

Vil'jam V. Kazakevich; Ivan A. Mochalov

Поисковые алгоритмы ускоренной оптимизации инерционных нестационарных объектов

*Kybernetika*, Vol. 21 (1985), No. 5, 382--404

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/124990>

## Terms of use:

© Institute of Information Theory and Automation AS CR, 1985

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## ПОИСКОВЫЕ АЛГОРИТМЫ УСКОРЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ИНЕРЦИОННЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОБЪЕКТОВ

ВИЛЬЯМ В. КАЗАКЕВИЧ, ИВАН А. МОЧАЛОВ

Синтезируются поисковые алгоритмы ускоренной оптимизации с прогнозированием установившегося значения и вычислением разрыва старшей производной при фиксированном числе измерений выхода объекта типа „нелинейность-линейность“ (НЛ) при неизвестных его динамических параметрах и воздействии случайных, а также монотонных возмущений. Для синтеза алгоритмов применяется кусочно-линейная аппроксимация параметров объекта и полиномиальная для монотонных возмущений с использованием модифицированного метода Прони (R. de Prony) исключения трансцендентностей. Анализируются факторы, влияющие на устойчивость вычислений по методу Прони (МП). Синтезируются пороговые алгоритмы поисковой оптимизации. Приводятся примеры синтеза алгоритмов для объектов первого порядка и результаты моделирования.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Для инерционных объектов оптимизации, обладающих транспортным запаздыванием, применяются шаговые системы экстремального управления (СЭУ), в которых поисковые перемещения осуществляются через дискретные промежутки времени. Для уменьшения инерционности объектов типа НЛ разработаны дискретные алгоритмы оптимизации [1–4]. Основой их является прогнозирование установившегося значения и вычисление разрыва старшей производной. При их синтезе предполагается, что постоянные времени объекта являются известными величинами, которые находятся методами пассивного эксперимента вне процесса управления [5].

Если изменение динамических параметров происходит быстрее, чем изменение его установившегося значения, то идентификация параметров производится одновременно в темпе с процессом управления. Такие алгоритмы синтезированы в [1, 3]. Здесь применяются два подхода. В первом — для целей идентификации на каждом шаге минимизируется функционал невязки нелинейной относительно неизвестных параметров. Во втором — по текущим измере-

ниями оцениваются постоянные времени и состояние объекта по МП [6, 7]. Для этого используется представление выхода объекта, являющегося откликом на возмущение его входа, в виде суммы экспонент с неизвестными показателями и коэффициентами перед ними. Можно показать, что в отсутствие вертикального дрейфа экспоненциальные члены удовлетворяют разностному уравнению первого порядка с постоянными коэффициентами, характеристические корни которого зависят от неизвестных показателей экспонент [8]. Поэтому вычисляя по текущим измерениям корни и используя вид зависимости между корнями и динамическими параметрами объекта, находят постоянные времени. В [1] рассматривается объект третьего порядка в отсутствие монотонных возмущений, для которого синтезирован алгоритм поиска по МП.

В настоящей работе обобщается методика синтеза ускоренных алгоритмов СЭУ по модифицированному МП с фиксированным числом измерений выхода для объектов типа НЛ, линейная часть которых описывается дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка, а статическая характеристика имеет вертикальный дрейф по произвольному закону. Анализируются факторы, влияющие на устойчивость вычислений по методу Прони. Синтезируются пороговые алгоритмы поисковой оптимизации. Приводятся примеры алгоритмов для объектов первого порядка и результаты моделирования.

## 2. МОДЕЛЬ ОБЪЕКТА ОПТИМИЗАЦИИ

Идеализированная модель объекта оптимизации состоит из последовательного соединения экстремального звена (нелинейная часть) с характеристикой  $y^* = f(x)$ , вид которой неизвестен, звена чистого запаздывания с известной величиной запаздывания  $\tau_3$  и линейной части, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени  $t$ . Величина  $n$  предполагается известной. Вход объекта обозначается через  $x$ , выход — через  $y_n(t)$  — истинное значение. На объект действуют возмущения  $\varphi(t), \psi(t)$ . Здесь  $\psi(t)$  монотонное возмущение, вызывающее вертикальный дрейф кривой  $y^* = f(x)$ . Возмущение на выходе  $\varphi(t)$  является аддитивным, центрированным, стационарным случайным процессом с неизвестным законом распределения и ограниченной дисперсией. Измеряемое значение выхода обозначается через  $y(t) = y_n(t) + \varphi(t)$ .

При введенных обозначениях связь между  $y_n(t)$  и  $x(t)$  описывается в виде дифференциального уравнения

$$\sum_{i=1}^n b_i(t) y_n^{(i)}(t) + y_n(t) = f(x(t - \tau_3)) + \psi(t).$$

Если при  $t \in [t_{j-1}, t_j]$  величины  $b_i(t)$  изменяются незначительно, то на этом промежутке они могут быть представлены кусочно-постоянными функциями  $b_i(t) = b_{ji} = \text{const}$ , где  $j$  — номер интервала разбиения. Выбор величины ин-

тервала разбиения определяется ниже. В этом же промежутке  $\psi(t)$  представляется полиномиальной зависимостью  $\psi(t) = \sum_{i=1}^m r_{ji} t^i$ , где  $r_{ji} = \text{const}$ ,  $m < n$ .

С учетом этого получим

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n b_{ji} y_{jn}^{(n-i+1)}(t) + y_{jn}(t) = f(x_j(t - \tau_3)) + \sum_{i=1}^m r_{ji} t^i,$$

$$(2) \quad b_{jn} = \sum_i T_{ji}, \quad b_{j_{n-1}} = \sum_{i \neq k} T_{ji} \cdot T_{jk}, \dots, b_{j1} = \prod_i T_{ji},$$

$T_{ji}$  — постоянные времени объекта на  $j$ -ом шаге поиска. Структурная схема объекта оптимизации при  $t \in [t_{j-1}, t_j]$  изображена на рис. 1.

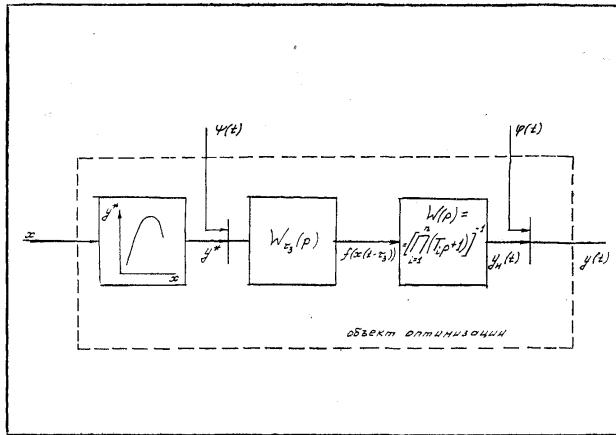


Рис. 1. Структурная схема объекта оптимизации.

### 3. СИНТЕЗ ПОИСКОВЫХ АЛГОРИТМОВ УСКОРЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ФИКСИРОВАННЫМ ЧИСЛОМ ИЗМЕРЕНИЙ

За начало отсчета принимается момент появления на выходе  $j$ -го отклика  $y_{jn}(t)$  при подаче на вход объекта в момент  $t = t_{j-1} - \tau_3$  поискового смещения  $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ ,  $|\Delta x_j| = \text{const}$ . Если совершается поисковое смещение  $x_j$ , то при  $t \in [t_{j-1}, t_j]$ ,  $t_j = (N - 1)\tau + \tau_3$ , решение (1) с учетом  $\phi(t)$  имеет вид

$$(3) \quad y_j(t) = \mathbf{D}_j^T \cdot \mathbf{F}(t_j) + \phi_j(t),$$



$d_{j,0}, d_{j,n+1}, d_{j,n+2}, \dots, d_{j,n+m}$  от параметров дрейфа  $r_{ji}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) в виде линейных соотношений

$$(4) \quad \mathbf{K}_j \mathbf{R}_j = \mathbf{D}_{j1},$$

где  $\mathbf{R}_j^T = (a_{j0}, r_{j1}, r_{j2}, \dots, r_{jm})$  — вектор неизвестных параметров;  $\mathbf{D}_{j1}^T = (d_{j0}, d_{j,n+1}, \dots, d_{j,n+m})$  — вектор параметров;  $\mathbf{K}_j = (K_{ik})$ ,  $K_{ik} = 1$ ,  $i = k$ ,  $K_{ik} = 0$ ,  $i > k$ . Элементы  $K_{ik}$  зависят от  $b_{ji}$ . Для простоты обозначений в (4) нижний индекс „ $j$ “ опущен. Обоснуем (4). Общее решение (1) равно  $y_j(t) = u_j(t) + v_j(t)$ , где  $u_j(t)$  — общее решение однородного уравнения,  $v_j(t)$  — частное решение. Так как корни характеристического уравнения предполагаются действительными и различными, то  $u_j(t)$  равно  $u_j(t) = \sum_{i=1}^n d_{ji} \exp(-\lambda_{ji} \cdot \bar{t}_j)$ .

