" věty, tj. silné výroky za slabých předpokladů. V době, kdy není hotova teorie a známé jsou jen obecné principy, jsou tyto matematikovy schopnosti pro fyziku pravým dobrodiním. Svou obecností zvláště proslula Vrkočova podmínka (16) při aplikaci na totální účinný průřez. Významné bylo i zobecnění tzv. Pomerančukova toerému [35], které bylo získáno díky Vrkočovým obecným formulacím, a dále Vrkočův důkaz, že konvergence integrálu

$$\int_{E_0}^{\infty} \sigma_-(E)\, E^{-1}\, \mathrm{d}E\,,$$

kde $\sigma_-(E)$ je rozdíl totálních účinných průřezů přímé a tzv. křížově sdružené reakce a E je energie srážky, je postačující pro existenci (a nulovost) tzv. Meimanovy limity $\operatorname{Lim} \sigma_-(E) = 0$.

Módní záležitostí v sedmdesátých letech byly tzv. derivativní relace, motivované možností vyjádřit reálnou část analytické funkce nikoliv integrálem z imaginární části tak, jako je tomu v dispersních relacích (Cauchyova věta), ale pomocí diferenciálního operátoru, který je definován součtem nekonečné řady derivací imaginární části. Ivo Vrkoč dokázal, že tento operátor je definován pouze na třídě celých funkcí [47]. Základní význam pro další aplikace tenkrát měla následující věta: Jestliže funkce $f: I \mapsto \mathbb{R}$ má všechny derivace v každém bodě intervalu $I \subset \mathbb{R}$ (tj. $f \in C^\infty(I)$) a konverguje řada lichých derivací

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(2n+1)}(x) \quad \text{pro každé} \quad x \in I ,$$

potom lze funkci f (i součet řady) prodloužit do celé funkce.

Významný podíl mál Vrkoč i na získání nových výsledků při zobecnění Froissartovy meze na amplitudu rozptylu pro komplexní úhly rozptylu [39], [43]. K tomu přispěl zejména odvozením podmínek, které zaručí, že se nerovnosti platné pro harmonické a subharmonické funkce na hranici oblasti přenesou do jejího vnitřku.

O Vrkočových původních výsledcích užitečných pro teoretickou fyziku by bylo možné psát ještě dlouho. Připomeňme ale raději jeho živý zájem o matematické jádro fyzikálních problémů, bezmeznou ochotu pomoci fyzikům, schopnost porozumět jejich pro matematiky nepřesnému jazyku a v neposlední řadě i jeho osvětovou činnost mezi nimi.

Vedle ucelených souborů prací ve výše zmíněných oblastech matematiky (a fyziky) se I. Vrkoč zabýval mnoha dalšími problémy. Inspirace k nim přicházela z matematického světa, v němž žije, z toho, že studoval práce svých přátel a byl jim mnohdy dobrým rádcem, z toho, že přemýšlel a hrál si tak, jak si dovedou hrát zvídaví matematikové. Mohl by už dávno v poklidu trůnit na zasloužených vavřínech, nedělá to ale a dokonce si jejich existenci snad ani neuvědomuje.

Zmíníme se jen o několika Vrkočových pracích, které patří do této kategorie.

Významná z hlediska nelineární funkcionální analýzy je práce [17] v níž je charakterizován Carathéodoryův operátor. I. Vrkoč zde podal konstruktivně úplný analytický popis obecného Carathéodoryova operátoru. Toto je z hlediska moderní matematiky výkon mimořádně důležitý.

V [18] zkoumal třídu funkcí, která hraje roli v teorii invariantních variet, jež se v té době velmi soustředěně studovala na semináři o obyčejných diferenciálních rovnicích v Praze. Zájmy semináře sledovaly i práce [33], [38] a [51], které patří do oblasti diferenciálních inkluzí.

