Kybernetika

Petr Mandl

Anwendungen der Theorie der optimalen Regelungnichtabbrechender Diffusionsprozesse

Kybernetika, Vol. 1 (1965), No. 1, (28)--36

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/124845`

Terms of use:

© Institute of Information Theory and Automation AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

KYBERNETIKA ČÍSLO 1, ROČNÍK 1/1965

Anwendungen der Theorie der optimalen Regelung nichtabbrechender Diffusionsprozesse

PETR MANDL

In der vorliegenden Arbeit wird an konkreten Beispielen die praktische Anwendung der in [4] und [5] entwickelten Theorie der Regelung von nichtabbrechenden Diffusionsprozessen dargestellt und mit der Regelung abbrechender Prozesse verglichen.

Eindimensionaler homogener Diffusionsprozess im endlichen Intervall $I = \langle r_0, r_1 \rangle$ ist ein Zufallsprozess, $X(t)$ welcher sich im Innern von I als die Lösung der Differenzialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\,X(t)}{\mathrm{d}t} = b(X(t)) + \sqrt{[2a(X(t))]}\,\xi(t)$$

benimmt. Hier $a(x)$, $b(x)$ sind stetige Funktionen auf I, $a(x) > 0$. $b(x)$ wird Koeffizient der lokalen Verschiebung, $a(x)$ Diffusionskoeffizient genannt. $\xi(t)$ ist weißes Rauschen, dessen Spektraldichte gleich eins vorausgesetzt wird. Erreicht $X(t)$ eine der Grenzen von I, so kann der Prozess abbrechen, oder sind verschiedene Typen der Fortsetzung von $X(t)$ möglich. Im Folgenden wird nur der Fall vorkommen, daß nach der Erreichung der Grenze r_i, $i = 0, 1$, $X(t)$ in einem zufälligen Punkt wieder seinen Anfang nimmt. Der Punkt sei mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_i(x)$ verteilt. $f_i(x) = \delta(x - x_i)$, wo $\delta(x)$ die Diracsche Funktion ist, bedeutet, daß $X(t)$ nach der Erreichung von r_i jedesmal im Punkt x_i fortsetzt.

1. Um ein konkretes Problem vor Augen zu haben, betrachten wir die auf Bild 1 schematisch gezeichnete Anlage A. Auf einem Stadium der Produktion wird eine Flüssigkeit F erzeugt und zwar nicht ganz regelmässig mit der Intensität gleich einer Menge μ pro Zeiteinheit, sondern mit einer Intensität, welche zufälligen Schwankungen unterworfen ist. Die Schwankungen sollen mit genügender Annäherung die Form $\sqrt{(2D)}\,\xi(t)$ besitzen. Dagegen der weitere Produktionsprozess erfordert regelmäßigen Zufluß einer Menge μ von F pro Zeiteinheit. Man hat also den Regulationsbehälter R mit der Pumpe zum Hauptbehälter P in die Leitung eingegliedert. Die

Einheiten seien so gewählt, daß $\mu = 1$ und daß das Volumen von R gleich zwei ist. Die Gesamtmenge von F welche R verlassen hat, kann also die Rolle des Zeitparameters spielen. Es sei $X(t)$ die Größe um welche der Zustand von F im R vom

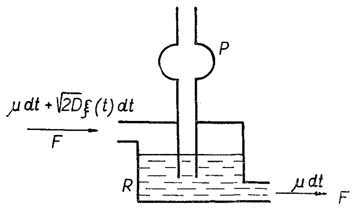

Bild 1.

Werte 1 abweicht. $X(t)$ bewegt sich im Intervall $\langle -1, 1 \rangle$. Die Arbeitsleistung von P sei dem Werte von $X(t)$ proportional. Dann erfüllt $X(t)$ die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t) = -h\, X(t) + \sqrt{(2D)}\, \xi(t)\,,$$

wo h, D positive Konstanten sind. Wird R ganz voll oder leer d.h. $X(t) = \pm 1$, so wird die Produktion aufgehalten, der Zustand im R wird gleich eins gemacht und die Produktion wieder fortgesetzt. Es ist also $f_i(x) = \delta(x)$.