Найдем  $v_j(t)$  по методу неопределенных коэффициентов. Для этого  $v_j(t)$  ищем в виде

$$(5) \quad v_j(t) = \sum_{i=0}^m A_{ji} t^i,$$

где  $A_{ji}$  неизвестные коэффициенты. По предположению  $m < n$ , поэтому подставляя (5) в исходное уравнение и приравнявая соответствующие коэффициенты получим систему уравнений относительно вектора  $\mathbf{A}_j^T = (A_{j0}, A_{j1}, \dots, A_{jm})$ ,  $\mathbf{B}_j \mathbf{A}_j = \mathbf{R}_j$ , где  $\mathbf{R}_j^T = (a_{j0}, r_{j1}, r_{j2}, \dots, r_{jm})$ ,

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} 1 & b_{jn} & 2! b_{j,n-1} & \dots & (m-1)! b_{j,m-1} & m! b_{jm} \\ 0 & 1 & 2! b_{jn} & \dots & (m-1)! b_{j,m-2} & m! b_{j,m-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{(m-1)!}{2!} b_{j,m-3} & \frac{m!}{2!} b_{j,m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{m!}{(m-1)!} b_{jn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Её решение равно  $\mathbf{A}_j = \mathbf{K}_j \mathbf{R}_j$ , где  $\mathbf{K}_j = (K_{ik}) = \mathbf{B}_j^{-1}$ ,

$$K_{ik} = \begin{cases} C_{ki}, & i < k \\ 1, & i = k \\ 0, & i > k \end{cases}$$

Здесь  $C_{ki}$  — алгебраическое дополнение элемента  $B_{ki}$  в матрице  $\mathbf{B}_j$ . Подставляя найденное значение  $A_{ji}$  ( $i = 0, \dots, m$ ) в (5) получим выражение для  $y_j(t)$  в виде

$$y_j(t) = (a_{j0} + \sum_{i=2}^{m+1} K_{1i} r_{j,i-1}) + \sum_{i=1}^n d_{ji} \exp(-\lambda_{ji} \bar{t}_j) + \\ + (r_{j1} + \sum_{i=3}^{m+1} K_{2i} r_{j,i-1}) \bar{t}_j + (r_{j2} + \sum_{i=4}^{m+1} K_{3i} r_{j,i-1}) \bar{t}_j^2 + \dots + r_{jm} \bar{t}_j^m.$$

Сравнивая последнее выражение с (4) получим  $\mathbf{K}_j \mathbf{R}_j = \mathbf{D}_{j1}$ ,

$$\mathbf{D}_{j1}^T = (d_{j,n+1}, \dots, d_{j,n+m}), \quad \text{где } d_{j0} = a_{j0} + \sum_{i=2}^{m+1} K_1 r_{j,i-1};$$

$$d_{j,n+1} = r_{jn} + \sum_{i=3}^{m+1} K_2 r_{j,i-1}; \dots; d_{j,n+m} = r_{jm}.$$

Определим неизвестные параметры  $d_{ji}, \lambda_{jk}$  ( $i = 0, \dots, n+m, k = 1, \dots, n$ ) по МП видоизмененному соответствующим образом (модифицированному МП). Модификация состоит в распространении его на анализ зависимости (3), представляемой в виде суммы экспоненциальных и полиномиальных членов, когда как в традиционном методе анализируется зависимость представляемой только в виде суммы экспоненциальных членов и свободной составляющей [8, 9]. Пусть в моменты  $\bar{t}_j = 0, \dots, (N-1)\tau$  получено  $N$  некоррелированных измерений  $y_j(0), \dots, y_j((N-1)\tau)$ . Исключим в (3) параметры  $d_{j0}, d_{j,n+1}, \dots, d_{j,n+m}$ . Для этого определим оператор  $\mathbf{P}$ , который по заданной последовательности  $\{y_j(i\tau)\}_{i=0}^{N-1}$  строит новую, сдвигая индекс  $i$  на единицу. При возведении  $(\mathbf{P}-1)$  на последовательность, члены которой являются полиномами от  $\tau$ , степень его понижается на единицу. Поэтому

$$(5) \quad \mathbf{M}_{j1} \mathbf{D}_{j2} = \Delta_{j1}$$

$$(6) \quad \mathbf{M}_{j2} \mathbf{D}_{j2} = \Delta_{j2},$$

где  $\mathbf{D}_{j2}^T = (d_{j1}, d_{j2}, \dots, d_{jn})$  — вектор неизвестных параметров перед экспоненциальными членами в (3);  $\Delta_{j1}^T = (\delta_{j,m+1}(0), \delta_{j,m+1}(\tau), \dots, \delta_{j,m+1}((n-1)\tau))$  — вектор разностей  $(m+1)$ -го порядка;  $\Delta_{j2}^T = (\delta_{j,m+1}(n\tau), \delta_{j,m+1}((n+1)\tau), \dots, \delta_{j,m+1}((N-m-2)\tau))$  — вектор разностей;  $\mathbf{M}_{j1} = (M_{ik}), M_{ik} = \mu_{jk}^i (\mu_{j,k} - 1)^{m+1}$   $i = 0, \dots, n-1, k = 1, \dots, n$ ;  $\mathbf{M}_{j2} = (M_{ik}), M_{ik} = \mu_{jk}^i (\mu_{j,k} - 1)^{m+1}$ ,  $i = n, N-m-2, k = 1, \dots, n$ ;  $\mu_{jk} = \exp(-\lambda_{jk}\tau)$ . Так как  $\det \mathbf{M}_{j1} = \prod_i (\mu_{ji} - 1)^{m+1}$ .

$\prod_{i \neq k} (\mu_{ji} - \mu_{jk})$ , а по предположению  $\mu_{ji} \neq 1, \mu_{ji} \neq \mu_{jk}$ , то  $\det \mathbf{M}_{j1} \neq 0$ . Поэтому из (5), (6) получим  $\mathbf{M}_{j2} \cdot \mathbf{M}_{j1}^{-1} \Delta_{j1} - \Delta_{j2} = 0$ , которое после преобразований образуют относительно  $\mathbf{S}_j$  систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$(7) \quad \Delta_{j3} \mathbf{S}_j = \Delta_{j2},$$

где

$$\Delta_{j3} = (A_{ik}), A_{ik} = \delta_{j,m+1}((i-k)\tau), i = n, \dots, N-m-2; k = 1, \dots, n;$$

$$\mathbf{S}_j^T = (s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jn}),$$

$$(8) \quad s_{j1} = -\sum_i \mu_{ji}; s_{j2} = \sum_{i \neq k} \mu_{ji} \mu_{jk}; \dots; s_{jn} = (-1)^n \prod_i \mu_{ji}.$$

Найдем решение (7) из условия минимизации функционала  $\inf_{\mathbf{S}_j} \|\Delta_{j3} \mathbf{S}_j - \Delta_{j2}\|_{\mathbf{E}}^2$ , где  $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$  — евклидова норма. Это приводит к системе нормальных уравнений,

решение которой  $\hat{S}_j$  равно

$$(9) \quad \hat{S}_j = (\Delta_{j3}^T \Delta_{j3})^{-1} \Delta_{j3}^T \Delta_{j2}.$$

Подставим найденные из (9) значения  $\hat{S}_{ji}$  в (8), тогда получим

$$(10) \quad \mu_j^n + \hat{s}_{j1} \mu_j^{n-1} + \dots + \hat{s}_{jn-1} \mu_j + \hat{s}_{jn} = 0.$$

При  $n > 4$  его решение  $\hat{\mu}_{ji}$  может быть получено приближенно с помощью численных методов. Динамические параметры объекта оптимизации будут равны

$$(11) \quad \hat{\lambda}_{ji} = -\tau^{-1} \ln \hat{\mu}_{ji}.$$

По значениям  $\hat{\lambda}_{ji}$  и измерениям  $\mathbf{Y}_j^T = (y_j(0), y_j(\tau), \dots, y_j((N-1)\tau))$  определим  $\mathbf{D}_j$  в (3) минимизируя  $\inf_{\mathbf{D}_j} \|\mathbf{M}_j \mathbf{D}_j - \mathbf{Y}_j\|_E^2$ . В результате получим

$$(12) \quad \hat{\mathbf{D}}_j = (\mathbf{M}_j^T \mathbf{M}_j)^{-1} \mathbf{M}_j^T \mathbf{Y}_j,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_j &= (\mathbf{I} : \hat{\mathbf{M}} : \mathbf{T}), \quad \mathbf{I} = (1, 1, \dots, 1), \quad \hat{\mathbf{M}} = (\hat{M}_{ik}), \\ \hat{M}_{ik} &= \hat{\mu}_{jk}^i, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad k = 1, \dots, n, \\ \mathbf{T} &= (\mathbf{T}_{ik}), \quad T_{ik} = i\tau^k, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