Setkání s R. C. Brownem, který byl v Praze na delším pobytu, vedlo k pracím [44] a [46], které lze zařadit do studia samoadjungovaných okrajových úloh. Vrkoč sem přispěl důkazem ostrosti Rayleigh-Ritzovy nerovnosti a byl v této souvislosti dokonce viděn u staříčkého a pomalého počítače Hewlett-Packard, který tenkrát byl v ústavu přístupný. Tento podivuhodný přístroj se podroboval Vrkočově vůli i při práci na [45], [54] a [55]. Zde šlo o jeho dlouhodobou kooperaci se skupinou, která se vytvořila kolem M. Katětova a P. Jedličky a věnovala se matematickému modelování a průzkumu mechanismů, které způsobují tak záludnou nemoc, jakou je roztroušená skleróza mozkomíšní. K tomu posloužily poznatky z oblasti Thomovy teorie klasifikace singularit zobrazení a prvky náhodnosti, které tato nemoc vykazuje. I. Vrkoč se nejenže podílel na tvorbě modelu, projevil i schopnosti programátora, který nakonec ze zmíněného počítače vykouzlil možné průběhy nemoci, jež akceptoval i pan docent Jedlička.

S praktickými otázkami aplikace matematiky je spojena i práce [48], zabývající se numerickými aspekty teorie lineárních integrálních rovnic v souvislosti s energetickými ztrátami ve velkých transformátorech napětí.

S numerickou matematikou souvisí i ne příliš známá skutečnost, že I. Vrkoč spolupracoval na známé monografii I. Babuška, M. Práger, E. Vitásek: Numerical process in differential equations, SNTL, Praha 1966 v problematice stability numerických výpočtů (viz odst. 4.2.6 v této knize).

V závěru podobných bilancí, které si vynucuje běh času, bývá výčet i jiných než vědeckých aktivit; i pan doktor Vrkoč se jim věnuje. Není jich málo a působily mu občas i různá příkoří. Dal jim mnoho svého času a energie. Tyto činnosti však netvoří charakteristický rys osobnosti Iva Vrkoče. Je to skromný, milý člověk a matematik renesančního záběru s mimořádným ostrovtipem. Upsal se matematice a výrazně ji obohatil. To je pro něj charakteristické a to jsme také chtěli při této příležitosti sdělit.

Do dalších let přejme panu Ivovi Vrkočovi „nerušené kruhy" a ještě mnohá potěšení s matematikou v kruhu jeho ctitelů a přátel.

SEZNAM PUBLIKACÍ I. VRKOČE

[1] Ob obraščenii teoremy Četaeva. Czechoslovak Math. Journal *5* (*80*), 1955, 451—461.

[2] Ob obraščenii teoremy Ljapunova ob ustojčivosti i teoremy Persidskogo o ravnomernoj ustojčivosti (s *J. Kurzweilem*). Czechoslovak Math. Journal *7* (*82*), 1957, 254—272.

[3] A note to the unicity of generalized differential equations. Czechoslovak Math. Journal *8* (*83*), 1958, 510—512.

[4] O integrální stabilitě. Časopis pěst. mat. *83*, 1958, 358—362.

[5] Integraľnaja ustojčivosť. Czechoslovak Math. Journal *9* (*84*), 1959, 71—129.

[6] The topological structure of the set of stable solutions of a differential system. Czechoslovak Math. Journal *11* (*86*), 1961, 262—305.

[7] Ustojčivosť pri postojanno dejstvujuščich vozmuščenijach. Časopis pěst. mat. *87*, 1962, 326—358.

[8] On some stability problems. Proceedings of the Conference Equadiff held in Prague 1962, 217—221.

[9] Über eine bestimmte Klasse der zufälligen Prozesse mit absorbierten Barrieren. Časopis pěst. mat. *89* (1964), 402—425.