Betrachten wir durchschnittliche Kosten, welche in der Anlage A auf eine Einheitsmenge von F entstehen. Die durch Aufhalten der Produktion und Einstellen des Zustandes 1 im R verursachten Kosten seien N. Die Ausgaben auf P seien der Leistung proportional. $\Theta(t)$ bezeichne die Kosten die bei der Produktion der ersten t Einheiten von F in A entstanden und $E(t)$ die Anzahl der dabei erfolgten Produktionsunterbrechungen. Man hat, da die Leistung von P proportional $X(t)$ ist,

$$\Theta(t) = k \int_0^t |X(\tau)|\, \mathrm{d}\tau + N E(t)\,.$$

Der Grenzwert

$$\Theta = \lim_{t \to \infty} t^{-1}\, \Theta(t)$$

stellt die durchschnittlichen Kosten in der Anlage A dar.

Wir kehren jetzt dem allgemeinen am Anfang definierten Diffusionsprozess zu und formulieren einen Satz, der die Berechnung von Θ ermöglicht. Wir setzen voraus, daß die Ausgaben durch drei Funktionen $c(x)$, $v_0(x)$ und $v_1(x)$ definiert sind. Dabei $c(x)$ soll stetig in I sein und es soll

$$\int_{r_0}^{r_1} |v_i(x)|\, f_i(x)\, \mathrm{d}x < \infty\,, \quad i = 0, 1\,,$$

gelten. Nimmt $X(t)$ für die Zeit $\mathrm{d}t$ den Wert x an, so entsteht die Ausgabe $c(x)\,\mathrm{d}t$. Dieser Teil der Kosten ist also bis zur Zeit t gleich $\int_0^t c(X(\tau))\,\mathrm{d}\tau$. Erreicht $X(t)$ die Grenze r_i und beginnt wieder im Punkt x, so wird die Ausgabe $v_i(x)$ verursacht. Die durchschnittlichen Kosten pro Zeiteinheit Θ werden durch folgenden Satz charakterisiert.

Satz 1. *Θ ist die einzige Zahl, für welche die Gleichung*

$$a(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}w + b(x)\,w - \Theta + c(x) = 0\,, \tag{1}$$

eine Lösung $w(x)$, die die Bedingungen

$$\int_{r_0}^{r_1}\left(\int_{r_0}^{x} w(s)\,\mathrm{d}s + v_0(x)\right) f_0(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \tag{2}$$

$$\int_{r_0}^{r_1}\left(\int_{x}^{r_1} w(s)\,\mathrm{d}s - v_1(x)\right) f_1(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \tag{3}$$

erfüllt, besitzt.

Wir setzen

$$Q(x) = \exp\int_{r_0}^{x} b(s)\,a(s)^{-1}\,\mathrm{d}s\,.$$

Jede Lösung der Gleichung (1) hat die Form

$$Q(x)^{-1}\int_{r_0}^{x} a(s)^{-1}\,Q(s)\,(c(s) - \Theta)\,\mathrm{d}s + kQ(x)^{-1}\,. \tag{4}$$

Das Einsetzen von (4) in (2) (3) ergibt zwei lineare Gleichungen, durch welche die Unbekannten, k, Θ, eindeutig bestimmt sind.

Wir berechnen Θ für die oben beschriebene Anlage A. Die Gleichung (1) und die Bedingungen (2), (3) haben die Form

$$D\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}w - hxw - \Theta + k|x| = 0\,,$$

$$\int_{-1}^{0} w(s)\,\mathrm{d}s = -N\,, \quad \int_{0}^{1} w(s)\,\mathrm{d}s = N\,.$$

Da aus der Symmetrie folgt $w(0) = 0$, so findet man leicht

$$\Theta = D\left[\int_0^1 e^{\bar{h}x^2}\int_0^x e^{-\bar{h}y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right]^{-1}\left[N + \frac{k}{h}\left(\int_0^1 e^{\bar{h}x^2}\,\mathrm{d}x - 1\right)\right]$$

mit $\bar{h} = h/(2D)$.