При нахождении оценок по (12) часть независимых переменных случайны и коррелированы с помехой на выходе. В этих условиях как известно оценки (12) несостоятельны и смещены. Для обоснованного решения задачи регрессии при ошибках в некоторых независимых переменных обычно используются методы ортогональной регрессии, максимального правдоподобия, инструментальных переменных и т.д. При выборе величины  $N$  из условия максимального быстродействия системы, ее величина является конечной и, как правило, не велика ( $N \leq 10$ ) [3]. Поэтому можно ожидать, что формальное применение *МНК* на конечных и небольшого объема выборках вместо рекомендуемых методов, может дать приемлемые для целей экстремального управления результаты. Это, в частности, подтверждается исследованиями в [10], которыми показано преимущество *МНК* перед вышеупомянутыми методами. Применение равноточного *МНК*, вместо взвешенного *МНК*, который необходимо было применять по существу задачи, вызвано трудностями расчета весовой матрицы на каждом шаге.

По значениям  $\hat{\lambda}_{ji}$  находятся  $\hat{T}_{ji} = \hat{\lambda}_{ji}^{-1}$ . Из (2) определяются оценки  $\hat{b}_{ji}$  параметров  $b_{ji}$  в (1) и далее оценки элементов матрицы  $\mathbf{K}_j$ . Так как  $\hat{\mathbf{D}}_j$  уже найдено по (12), поэтому также известно  $\hat{\mathbf{D}}_{j1}$ . В результате (4) будет иметь вид

$$(13) \quad \hat{\mathbf{K}}_j \cdot \mathbf{R}_j = \hat{\mathbf{D}}_{j1},$$

откуда, учитывая треугольный вид  $\hat{\mathbf{K}}_j$ , находим оценку установившегося значения  $\hat{a}_{j0}$  и параметры дрейфа  $\hat{r}_{j1}, \hat{r}_{j2}, \dots, \hat{r}_{jn}$ .



Произведем в момент  $t_j - \tau_3$  следующее поисковое смещение  $x_{j+1} = x_j + \Delta x_{j+1}$ , тогда через  $\tau_3$  в промежутке  $[t_j, t_{j+1}]$  появится отклик  $y_{j+1}(t) = \mathbf{D}_{j+1}^T \cdot \mathbf{F}(t_{j+1}) + \varphi_{j+1}(t)$ , который получается из (3) заменой  $j$  на  $j + 1$ . Далее получив измерения  $y_{j+1}(0), y_{j+1}(\tau), \dots, y_{j+1}((N-1)\tau)$  и заменяя в (9)–(13)  $j$  на  $j + 1$ , найдем  $a_{j+1,0}, \hat{r}_{j+1,1}, \hat{r}_{j+1,2}, \dots, \hat{r}_{j+1,m}$ .

Алгоритм ускоренного поиска экстремума инерционного объекта типа НЛ с прогнозированием установившегося значения по МП при вертикальном дрейфе характеристики реализует закон

$$(14) \quad \Delta x_{j+2} = \Theta_1 \operatorname{sign}(\hat{\gamma}_{j+1} \Delta x_{j+1}),$$

где  $\hat{\gamma}_{j+1} = \hat{a}_{j+1,0} - \hat{a}_{j,0} - \sum_{i=1}^m \hat{r}_{ji}((N-1)\tau + \tau_3)^i$ ;  $\Theta_1$  – некоторая константа [1].

Алгоритм СЭУ с вычислением разрыва старшей производной имеет вид [1]

$$(15) \quad \Delta x_{j+2} = \Theta_2 \operatorname{sign}(\hat{\omega}_{j+1} \Delta x_{j+1}),$$

где

$$\hat{\omega}_{j+1} = \hat{b}_{j+1,i}(-1)^n \sum_{i=1}^n \hat{\lambda}_{j+1,i}^n \hat{a}_{j+1,i} - \hat{b}_{j,i}(-1)^n \cdot \sum_{i=3}^n \hat{\lambda}_{j,i}^n \hat{a}_{j,i} \exp[-\hat{\lambda}_{j,i}((N-1)\tau + \tau_3)];$$

$\Theta_2$  – некоторая константа;  $\hat{b}_{j+1,i}, \hat{b}_{j,i}$  – известные функции от  $\hat{\lambda}_{j+1,i}, \hat{\lambda}_{j,i}$  соответственно.

#### 4. О ВОЗМОЖНОЙ НЕКОРРЕКТНОСТИ АЛГОРИТМОВ ОПТИМИЗАЦИИ

При реализации синтезированных выше алгоритмов СЭУ на средствах вычислительной техники (мини-ЭВМ, микропроцессор и т.д.) или в виде специализированного устройства в некоторых случаях возникают трудности, связанные с неустойчивостью (некорректностью) вычислительного процесса решения СЛАУ (9), (12).

Исследуем для определенности влияние на устойчивость решения (9) следующих факторов:

- близости между собой постоянных времени объекта оптимизации;
- величины выдержки времени  $\tau$  между соседними измерениями отклика;
- порядка  $m$  полинома, аппроксимирующего вертикальный дрейф характеристики объекта.

Рассмотрим влияние первого фактора. Пусть линейная часть объекта оптимизации аппроксимирована дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка, когда как в действительности она описывается уравнением  $(n-1)$ -го порядка. Нетрудно показать, что тогда матрица  $\Delta_{j3}^T \Delta_{j3}$  размера  $(n \times n)$  в (9) имеет ранг  $(n-1)$  и для ее собственных значений  $\xi_{ji}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) справедливо  $\xi_{ji} \neq 0$

( $i = 1, \dots, n-1$ ),  $\xi_{jn} = 0$ . Пусть между постоянным времени выполнено соотношение  $|T_{jn-1} - \Gamma_{jn}| \cdot T_{jn-1}^{-1} \cdot T_{jn}^{-1} = \varepsilon_j$ . Это в частности справедливо, если они близки между собой. Для определенности положим  $T_{jn-1} - T_{jn} > 0$ , тогда  $T_{jn}^{-1} = T_{jn-1}^{-1} - \varepsilon_j$ . Матрицу в системе (9), соответствующей близким постоянным времени обозначим через  $\tilde{\Delta}_{j3}^T \tilde{\Delta}_{j3}$ . Рассмотрим для простоты случай отсутствия вертикального дрейфа, т.е.  $m = 0$ , тогда

$$y_j(t) = d_{j0} + \sum_{i=1}^{n-1} d_{ji} \exp(-i_j T_{ji}^{-1}) + d_{jn} \exp(-i_j T_{j,n-1}^{-1} + \varepsilon_j \bar{i}_j).$$

Разложим  $\exp(\varepsilon_j \bar{i}_j)$  в степенной ряд, тогда после преобразования получим

$$(16) \quad y_j(t) = d_{j0} + \sum_{i=1}^{n-2} d_{ji} \exp(-i_j T_{ji}^{-1}) + d_{j,n-1}^* \exp(-i_j T_{j,n-1}^{-1}) + h_j,$$

где

$$h_j = d_{jn} \exp(-i_j T_{j,n-1}^{-1}) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\varepsilon_j \bar{i}_j)^i.$$

Пусть теперь  $N$  и  $\tau$  фиксированы, тогда при малом  $\varepsilon_j$  соответственно будет мало  $h_j$  и  $\|\Delta_{j3}^T \Delta_{j3} - \tilde{\Delta}_{j3}^T \tilde{\Delta}_{j3}\|_E^2 < \bar{h}_j$ , где  $\bar{h}_j$  некоторая функция от  $h_j$ . Таким образом при малом  $\varepsilon_j$  матрицы  $\Delta_{j3}^T \Delta_{j3}$ ,  $\tilde{\Delta}_{j3}^T \tilde{\Delta}_{j3}$  по норме мало отличаются друг от друга. Так как  $\Delta_{j3}^T \Delta_{j3}$  симметрична и невырождена, то ортогональным преобразованием ее можно привести к диагональному виду и система нормальных уравнений  $\tilde{\Delta}_{j3}^T \tilde{\Delta}_{j3} S_j = \tilde{\Delta}_{j3}^T \tilde{\Delta}_{j2}$  после преобразования будет иметь вид  $\xi_{ji} S_{ji} = \bar{U}_j$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), где  $\xi_{ji}$  — собственные значения матрицы  $\tilde{\Delta}_{j3}^T \tilde{\Delta}_{j3}$ . Обе системы по нахождению  $S_j$  алгебраически эквивалентны. Из преобразованной системы это решение равно  $\hat{S}_{ji} = \xi_{ji}^{-1} \bar{U}_{ji}$ , ( $i = 1, \dots, n$ ). Из теории возмущений матриц известно, что собственные значения  $\xi_{ji}$  непрерывно зависят от  $\Delta_{j3}^T \Delta_{j3}$  в норме. Значит  $\xi_{jn}$  может быть очень малым при малом  $\varepsilon_j$ , поэтому  $\hat{S}_{jn}$  может принимать любые наперед заданные значения. Это означает, что задача нахождения решения по (9) при близких постоянных времени является неустойчивой. Аналогично показывается неустойчивость (12).