[10] On certain properties of a system of linear differential equations. Časopis pěst. mat. *90* (1965), 311—322.
[11] On homogeneous linear differential equations with random perturbations. Czechoslovak Math. Journal *16* (*91*), 1956, 199—230.
[12] Extension of the averaging method to stochastic equations. Czechoslovak Math. Journal *16* (*91*), 1966, 518—544.
[13] Extension of the averaging method to stochastic equations. Acta Facultatis R.N. Univ. Comenianae, Mathematica XVII — 1967, 237—242.
[14] Note on stability of control system (s *J. Kučerou*). Časopis pěst. mat. *93* (1968), 472—479.
[15] The exponential stability and periodic solutions of Itô stochastic equations with small stochastic terms. Czechoslovak Math. Journal *18* (*93*), 1968, 301—314.
[16] The weak exponential stability and periodic solutions of Itô stochastic equations with small stochastic terms. Czechoslovak Math. Journal *18* (*93*), 1968, 722—752.
[17] The representation of Carathéodory operators. Czechoslovak Math. Journal *19* (*94*), 1969, 99—109.
[18] The class of functions fulfilling the inequality

$$\|f(x + z) - f(x) - f(y + z) + f(y)\| \leqq \|x - y\| \, \omega(\|z\|)$$

Czechoslovak Math. Journal *19* (*94*), 1969, 500—514.
[19] Some maximum principles for stochastic equations. Czechoslovak Math. Journal *19* (*94*), 1969, 569—604.
[20] A remark on nonoscillatory differential equations. Mathematica *11* (*34*), 1969, 171—177.
[21] Note on stability of a linear homogeneous control system (s *J. Kučerou*). Časopis pěst. mat. *95* (1970), 56—61.
[22] Remark about the relation between measurable and continuous functions. Časopis pěst. mat. *96* (1971), 225—228.
[23] Some explicit conditions for maximal local diffusions in one-dimensional case. Czechoslovak Math. Journal *21* (*96*), 1971, 236—256.
[24] Conditions for maximal local diffusions in multi-dimensional case. Czechoslovak Math. Journal *22* (*97*), 1972, 393—422.
[25] Continuous dependence of holomorphic functions on partly given boundary values. Czechoslovak Math. Journal *23* (*98*), 1973, 455—466.
[26] On conditions guaranteeing the maximal probability that the solutions of an Itô equation leave a given region. Transactions of the sixth Prague conference on information theory ... 1971, Academia Praha, 1973, 893—902.
[27] An optimal control problem for Itô stochastic equations. Proceedings of Equadiff III, III. Czech. Conf. on Diff. Equations 1972, J. E. Purkyně Univ. Brno 1973, 205—207.
[28] Diffusion processes and their connection to partial differential equations of parabolic type. Nonlinear evolutions and potential theory. Proceedings of a summer school 1973, Academia Praha 1975, 133—142.
[29] Rigorous phase-modulus correlations for forward scattering amplitude at high energies (s *J. Fischerem* a *P. Kolářem*). Physical Review D, Vol. *13*, 1976, 133—149.
[30] Asymptotic correlations between total cross-sections and forward scattering amplitudes (s *J. Fischerem* a *P. Kolářem*). Czech. J. Phys., Vol. *B 26*, 1976, 86—91.
[31] Nové asymptotické teorémy pro amplitudu předního rozptylu hadronů (s *J. Fischerem* a *P. Kolářem*). Čtvrtá konference československých fyziků Liberec 1975, Academia Praha 1976, 283—284.
[32] Conditions for strong maximality of local diffusion in multi-dimensional case. Czechoslovak Math. Journal *28* (*103*), 1978, 200—244.
[33] A new definition and some modifications of Filippov cone. Proceedings of Equadiff IV. Lecture Notes in Math. 703, Springer-Verlag 1979, 433—441.

[34] Liouville formula for system of linear homogeneous Itô stochastic differential equations. CMUC *19*,1 (1978), 141—146.

[35] Pomeranchuk-type theorems for total and elastic sections (s *J. Fischerem* a *R. Šálym*). Physical Review D, Vol. *18*, No. 11, 1978, 4271—4281.

[36] Some new results in Pomeranchuk-like theorems (s *J. Fischerem* a *R. Šálym*). Proceedings of the Hadron Structure '77 Conference, High Tatras 1977, Physics and Applications Vol. *4*, 1979, Veda Bratislava, 315—320.