Naheliegend ist jetzt die Frage, ob sich die Kosten in der Anlage A vermindern, wenn man für die Leistung von P eine andere als lineare Funktion wählt. Es sei

$\langle -\omega, \omega\rangle$ das Intervall, wo sich die Leistung von P, welche den Parameter der Regelung z darstellt, bewegen kann. Eine Regelung ist eine stetige Funktion $z(x)$, welche den Wert von z angibt, wenn der Zustand im R um x vom mittleren Zustand eins abweicht. Die Differentialgleichung für $X(t)$ hat dann die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t) = -z(X(t)) + \sqrt{(2D)}\,\xi(t)$$

und die entsprechende Kostenfunktion ist $c(x) = kz(x)$.

Im allgemeinen Fall formuliert sich das Problem der Regelung folgendermaßen. Es sind drei stetige Funktionen $a(x, z) > 0$, $b(x, z)$, $c(x, z)$ für $x \in I$, $z \in J = \langle z_0, z_1\rangle$ angegeben. Durch die Wahl einer Regelung $z(x)$ entsteht ein Prozess, welcher die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\,X(t)}{\mathrm{d}t} = b(X(t), z(X(t))) + \sqrt{[2a(X(t), z(X(t)))]}\,\xi(t)$$

erfüllt. Die Ausgaben sind durch die Funktionen $c(x, z(x))$, $v_0(x)$, $v_1(x)$ beschrieben. Jeder Wahl einer Regelung entsprechen durchschnittliche, durch den Verlauf des Prozesses verursachte, Kosten. Das Infimum dieser Kosten über alle möglichen Regelungen sei mit $\hat{\Theta}$ bezeichnet. $\hat{\Theta}$ läßt sich mit Hilfe vom Satz 2 bestimmen.

Satz 2. *$\hat{\Theta}$ ist die einzige Zahl, für welche die Gleichung*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w + \min_{z\in J} a(x, z)^{-1}\,[b(x, z)\,w - \hat{\Theta} + c(x, z)] = 0 \tag{5}$$

eine, den Bedingungen (2), (3) *genügende, Lösung $w(x)$ besitzt.*

Die Funktion $\hat{z}(x)$ die solche Werte annimmt, für welche $a(x, z)^{-1}\,[b(x, z)\,w(x) - \hat{\Theta} + c(x, z)]$ minimal ist, braucht nicht stetig sein. Ist $\hat{z}(x)$ stetig, so folgt aus Satz 1, daß $\hat{z}(x)$ eine optimale Regelung ist. Wir bezeichnen

$$\Phi(x, w; \hat{\Theta}) = -\min_{z\in J} a(x, z)^{-1}\,[b(x, z)\,w - \hat{\Theta} + c(x, z)]\,.$$

Dann läßt sich (5) als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w = \Phi(x, w; \hat{\Theta})\,, \tag{6}$$

schreiben.

Untersuchen wir jetzt $\hat{\Theta}$ für die Anlage A. Man hat $I = \langle -\omega, \omega\rangle$, $a(x, z) \equiv D$, $b(x, z) = z$, $c(x, z) = k|z|$. Folglich

$$\Phi(x, w; \hat{\Theta}) = \begin{cases} D^{-1}[\omega(w - k) + \hat{\Theta}] & \text{für} \quad w \geqq k, \quad \hat{z}(x) = -\omega\,, \\ D^{-1}\hat{\Theta} & \text{für} \quad |w| \leqq k, \quad \hat{z}(x) = 0\,, \\ D^{-1}[\omega(-w - k) + \hat{\Theta}] & \text{für} \quad w \leqq -k, \quad \hat{z}(x) = \omega\,. \end{cases} \tag{7}$$