Решение (9) также может быть неустойчиво при неудачном выборе величины  $\tau$ , даже при достаточно сильном отличии постоянных времени между собой. Для этого достаточно рассмотреть представление (16). Если теперь  $i_j = 0$ ,  $\tau, \dots, (N-1)\tau$ , то при фиксированном  $N$  и малом  $\tau$  может быть получена близость по норме матриц  $\Delta_{j3}^T \Delta_{j3}$ ,  $\tilde{\Delta}_{j3}^T \tilde{\Delta}_{j3}$ . Очевидно, при близких постоянных времени и малом  $\tau$  неустойчивость решения (9) будет еще большей по сравнению со случаем только близких постоянных времени.

Если же теперь  $m \neq 0$ , т.е. имеет место вертикальный дрейф и берется достаточно высокая степень аппроксимирующего полинома, то с увеличением  $m$  увеличивается порядок разностей, являющихся элементам матрицы  $\Delta_{j3}^T \Delta_{j3}$ , тогда плохая обусловленность системы нормальных уравнений, вызванная первыми двумя факторами, становится еще большей при возрастании  $m$ .

В настоящее время существуют две группы методов получения устойчивых

результатов при численном решении неустойчивых задач. Это естественная регуляризация („саморегуляризация“) и регуляризация по Тихонову [11, 12]. В последнем случае  $S_j$ ,  $D_j$  находятся из условия минимизации функционалов  $\inf_{S_j} \{\|\Delta_{j3} S_j - \Delta_{j2}\|_E^2 + \Omega_{j1} \|S_j\|_E^2\}$ ,  $\inf_{D_j} \{\|M_j D_j - Y_j\|_E^2 + \Omega_{j2} \|D_j\|_E^2\}$ , где  $\Omega_{j1}$ ,  $\Omega_{j2} > 0$  – параметры, однозначно определяемые по невязке. Однако, как следует из (16), устойчивость решения может быть увеличена более простым способом естественной регуляризации. В методах этой группы производится управление мерой близости получаемого решения к точному за счет:

- выбора параметра вычислительного процесса  $\tau$ ;
- длины промежутка аппроксимации  $T_j(t)$  кусочно-постоянными функциями за счет выбора  $N$ ;
- сглаживания результатов измерений выхода и оценок  $T_j$ , например, с использованием фильтра Калмана, скользящего среднего, экспоненциального сглаживания и т.д.

## 5. СИНТЕЗ ПОРОГОВЫХ АЛГОРИТМОВ УСКОРЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В вышеописанных алгоритмах ускоренной оптимизации оценивание параметров объекта предусматривает обработку сразу всей совокупности измерений. При значительном их числе, что соответствует высокому уровню случайных возмущений, обработка измерений связана с существенными затратами времени, к тому же требуются относительно большая память. С другой стороны, во многих случаях, наблюдения поступают последовательно, с течением времени. Поэтому желательно иметь алгоритмы оптимизации с последовательным характером обработки наблюдений, в которых для уточнения построенных по имеющейся на данный момент информации оценок параметров используются только поступившие новые данные. Основной задачей при последовательной обработке является определение правила остановки вычислительного процесса на каждом шаге поиска. Одно из возможных правил сформулировано в [12] на примере решения задачи адаптивной идентификации системы с распределенными параметрами. Выбор величины интервала разбиения аппроксимации неизвестного параметра в классе кусочно-постоянных функций определяется по критерию малости, величины невязки между рассчитанным и наблюдаемым состоянием системы, который сравнивается с заданным порогом. В [13] на примере решения СЛАУ по МНК формулируется правило остановки рекуррентной процедуры оценивания. Оно состоит в нахождении ошибки нормального решения СЛАУ по известным ошибкам правой части и матрице линейного преобразования. Для числа обусловленности, характеризующего чувствительность решения, находятся верхние и нижние оценки. Критерий остановки

состоит в сравнении на каждой итерации полученной ошибки с заданной пороговой константой.

Ниже синтезируются поисковые алгоритмы ускоренной оптимизации по МП с последовательной обработкой измерений на каждом шаге поиска. Правило остановки вычислительного процесса определяется по результатам сравнения величины невязки с заданным порогом. В алгоритмах ускоренной оптимизации по МП необходимо на каждом поисковом смещении входа решать СЛАУ (9), (12).

При поступлении  $(N + 1)$ -го измерения аналогично (9) имеем

$$\begin{aligned}\hat{S}_j(N + 1) &= \mathbf{W}_{j3}(N + 1) \Delta_{j3}^T(N + 1) \Delta_{j2}(N + 1); \\ \mathbf{W}_{j3}^{-1}(N + 1) &= \Delta_{j3}^T(N + 1) \Delta_{j3}(N + 1).\end{aligned}$$

Сравнения между собой  $\Delta_{j3}(N)$ ,  $\Delta_{j3}(N + 1)$  и  $\Delta_{j2}(N)$ ,  $\Delta_{j2}(N + 1)$  можно записать используя блочные матрицы  $\Delta_{j3}^T(N + 1) = (\Delta_{j3}(N) ; \delta_{j3}^T(N + 1))^T$ ,

$$\Delta_{j2}^T(N + 1) = (\Delta_{j2}(N) ; \delta_{jm+1}((N - m) \tau))^T,$$

где

$$\begin{aligned}\delta_{j3}^T(N + 1) &= (\delta_{jm+1}((N - m - 2) \tau), \\ \delta_{jm+1}((N - m - 3) \tau), \dots, \delta_{jm+1}((N - n - m - 1) \tau)).\end{aligned}$$

Откуда с учетом свойств операций транспонирования и умножения блочных матриц получим

$$(17) \quad \begin{aligned}\hat{S}_j(N + 1) &= \mathbf{W}_{j3}(N + 1) [\Delta_{j3}(N) \Delta_{j2}(N) + \\ &+ \delta_{j3}(N + 1) \delta_{jm+1}((N - m) \tau)].\end{aligned}$$

Выразим

$\mathbf{W}_{j3}(N + 1)$  через  $\mathbf{W}_{j3}(N)$

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{j3}^{-1}(N + 1) &= (\Delta_{j3}^T(N) ; \delta_{j3}^T(N + 1)) \begin{pmatrix} \Delta_{j3}(N) \\ \delta_{j3}^T(N + 1) \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{W}_{j3}(N) + \delta_{j3}(N + 1) \delta_{j3}^T(N + 1)\end{aligned}$$

или

$$\mathbf{W}_{j3}(N + 1) = (\mathbf{W}_{j3}(N) + \delta_{j3}(N + 1) \delta_{j3}^T(N + 1))^{-1}.$$

Для произвольной матрицы  $\mathbf{B}$  и симметричных  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$  согласованных размеров справедливо матричное тождество

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCB}^T)^{-1} \equiv \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1}.$$

Полагая в нем  $\mathbf{A} = \mathbf{W}_{j3}(N)$ ,  $\mathbf{B} = \delta_{j3}(N + 1)$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$  — единичная матрица, получим после преобразований

$$\mathbf{W}_{j3}(N + 1) = \mathbf{W}_{j3}(N) - \alpha_j(N) \mathbf{W}_{j3}(N) \delta_{j3}(N + 1) \delta_{j3}^T(N + 1) \mathbf{W}_{j3}(N),$$