[37] Exercises in Stochastic Analysis (s *P. Mandlem* a *V. Lánskou*). Příloha časopisu Kybernetika, Kybernetika *14* (1978), 3—35.

[38] Scorza-Dragoni property of Filippov mappings. Tôhoku Math. Journal. The second series, Vol. *32* (1980), 309—316.

[39] A new expression for the high-energy upper bound of the scattering amplitude (s *M. Chaichianem, J. Fischerem, S. M. Molodenskym* a *N. F. Nelipou*). J. Math. Phys. *22* (*2*), 1981, 380—384.

[40] Extension of the Froissart bound to unphysical scattering angles (s *M. Chaichianem, J. Fischerem* a *N. F. Nelipou*). Czech. Journal of Physics Vol. *B 31*, 1981, 1324—1333.

[41] Froissartova mez pro komplexní úhly rozptylu (s *M. Chaichianem, J. Fischerem* a *N. F. Nelipou*). 7. konf. čs. fyziků, Praha 24.—28. 1981, Academia.

[42] Strongly maximal matrix functions in regions containing stable solutions. Proc. of the Equadiff conference held in Bratislava 1981, Teubner Texte zur Math. *47*, 352—355.

[43] Improvement of the Froissart-Martin bound for a complex scattering angle (s *M. Chaichianem, J. Fischerem* a *N. F. Nelipou*). J. Math. Phys. *24* (*2*), 1983, 291—299.

[44] On generalization of Rayleigh-Ritz inequality (s *R. C. Brownem*). Workshop on Diff. Equations and Control Theory, INCREST, Univ. of Bucharest, 1983, 39—42.

[45] Matematické modelování průběhu roztroušené mozkomíšní sklérózy s použitím principů Thomovy teorie katastrof (s *P. Jedličkou, M. Katětovem* a *J. Bočkovou*). Čs. neurologie a neurochirurgie 46/79, 41—50.

[46] Some multipoint extensions of the Rayleigh-Ritz inequality (s *R. C. Brownem*). Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh, *100A* (1985), 157—174.

[47] Holomorphic extension of a function whose odd derivatives are summable. Czechoslovak Math. Journal *36* (*110*), 1985, 59—65.

[48] Analysis of integral equations attached to skin effect. Aplikace matematiky *30* (1985), 361—374.

[49] Sixty years of Jaroslav Kurzweil (s *J. Jarníkem, Š. Schwabikem* a *M. Tvrdým*). Czechoslovak Math. Journal *36* (*111*), 1986, 147—166; Jaroslav Kurzweil šedesátníkem (s *J. Jarníkem, Š. Schwabikem* a *M. Tvrdým*). Časopis pěst. mat. *111* (1986), 91—111.

[50] Úvod do teorie Itôových stochastických diferenciálních rovnic. Fyzika a matematika, sborník prací semináře Souš 1987, JČSMF 1987.

[51] Absolutely continuous selections from absolutely continuous set valued map (s *V. Křivanem*). Czechoslovak Math. Journal *40* (*115*), 1990, 503—513.

[52] An averaging principle for stochastic evolution equations (s *J. Seidlerem*). Časopis pěst.mat. *115* (1990), 240—263.

[53] An averaging principle for stochastic evolution equations I (s *B. Maslowskim* a *J. Seidlerem*) Mathematica Bohemica *116* (1991), 191—224.

[54] Některé výsledky modelování průběhu roztroušené sklerózy s použitím základních pojmů teorie katastrof (s *J. Bočkovou*). Výzkumná zpráva MÚ ČSAV a MFF UK, 1981.

[55] Matematický model roztroušené sklerózy mozkomíšní vytvořený na základě hypotézy o náhodné rozložení plak. Výzkumná zpráva MÚ ČSAV a MFF UK, 1985.

[56] Integral continuity and stability for stochastic hyperbolic systems (s *B. Maslowskim* a *J. Seidlerem*). Preprint MÚ ČSAV, No. 65, 1991.