 Ferner (2), (3) gibt

$$\int_0^1 w(s)\,\mathrm{d}s = N = -\int_0^1 w(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Aus der Symmetrie folgt $w(0) = 0$. Wir werden $w(x)$ für $x \in \langle 0, 1\rangle$ untersuchen Wir setzen $\bar{\Theta} = D^{-1}\hat{\Theta}$, $\bar{\omega} = D^{-1}\omega$. Aus (6) und (7) bekommt man

$$w(x) = \bar{\Theta}x \quad \text{für} \quad x \in \langle 0, k/\bar{\Theta}\rangle\,,$$

$$w(x) = k - \bar{\Theta}/\bar{\omega} + (\bar{\Theta}/\bar{\omega})\, e^{\bar{\omega}(x - k/\bar{\Theta})} \quad \text{für} \quad x \geqq k/\bar{\Theta}\,.$$

Ist $k/\bar{\Theta} \geqq 1$, so hat man

$$\int_0^1 w(s)\,\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\bar{\Theta} = N\,.$$

Also $k \geqq 2N$. In diesem Fall ist die Benutzung von P nicht einträglich. Ist $k < 2N$, so ergibt sich $\bar{\Theta}$ aus der Gleichung

$$\int_0^1 w(s)\,\mathrm{d}s = k^2/(2\bar{\Theta}) + (k - \bar{\Theta}/\bar{\omega})(1 - k/\bar{\Theta}) +$$

$$+ (\bar{\Theta}/\bar{\omega}^2)\left(e^{\bar{\omega}(1 - k/\bar{\Theta})} - 1\right) = N\,.$$

Die optimale Regelung ist für $|X(t)| < k\,/\,\bar{\Theta}\ P$ zu ausschalten und beim Durchgang von $X(t)$ durch $\pm\ k\,/\,\bar{\Theta}\ P$ so schnell wie möglich auf die höchste Leistung in Betrieb zu setzen.

Wir werden jetzt voraussetzen, daß die Kosten für den Betrieb von P nicht der Leistung, sondern ihrem Quadrat proportional sind, d.h. $c(x, z) = kz^2$. Man findet, daß dann ist

$$\Phi(x, w; \hat{\Theta}) = w^2\,/\,4kD + \hat{\Theta}\,/\,D \quad \text{für} \quad |w| \leqq 2k\omega\,.$$

Dabei ist

(8) $$\hat{z}(x) = -w(x)\,/\,(2k)\,.$$

Man bekommt aus (6) und der Bedingung $w(0) = 0$

(9) $$w(x) = 2D^{-1}\sqrt{(\hat{\Theta}/k)}\,\mathrm{tg}\left(\tfrac{1}{2}D^{-1}\sqrt{(\hat{\Theta}/k)}x\right).$$

Folglich

$$\int_0^1 w(s)\,\mathrm{d}s = -4\ln\cos\left(\tfrac{1}{2}D^{-1}\sqrt{(\hat{\Theta}/k)}\right) = N\,,$$

(10) $$\hat{\Theta} = k[2D\arccos(e^{-N/4})]^2\,.$$

Die Bedingung $|w| \leqq 2k\omega$ ist erfüllt, wenn $\arccos\,(e^{-N/4}) \leqq \eta$ ist. Hier ist η die Lösung der Gleichung $\eta\,\mathrm{tg}\,\eta = \frac{1}{2}k\omega$. Dann ist die optimale Regelung für alle x durch (8) und (9) gegeben.

2. Als zweites Beispiel wird die Regelung eines Verzweigungsprozesses dienen. Betrachten wir eine Kultur von Mikroorganismen in einem Gefäß. Es sei $X(t)$ die Dichte (oder das Gesamtgewicht) der Mikroorganismen in der Nahrlösung. In einfachen Fällen gibt die Voraussetzung, daß $X(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\,X(t)}{\mathrm{d}t} = \beta\, X(t) + \sqrt{(2\alpha\, X(t))}\, \xi(t) \tag{11}$$

genügt, ein befriedigendes mathematisches Modell der Kultivation. Hier α, β sind Konstanten, $\alpha > 0$ ([1]). Aus (11) folgt, daß β den mittleren relativen Zuwachs von $X(t)$ darstellt. Wir werden $\beta \geqq 0$ voraussetzen.