где  $\alpha_j(N) = (\delta_{j3}^T(N+1) \mathbf{W}_{j3}(N) \delta_{j3}(N+1) + 1)^{-1}$  – некоторое число. Подставляя  $\mathbf{W}_{j3}(N+1)$  в (17) получим

$$(18) \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}_j(N+1) &= \hat{\mathbf{S}}_j(N) + \\ &+ \alpha_j(N) \mathbf{W}_{j3}(N) \delta_{j3}(N+1) [\delta_{jm+1}((N-m)\tau) - \delta_{j3}^T(N+1) \hat{\mathbf{S}}_j(N)]. \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления для (12) дают

$$(19) \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}_j(N+1) &= \hat{\mathbf{D}}_j(N) + \\ &+ \beta_j(N) \mathbf{V}_j(N) \mathbf{M}_j(N+1) [y_j(N\tau) - \mathbf{M}_j^T(N+1) \hat{\mathbf{D}}_j(N)], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_j(N) &= (\mathbf{M}_j^T(N) \mathbf{M}_j(N))^{-1}; \quad \beta_j(N) = (\mu_j^T(N+1) \mathbf{V}_j(N) \mu_j(N+1) + 1)^{-1}; \\ \mu_j^T(N+1) &= (1, \mu_{j1}^N, \dots, \mu_{jm}^N, N\tau, (N\tau)^2, \dots, (N\tau)^m). \end{aligned}$$

Функционал невязки  $\hat{\Phi}_j(N)$  равен

$$\hat{\Phi}_j(N) = \|y_j(t) - \hat{y}_j(t)\|_{\mathbb{E}}^2 = \mathbf{Y}_j^T(N) \mathbf{Y}_j(N) - \mathbf{Y}_j^T(N) \mathbf{M}_j(N) \hat{\mathbf{D}}_j(N).$$

При последовательной обработке измерений алгоритмы (14), (15) соответственно модифицируются и имеют вид

$$(20) \quad \Delta x_{j+2} = \Theta_1 \operatorname{sign} [\hat{\rho}_{j+1}(N) \Delta x_{j+1}],$$

$$(21) \quad \Delta x_{j+2} = \Theta_2 \operatorname{sign} [\hat{\omega}_{j+1}(N) \Delta x_{j+1}].$$

Здесь приращения качества  $\hat{\rho}_{j+1}(N)$ ,  $\hat{\omega}_{j+1}(N)$  вычисляются с использованием (18), (19). Измерения  $j$ -го отклика прекращаются при выполнении условия  $|\hat{\Phi}_j(N)/(N-2)| < \chi$  или  $|\hat{d}_{j0}(N)| < \chi_1$ , где  $\chi, \chi_1$  – заданные пороги, которые выбираются из практических соображений. Выбор правила окончания вычислений определен по результатам моделирования.

К пороговым алгоритмам ускоренной оптимизации также относятся алгоритмы, синтезированные с использованием статистических критериев, в которых отношение правдоподобия  $\Lambda$  сравнивается с заданным порогом  $\Lambda_0$ . Использование статистических критериев позволяет синтезировать алгоритмы СЭУ, обладающие адаптивными свойствами. Задача поиска экстремума в этом случае формулируется как эквивалентная задача проверки конкурирующих гипотез с последующим испытанием  $\Lambda$ . Применяются как параметрические, так и непараметрические критерии в зависимости от наличия или отсутствия априорных сведений о типе закона распределения помехи. Для синтеза управляющей части СЭУ безынерционных объектов используют критерии Неймана-Пирсона, Байеса и другие. Поиск в этом случае производится с помощью системы с разделением во времени пробными и рабочими смещениями входа. Для определения направления рабочего поискового смещения СЭУ производит измерения отклика на каждое пробное поисковое смещение и по их результатам проверяются конкурирующие гипотезы. После принятия одной из них про-

водится рабочее смещение. Решающее правило проверки гипотез имеет вид  $\Lambda > \Lambda_0$  принимается  $H_0$ ,  $\Lambda < \Lambda_0$  — принимается  $H_1$ . Порог  $\Lambda_0$  может определяться различными способами, например, из условия минимизации некоторой функции, зависящей от ошибок I и II рода. Вид функции определяет тип применяемого статистического критерия.

В последнее время получили распространение системы, в которых для обнаружения сигнала в помехах применяется последовательный (секвенциальный) критерий отношения вероятностей А. Вальда [14]. В этом критерии, так же как и в перечисленных выше, испытывается  $\Lambda$ . Однако, в отличие от классических критериев здесь минимизируется величина среднего времени процедур, при этом вероятность принятия ошибочных решений остается на заданном уровне. Свойство адаптивности при этом проявляется в том, что по мере приближения к экстремуму, когда отношение сигнал-помеха изменяется, система замедляет свое движение, автоматически увеличивая время наблюдения выхода. В [15–18] синтез системы сводится к схеме проверки двух альтернативных гипотез о значении неизвестного параметра биномиального распределения. Преимущество такого подхода состоит в отсутствии требования наличия информации о типе распределения помехи. В этих алгоритмах динамические параметры объекта предполагаются неизменными и известными величинами. Кроме того, предполагается также отсутствие монотонных возмущений. Ниже обобщается методика синтеза алгоритмов ускоренной оптимизации инерционных объектов с пробными смещениями входа, использующих последовательную процедуру, при неизвестных параметрах объекта и вертикальном дрейфе, аппроксимируемом алгебраическим полиномом  $m$ -го порядка.

Рассмотрим импульсный способ регулирования с разнесением во времени рабочими  $\Delta x_j$  и пробными  $\Delta$  поисковыми смещениями. Здесь  $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ ,  $|\Delta x_j| = \text{const}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Рассмотрим промежуток времени  $[t_{00}, t_{01}]$ ,  $t_{01} = t_{00} + (N - 1)\tau + \tau_3$ . Здесь первый индекс указывает номер цикла, второй номер такта в цикле. Если состояние объекта в момент  $t = t_{00} = -\tau_3$  характеризовалось величинами  $x_0, y_0 \neq f(x_0)$  и в этот момент было произведено мгновенное пробное поисковое смещение  $\Delta$  (назовем его нулевым смещением), то с учетом случайных возмущений  $\varphi(t)$  при  $t \geq 0$  динамика объекта описывается уравнением

$$y_{00}(t) = \mathbf{D}_{00}^T \cdot \mathbf{F}(t_{00}) + \varphi_{00}(t),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{t}_{00} &= t - t_{00}, \quad \mathbf{D}_{00}^T = (d_{00}, d_{010}, \dots, d_{0n0}, \\ & d_{0n+10}, \dots, d_{0n+m0}); \quad \mathbf{F}^T(\bar{t}_{00}) = (1, \exp(-\lambda_{01}\bar{t}_{00}), \\ & \exp(-\lambda_{02}\bar{t}_{00}), \dots, \exp(-\lambda_{0n}\bar{t}_{00}), \bar{t}_{00}, \bar{t}_{00}^2, \dots, \bar{t}_{00}^m). \end{aligned}$$

Если в момент  $t_{01} - \tau_3$  произвести первое пробное смещение  $+\Delta$ , то в промежутке  $[t_{01}, t_{02}]$  — (первый такт нулевого цикла) — на выходе появится отклик  $y_{01}(t)$  и т.д. На рис. 3 изображен поиск с пробными смещениями экстре-



Пусть в  $v$ -м такте нулевого цикла в моменты времени  $\bar{t}_{0v} = 0, \tau, \dots, (N-1)\tau$  имеются измерения  $y_{0v}(0), y_{0v}(\tau), \dots, y_{0v}((N-1)\tau)$ , общее количество которых четно. Рассмотрим измерения, полученные в нечетные моменты времени  $y_{0v}(\tau), y_{0v}(3\tau), \dots, y_{0v}((N_1-1)\tau)$ . По модифицированному МП могут быть найдены  $\hat{D}_{0v}^1$ . Последовательно решая (9), (12) или (18), (19) соответственно находятся величины  $\hat{a}_{00v}^1, \hat{r}_{01v}^1, \hat{r}_{02v}^1, \dots, \hat{r}_{0mv}^1$ . Рассматривая измерения, полученные в четные моменты времени  $y_{0v}(0), y_{0v}(2\tau), \dots, y_{0v}((N_2-1)\tau)$  и производя с ними аналогичные процедуры соответственно получим

$$\hat{a}_{00v}^2, \hat{r}_{01v}^2, \hat{r}_{02v}^2, \dots, \hat{r}_{0mv}^2.$$

Здесь верхние индексы оценок указывают на то, что они получены по нечетным (индекс 1) и четным (индекс 2) замерам. Рассмотрим случайную величину

$$W_{0v} = \begin{cases} 1, & \text{если } \varrho_{0v} \geq 0 \\ 0, & \text{если } \varrho_{0v} < 0, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \varrho_{0v} = & (-1)^{v+1} [\hat{a}_{00v}^2 + (h-v+1) \sum_{i=1}^m \hat{r}_{0iv}^2 ((N-1)\tau + \tau_3)^i - \\ & - (h-v) \sum_{i=1}^m \hat{r}_{0i,v+1}^2 ((N-1)\tau + \tau_3)^i], \\ & v = 1, 2, \dots, h-1. \end{aligned}$$

В результате получится последовательность  $W_0 = \{W_{0v}\}_{v=1}^{v=h-1}$ , в которой  $W_{0v}$  принимает значения единицы или нуля с вероятностью  $p$  и  $1-p$  соответственно. Величина  $p$  не изменяется при изменении индекса  $v$ . Поэтому  $W_0$  имеет биномиальное распределение. Статистический анализ  $W_0$  производится с применением последовательного анализа проверки гипотез

$$H_0 : p \leq p_0 ; H_1 : p > p_1,$$

где  $p_0, p_1$  — заданные числа;  $p_0 + p_1 = 1$ ;  $p_0 < p_1$ . В результате его применения получим алгоритм СЭУ с прогнозированием установившегося значения в виде

$$x_j = x_{j-1} + \Delta x_j = C_1 \text{sign } \gamma_{j-1}$$

где

$$\gamma_{j-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } 2u - (h-1) \geq A \\ 0, & \text{если } B < 2u - (h-1) < A \\ -1, & \text{если } 2u - (h-1) \leq B. \end{cases}$$

Здесь приняты обозначения

$$A = \frac{\ln [(1-\beta)/\alpha]}{\ln (p_1/p_0)}; B = \frac{\ln [\beta/(1-\alpha)]}{\ln (p_1/p_0)}; \alpha, \beta - \text{вероятности}$$

ошибок I, II рода соответственно;  $u$  — количество единиц в  $W_j$ ;  $C$  — некоторая константа, знак которой определяется в зависимости от поиска максимума или минимума характеристики  $y^* = f(x)$ .



## 6. ПРИМЕРЫ СИНТЕЗА АЛГОРИТМОВ УСКОРЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Разработанная выше общая методика синтеза алгоритмов ускоренной оптимизации применяется для частных случаев. Алгоритмы, реализованные по (14), (15) для объектов первого порядка в отсутствии вертикального дрейфа рассматриваются в примере 1. В примере 2, реализованные по (20), (21).

**Пример 1.** Пусть  $n = 1$ ,  $\psi(t) = 0$ , тогда (1) при  $t \in [t_{j-1}, t_j]$  имеет вид  $T_j \dot{y}_{j1}(t) + y_{j1}(t) = f(x_j(t - \tau_3))$ , где  $T_j$  — постоянная времени объекта, величина которой неизвестна. Решение (1) при  $t \geq t_{j-1}$  и  $\varphi(t) \neq 0$  равно  $y_j(t) = d_{j0} + d_{j1} \exp(-t_j T_j^{-1}) + \varphi_j(t)$ . Первая разность даст  $\delta_{j1}(0) = y_j(\tau) - y_j(0)$ . Ей соответствует (5), в которой  $M_{j1} = \mu_{j-1}$ ;  $\mu_j = \exp(-\tau T_j^{-1})$ ;  $D_{j2} = d_{j1}$ ;  $\Delta_{j1} = \delta_{j1}(0)$ . Решение (5) равно  $D_{j2} = d_{j1} = M_{j1}^{-1} \Delta_{j1} = (\mu_j - 1)^{-1} \delta_{j1}(0)$ . Составим вторую разность  $\delta_{j1}(\tau) = y_j(2\tau) - y_j(\tau) = d_{j1} \mu_j$ , третью и т.д. Подставим в них решение (5), тогда получим (7), в которой

$$S_j = s_{j1} = \mu_j; \quad \Delta_{j2}^T = (\delta_{j1}(\tau), \delta_{j2}(2\tau), \dots, \delta_{j2}((N-2)\tau)); \quad \Delta_{j3}^T = (\delta_{j1}(0), \delta_{j1}(\tau), \dots, \delta_{j1}((N-3)\tau)).$$

Решение (9), (10) равно

$$(22) \quad \hat{\mu}_j = \left[ \sum_{i=0}^{N-3} \delta_{j1}^2(i\tau) \right]^{-1} \sum_{i=0}^{N-3} \delta_{j1}(i\tau) \delta_{j1}((i+1)\tau)$$

Из (11) получим

$$(23) \quad \hat{T}_j = -\tau \ln^{-1} \hat{\mu}_j.$$

Оценки  $\hat{d}_{j0}$ ,  $\hat{d}_{j1}$  определяются из (12)

$$(24) \quad \hat{d}_{j0} = \Sigma_{j0}^{-1} (\Sigma_{j1} \Sigma_{j3} - \Sigma_{j2} \Sigma_{j4}).$$

$$(25) \quad \hat{d}_{j1} = \Sigma_{j0}^{-1} (N \Sigma_{j2} - \Sigma_{j1} \Sigma_{j4}).$$

Здесь

$$\Sigma_{j0}^{-1} = (N \Sigma_{j3} - \Sigma_{j4} \cdot \Sigma_{j4})^{-1}; \quad \Sigma_{j1} = \sum_{i=0}^{N-1} y_j(i\tau);$$

$$\Sigma_{j2} = \sum_{i=0}^{N-1} \hat{\mu}_j^i y_j(i\tau); \quad \Sigma_{j3} = \sum_{i=0}^{N-1} \hat{\mu}_j^{2i}; \quad \Sigma_{j4} = \sum_{i=0}^{N-1} \hat{\mu}_j^i.$$

Алгоритм СЭУ с прогнозированием установившегося значения (14) имеет вид

$$\Delta x_{j+1} = \Theta_1 \text{sign} \{ [\Sigma_{j+1,0}^{-1} (\Sigma_{j+1,1} \cdot \Sigma_{j+1,3} - \Sigma_{j+1,2} \cdot \Sigma_{j+1,4}) - \Sigma_{j0}^{-1} (\Sigma_{j1} \cdot \Sigma_{j3} - \Sigma_{j2} \cdot \Sigma_{j4})] \Delta x_{j+1} \}.$$

Алгоритм СЭУ с вычислением разрыва первой производной (15) равен

$$\Delta x_{j+2} = \Theta_2 \text{sign} \{ [ [\hat{d}_{j+1,1} \cdot \hat{T}_{j+1}^{-1} - \hat{d}_{j1} \cdot \hat{T}_j^{-1} \exp(-((N-1)\tau + \tau_3))] \Delta x_{j+1} \}.$$

**Пример 2.** Пусть получено  $N$  измерений. По (22)–(25) находятся  $\hat{\mu}_j(N)$ ,  $\hat{T}_j(N)$ ,  $\hat{d}_{j0}(N)$ ,  $\hat{d}_{j1}(N)$ , а также

$$\hat{\Phi}_j(N) = \sum_{i=1}^{N-1} y_j^2(i\tau) - \hat{d}_{j0}(N) \cdot \Sigma_{j1}(N) - \hat{d}_{j1}(N) \cdot \Sigma_{j2}(N).$$

По  $N$  измерениям вычисляются и запоминаются вспомогательные величины

$$W_{j3}(N) = \left[ \sum_{i=0}^{N-3} \delta_{j1}^2(i\tau) \right]^{-1}, \quad \alpha_j(N) = [1 + \delta_{j1}^2((N-2)\tau) / \sum_{i=0}^{N-3} \delta_{j1}^2(i\tau)]^{-1}$$

элементы матрицы  $V_j(N)$

$$\begin{aligned} v_{11}(N) &= \Sigma_{j3}(N) [N \Sigma_{j3}(N) - \Sigma_{j4}(N) \cdot \Sigma_{j4}(N)]^{-1}; \\ v_{12}(N) &= v_{21}(N) = v(N) = -\Sigma_{j4} [N \Sigma_{j3}(N) - \Sigma_{j4}(N) \cdot \Sigma_{j4}(N)]^{-1}; \\ v_{22}(N) &= N [N \Sigma_{j3}(N) - \Sigma_{j4}(N) \cdot \Sigma_{j4}(N)]^{-1}, \end{aligned}$$

а также величина

$$\beta_j(N) = [v_{11}(N) - 2v(N) \hat{\mu}_j^{2N}(N) + v_{22}(N) \hat{\mu}_j^{2N}(N) + 1]^{-1}.$$

При поступлении следующего  $(N+1)$ -го измерения  $y_j(N\tau)$  последующие оценки корректируются по формулам (18), (19), которые после преобразований равны

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_j(N+1) &= \hat{\mu}_j(N) + \alpha_j(N) W_{j3}(N) \delta_{j3}((N+1)\tau) [\delta_{j1}(N) - \delta_{j3}((N+1)\tau) \hat{\mu}_j(N)], \\ \hat{d}_{j0}(N+1) &= \hat{d}_{j0}(N) + \beta_j(N) [v_{11}(N) + v(N) \hat{\mu}_j^N(N) \cdot \\ &\quad \cdot [y_j(N\tau) - \hat{d}_{j0}(N) - \hat{\mu}_j^N(N) \hat{d}_{j1}(N)], \\ \hat{d}_{j1}(N+1) &= \hat{d}_{j1}(N) + \beta_j(N) [v(N) - v_{22}(N) \hat{\mu}_j^N(N) \cdot \\ &\quad \cdot [y_j(N\tau) - \hat{d}_{j0}(N) - \hat{\mu}_j^N(N) \hat{d}_{j1}(N)]. \end{aligned}$$

Алгоритм (20) с прогнозированием установившегося значения имеет вид

$$\Delta x_{j+2} = \Theta_1 \operatorname{sign} \{ [\hat{d}_{j+10}(N) - \hat{d}_{j0}(N)] \Delta x_{j+1} \}.$$

Здесь  $N$  номер измерения  $j$ -го отклика, обеспечивающего выполнение неравенства  $|\hat{\Phi}_j(N)/(N-2)| < \chi$ , либо  $|\hat{d}_{j0}(N)| < \chi$ .