Die Kultivation soll fogendermaßen verlaufen. Erreicht die Dichte der Kultur die Größe r_1, so wird der Prozess beendet und entsteht ein Erzeugniss, das den Wert N_1 besitzt. Erreicht dagegen $X(t)$ eine Grenze $r_0 > 0$, d.h. die Verdünnung wird so groß, daß man von einer Degeneration der Kultur sprechen kann, so beginnt man mit einer neuen Kultur welche die Anfangsdichte ϱ, $r_0 < \varrho < r_1$, besitzen soll. Die Kosten der Einsetzung einer neuen Kultur seien N_0.

Setzen wir voraus, daß sich der mittlere relative Zuwachs β durch Einführung vom zusätzlichen Nährstoff Z um die Größe z $z \in \langle 0, \omega \rangle$ steigern läßt. Dabei sei das Resultat der eingeführten Menge von Z im folgenden Sinne proportional. Um β um z während der Zeit $\mathrm{d}t$ zu vergrößern, muß man die Menge $k_0 z\, X(t)\, \mathrm{d}t$ in derselben Zeit einliefern. Die entstandenen Kosten seien $kz\, X(t)\, \mathrm{d}t$. Wir stellen uns die Frage, wie man den Zufluß von Z regeln soll, um die Kultivation mit niedrigsten Kosten durchzuführen. In den im Punkt 1 erklärten Bezeichnungen haben wir

$$a(x, z) = \alpha x\,, \quad b(x, z) = (\beta + z)\, x\,, \quad c(x, z) = k\, xz\,.$$

Da wir auch die einmalige Herstellung der Kultur untersuchen wollen, so modifizieren wir die Bedingungen unter welchen Sätze 1, 2 abgeleitet wurden. Wir setzen voraus:

A. Nach der Erreichung der Grenze r_1 bricht der Prozess ab und es entstehen die Kosten N_1. Nach der Erreichung der Grenze r_0 beginnt der Prozess mit der Anfangsdichte $f_0(x)$ und Kostenfunktion $v_0(x)$.

B. Der Prozess bricht auf beiden Grenzen ab. Die Kosten sind N_0 auf r_0, N_1 auf r_1.

Der Fall B wurde eingehend auch für mehrdimensionale und inhomogene Diffusionsprozesse in den Arbeiten [2], [3], analysiert. Die Arbeit [6] verallgemeinert die Resultate von [2] in der Richtung, daß man ein allgemeines Verhalten des Prozesses auf den Grenzen zuläßt.

Da unter den Bedingungen A, B, der Prozess mit Sicherheit in einem (zufälligen) Zeitmoment τ abbricht, so sind die erwarteten Gesamtkosten bis zu dieser Zeit vom Interesse. Sie hängen von der Anfangslage $X(0) = x$ des Prozesses ab und werden mit $u(x)$ bezeichnet. Ein Analogon zu Satz 1 ist Satz 3.

Satz 3. *Man hat*

$$u(x) = N_1 + \int_x^{r_1} w(s)\, \mathrm{d}s\,,$$

 wo $w(x)$ die einzige Lösung der Gleichung

$$a(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w + b(x)\, w + c(x) = 0$$

ist, welche im Falle A der Bedingung

$$\int_{r_0}^{r_1} \left(\int_{r_0}^{x} w(s)\, \mathrm{d}s + v_0(x) \right) f_0(x)\, \mathrm{d}x = 0\,, \tag{12 A}$$

im Falle B der Bedingung

$$\int_{r_0}^{r_1} w(s)\, \mathrm{d}s = N_0 - N_1 \tag{12 B}$$

genügt.

Das Infimum von $u(x)$ über alle möglichen Regelungen wird mit $\hat{u}(x)$ bezeichnet. Satz 2 entspricht folgender Satz.