Алгоритм (21) с вычислением разрыва первой производной имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta x_{j+2} &= \Theta_2 \operatorname{sign} \{ [\hat{d}_{j+1,1}(N) \hat{T}_{j+1}^{-1}(N) - \hat{d}_{j1}(N) \hat{T}_j^{-1}(N) \cdot \\ &\quad \cdot \exp(-((N-1)\tau + \tau_3))] \Delta x_{j+1} \}. \end{aligned}$$

Пример последовательного алгоритма с прогнозированием установившегося значения приведен в [15].

## 7. ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ УСКОРЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ\*)

При исследовании алгоритмов ускоренной оптимизации решались следующие задачи:

- определение влияния погрешности численного способа имитации текущих измерений выхода объекта и ошибок округления на погрешность вычисления  $\hat{T}_j$ ,  $\hat{d}_{j0}$  и характеристики поиска  $\tilde{N}_n$  – среднее число шагов из начального состояния до первого попадания в окрестность экстремума и  $\tilde{t}_n$  – среднее время поиска при  $\varphi(t) = 0$ ,  $T(t) = \text{const}$ ;
- определение влияния погрешности аппроксимации постоянной времени объекта кусочно-постоянными функциями на погрешность идентификации  $d_{j0}$  и характеристики поиска  $\tilde{N}_n$ ,  $\tilde{t}_n$  при  $\varphi(t) = 0$ ;
- определение влияния случайных возмущений в канале измерения выхода объекта  $\varphi(t) \neq 0$  на характеристики поиска  $\tilde{N}_n$ ,  $\tilde{t}_n$  при  $T(t) = \text{const}$ ,  $T(t) \neq \text{const}$ ;
- выбор правила окончания измерений на каждом шаге, обеспечивающего адаптивность алгоритма поиска по числу измерений выхода;
- исследование изменения характеристик поиска  $N_n$  числа шагов из начального состояния до первого попадания в окрестность экстремума и  $t_n$  времени поиска от  $\chi$  величины пороговой константы.

Для решения перечисленных задач была разработана программа для ЭВМ ЕС-1022, написанная на FORTRAN-IV. При ее отладке использовались библиотеки стандартных программ SSP (Scientific Subroutine Library) и HSL (Harwell Subroutine Library). Моделировался алгоритм с прогнозированием установившегося значения в отсутствии вертикального дрейфа, рассмотренный выше в примерах 1, 2. Исходные данные были выбраны следующими:  $f(x) = -x^2 + 20x - 10$ ,  $x \in [0, 20]$ ;  $x_0 = 1,0$ ,  $y_0 = 5,0 \neq f(x_0)$ ;  $|dx_j| = 1,0$ ;  $\tau_3 = 0,2$  сек;  $\varphi(t) \sim N(0, \sigma^2)$ .

При решении первой задачи было положено  $\sigma = 0$ ;  $T(t) = 5,0; 10,0$  с, а параметры вычислительного процесса  $\tau$ ,  $N$  варьировались в диапазонах  $\tau = 0,05 - 0,2$  с,  $N = 5 - 30$  измерений. Дифференциальное уравнение решалось методом Рунге-Кутты (программа RKGS), погрешность его решения задавалась равной  $10^{-3}$ . В результате моделирования было получено, что относительная погрешность  $\delta T_j = |T_j - \hat{T}_j| T_j^{-1} \cdot 10^2$  идентификации постоянной времени объекта не превосходит величины  $\delta T_j \leq 10^{-2}$  процента, а погрешность  $\delta d_{j0} = |d_{j0} - \hat{d}_{j0}| d_{j0}^{-1} \cdot 10^2$  идентификации установившегося значения соответственно величины  $\delta d_{j0} \leq 2 \cdot 10^{-2}$  процента. Наблюдалась высокая устойчивость вычислений. Моделирование методом статистических испытаний показало отсутствие ложных шагов в СЭУ. Таким образом при  $T(t) = \text{const}$  в выбранных

\*) Численные расчеты выполнены Зуевой Л. А.

диапазонах изменения  $\tau$ ,  $N$  ошибки численного способа решения дифференциального уравнения, имитирующего текущие измерения и ошибки округления мало влияют на погрешность идентификации  $\hat{T}_j, \hat{d}_{j0}$  и характеристики поиска и для дальнейшего анализа работоспособности СЭУ ими можно пренебречь.

При решении второй задачи были выбраны следующие исходные данные:  $\sigma = 0$ ;  $T(t) = 8 \cdot 10^{-4}t^2 - 5,5 \cdot 10^{-2}t + 6$ ;  $\tau = 0,2$  с, величина  $N$  варьировалась в диапазоне  $N = 4-30$ . Как и выше наблюдалась высокая устойчивость вычислений и отсутствие ложных шагов в системе. Последнее связано с тем, что с изменением  $j$  величины  $\delta d_{j0}$  не изменяет знака, поэтому при вычислении на каждом шаге приращения качества ошибки в определении  $\hat{d}_{j0}$  частично компенсируют друг друга.

При исследовании третьей группы задач было положено  $\sigma = 0,1 \cdot |y_j(i\tau) - y_j((i-1)\tau)|$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ , величина которой определялась по экспериментальным исследованиям на реальном объекте [5]. В результате моделирования поиска при  $T(t) = \text{const}$ ,  $T(t) \neq \text{const}$  выявилась существенная неустойчивость вычислений. Она проявлялась в получении отрицательных значений под знаком логарифма при вычислении  $\hat{T}_j$ , машинного нуля при вычислении определителя или сильно осциллирующих значений величин  $\hat{T}_j, \hat{d}_{j0}$ .

При выборе величины  $\tau$  из условия согласованности невязки установившегося значению с величиной  $\|d_{j0} - \hat{d}_{j0}\|_E^2 \simeq \sigma^2$  позволило устранить появление машинных нулей и отрицательных чисел под логарифмом. Варьирование величиной  $N$  при выбранном  $\tau$  уменьшило осцилляции в определении  $\hat{T}_j$  и как следствие этого число ложных шагов  $N_n$  в системе. Важной особенностью ускоренного алгоритма оптимизации является отсутствие требования высокой точности идентификации  $T_j$ . Результаты моделирования показывают, что при значительной средней величине  $\delta T_j = 30\%$  ( $N = 30$ ) ложные шаги в СЭУ отсутствуют.

При моделировании методом статистических испытаний исследовалось влияние процедуры сглаживания скользящим средним значений  $\hat{T}_j$  на величину  $\hat{i}_n$ . Их результаты представлены на рис. 4. Величина  $\hat{i}_n$  определялась из выражения

$$\hat{i}_n = (N\tau + \tau_3) \bar{N}_n.$$

На графике приняты обозначения: кривые 1 —  $T(t) \neq \text{const}$ , кривые 2 —  $T(t) = \text{const}$ , сплошные кривые соответствуют процедуре вычислений без сглаживания, пунктирные — со сглаживанием. Полученные зависимости показывают, что при оптимальном выборе  $N$  выигрыш от сглаживания в среднем составляет 9 процентов для случая  $T(t) \neq \text{const}$  и соответственно 11 процентов при  $T(t) = \text{const}$ .

При исследовании последних групп задач  $T(t)$  задавалась равной  $T(t) = 5$  с и анализировались осцилляции величин  $\hat{\Phi}_j(N)/(N-2), \hat{d}_{j0}(N)$  в зависимости от  $N$  на каждом  $j$ -ом шаге поиска. В качестве критерия сравнения колебательности

были выбраны величины

$$u_1 = \ln \left[ \frac{\max_N \hat{d}_{j_0}(N)}{\min_N \hat{d}_{j_0}(N)} \right],$$

$$u_2 = \ln \left\{ \frac{\max_N [\hat{\Phi}_j(N)/(N-2)]}{\min_N [\hat{\Phi}_j(N)/(N-2)]} \right\}.$$

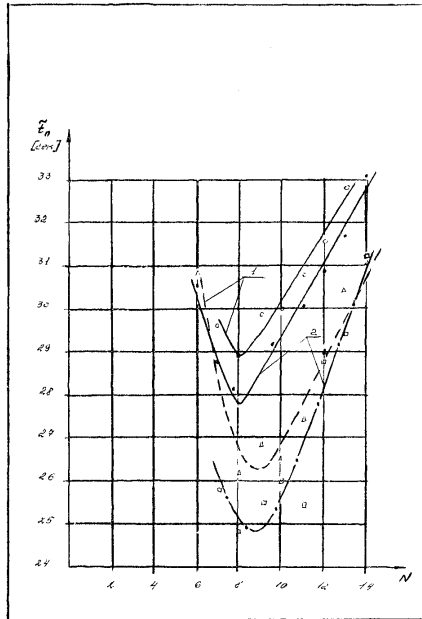


Рис. 4. Зависимость  $\bar{t}_n$  среднего времени поиска от  $N$  числа измерений выхода объекта  
 кривые 1 —  $T(t) \neq \text{const}$ , — — — без сглаживания, - - - - со сглаживанием;  
 кривые 2 —  $T(t) = \text{const}$ , — — — без сглаживания, - - - - со сглаживанием.

Моделирование показывает, что при идентификации установившегося значения осцилляции значительно меньше, чем при вычислении невязки, согласованной с погрешностью исходных данных. Поэтому в качестве условия окончания измерений на каждом шаге было выбрано правило  $|\hat{d}_{j_0}(N)| < \chi$ , где  $\chi$  — пороговая константа.

Методом статистических испытаний были получены зависимости  $\bar{N}_n(\chi)$ ,  $\bar{t}_n(\chi)$ ,

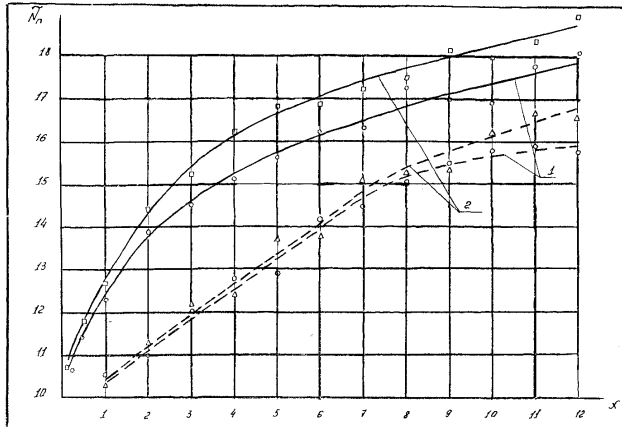


Рис. 5. Зависимость  $\bar{N}_n$  среднего числа поисковых шагов от величины  $x$  порога.  
 1 —  $T(t) = \text{const}$ , — без сглаживания, - - - со сглаживанием;  
 2 —  $T(t) \neq \text{const}$ , — без сглаживания, - - - со сглаживанием.

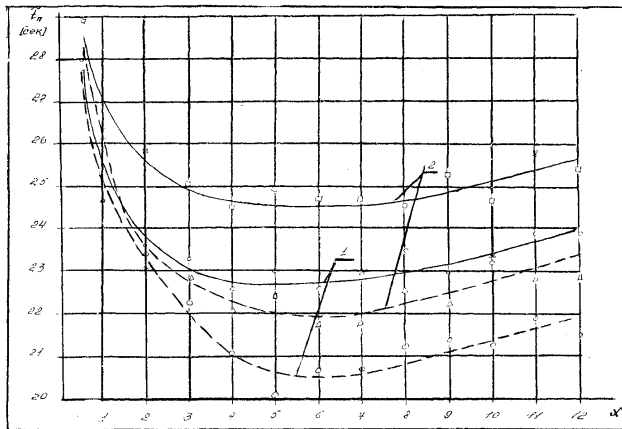


Рис. 6. Зависимость  $\bar{t}_n$  среднего времени поиска от величины  $x$  порога.  
 1 —  $T(t) = \text{const}$ , — без сглаживания, - - - со сглаживанием;  
 2 —  $T(t) \neq \text{const}$ , — без сглаживания, - - - со сглаживанием.

которые изображены соответственно на рис. 5, 6. Зависимости на рис. 6 указывают на существование  $\chi_{\text{опт}}$ , оптимального значения порога, при котором достигается максимальное быстродействие системы как при  $T(t) = \text{const}$ , так и при  $T(t) \neq \text{const}$ . Введение процедуры сглаживания скользящим средним увеличивает быстродействие системы. Сравнение зависимостей  $\bar{t}_n(N)$  рис. 4 с кривыми  $\bar{t}_n(\chi)$  рис. 6 показывает, что пороговый алгоритм увеличивает максимальное быстродействие системы. Выигрыш в быстродействии соответственно 14 процентов. Аналогичные цифры могут быть получены при  $T(t) \neq \text{const}$ , а также при введении сглаживания. Эффект в быстродействии очевидно получается за счет адаптивности системы. Она проявляется в автоматическом увеличении числа измерений при приближении к экстремуму характеристики объекта.

(Поступило в редакцию 1 декабря 1982 г.)

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. Казакевич, А. Родов: Системы автоматической оптимизации. Наука, Москва. 1977.
- [2] В. Казакевич, И. Мочалов: О количестве измерений при экстремальном управлении инерционными объектами первого порядка. Автоматика и телемеханика (1973), 10, 109—115.
- [3] В. Казакевич, И. Мочалов: Статистическое исследование некоторых алгоритмов управления инерционными объектами оптимизации при наличии дрейфа. Автоматика и телемеханика (1974), 11, 49—56.
- [4] В. Казакевич, И. Мочалов: О помехозащищенности некоторых типов систем экстремального управления. Известия ВУЗов. Приборостроение XVIII (1974), 7, 43—50.
- [5] В. Казакевич, И. Мочалов, Ю. Шербина: Применение статистических методов для исследования эффективности систем автоматической оптимизации горения топлива. Труды Ш-го Ленинградского симпозиума. „Теория адаптивных систем“. Наука, Москва 1977.
- [6] W. Perl: A method for curve-fitting by exponential function. International Journal of Applied Radiation and Isotope (1960), 8, 211—222.
- [7] D. Kammler: Prony's method for completely monotonic functions. Journal of Mathematical Analysis and Application 57 (1977), 560—570.
- [8] Р. Хэмминг: Численные методы. Наука, Москва 1972.
- [9] R. De Prony: Essai experimental et analytique sur les lois de la dilatabilite de fluides elastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alcool a differentes. Paris. L'Ecole Polytechnique (1795), 1, 24—76.
- [10] Е. В. Демиденко: Линейная и нелинейная регрессия. Финансы и статистика, Москва 1981.
- [11] О. Алифанов: Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. Машиностроение, Москва 1979.
- [12] Г. Башкина, Е. Клейман, И. Мочалов: Адаптивный алгоритм идентификации для систем с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика (1982), 1, 85—93.
- [13] Б. Шамриков, В. Фурсов: Оценивание достоверности параметрической идентификации объекта в адаптивных системах управления. Техническая кибернетика (1979), 6, 173—180.
- [14] А. Вальд: Последовательный анализ. Физматгиз, Москва 1960.
- [15] Вильям В. Казакевич, Иван А. Мочалов: Последовательные алгоритмы оптимизации. Кубнетика 17 (1981), 2, 140—146.
- [16] В. Казакевич, И. Мочалов: О последовательных алгоритмах ускоренного поиска экстре-

му в инерционных объектах оптимизации. Автоматика и телемеханика (1977), 1, 42—51.

- [17] В. Казакевич, И. Мочалов: О последовательном алгоритме ускоренного поиска экстремума в инерционных объектах оптимизации. Доклады Академии Наук СССР 226 (1976), 1, 77—80.
- [18] В. Казакевич, И. Мочалов: Адаптивный алгоритм регулирования инерционных объектов оптимизации с последовательным накоплением. Труды II-го Ленинградского симпозиума „Теория адаптивных систем“. Наука, Москва 1976, 73—79.

Проф. В. В. Казакевич, д.т.н. Всесоюзный заочный машиностроительный институт Министерства Высшего образования РСФСР. Москва, ул. Стрмынка, д. 32. СССР.

И. А. Мочалов, к.т.н., 113208, Москва, М - 208, Сумская ул., д. 6, корп. 2, кв. 241. СССР