Satz 4. *Man hat*

$$\hat{u}(x) = N_1 + \int_{x}^{r_1} w(s)\, \mathrm{d}s\,,$$

wo $w(x)$ die einzige Lösung der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w + \min_{z \in J} a(x, z)^{-1} \left[b(x, z)\, w + c(x, z) \right] = 0 \tag{13}$$

ist, welche den Bedingungen (12 A), *bzw.* (12 B) *genügt.*

Über die Funktion $\hat{z}(x)$ läßt sich dieselbe Bemerkung wie nach Satz 2 machen.

Wenden wir jetzt den Satz 4 auf das oben formulierte Problem der Kultivation von Mikroorganismen an. Man hat

$$I = \langle 0, \omega \rangle\,, \quad a(x, z) = \alpha x\,, \quad b(x, z) = (\beta + z)\, x\,,$$

$$c(x, z) = kxz\,, \quad f_0(x) = \delta(x - \varrho)\,, \quad v_0(\varrho) = N_0\,.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\alpha = 1$ voraussetzen. Die Einsetzung in (13) und (12 A) ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w = -(\omega + \beta)\, w - \omega k \quad \text{für} \quad w \leqq -k,\ \hat{z}(x) = \omega\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \omega = -\beta w \quad \text{für} \quad w \geqq -k,\ \hat{z}(x) = 0\,,$$

$$-\int_{r_0}^{\varrho} w(s)\, \mathrm{d}s = N_0\,. \tag{14}$$

Bezeichnen wir mit y den Punkt in welchem $w(y) = -k$ ist. Dann y ist die Dichte von Mikroorganismen bei der die Einführung von Z ausgeschaltet werden soll. Man hat

$$w(x) = -\frac{\omega k}{\beta + \omega} - \frac{\beta k}{\beta + \omega} e^{-(\beta+\omega)(x-y)} \quad \text{für} \quad x \leqq y\,,$$

$$w(x) = -ke^{-\beta(x-y)} \quad \text{für} \quad x \geqq y\,.$$

Setzen wir voraus, daß $r_0 < y < \varrho$ ist. Die Gleichung (14) für die Bestimmung von y ist dann

$$(15) \quad \frac{\beta k}{(\beta+\omega)^2}\left[e^{(\beta+\omega)(y-r_0)} - 1\right] + \frac{\omega k}{\beta+\omega}(y - r_0) + \frac{k}{\beta}\left[1 - e^{-\beta(\varrho-y)}\right] = N_0\,.$$

Bezeichnen wir den Wert des Ausdruckes auf der rechten Seite von (15) für $y = r_0$ durch A, für $y = \varrho$ durch B. Ist $A < N_0 < B$, so ist tatsächlich $r_0 < y < \varrho$. Ist $N_0 \leqq A$, so ist die Regelung $\hat{z}(x) \equiv 0$ optimal d.h. die zusätzliche Nährung ist nicht einträglich. Die Ungleichung $N_0 > B$ zieht nach sich $y > \varrho$. (14) wird dann

$$(16) \quad \frac{\beta k}{(\beta+\omega)^2} e^{(\beta+\omega)y}\left[e^{-(\beta+\omega)r_0} - e^{-(\beta+\omega)\varrho}\right] + \frac{\omega k}{\beta+\omega}(\varrho - r_0) = N_0\,.$$

Besitzt (16) in (ϱ, r_1) keine Lösung, so ist $\hat{z}(x) \equiv \omega$ die optimale Regelung.

Betrachten wir jetzt die wiederholte Herstellung von Kulturen die wir mit geringsten Kosten durchführen wollen. Aus Satz 2 bekommt man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w + (\omega + \beta)\, w = \omega k + \hat{\Theta} x^{-1} \quad \text{für} \quad w \leqq -k,\ \hat{z}(x) = \omega\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w + \beta w = \hat{\Theta} x^{-1} \quad \text{für} \quad w \geqq -k,\ \hat{z}(x) = 0\,,$$

$$(17) \qquad \int_{r_0}^{\varrho} w(s)\,\mathrm{d}s = -N_0\,, \quad \int_{\varrho}^{r_1} w(s)\,\mathrm{d}s = N_1\,.$$

Man kann wie im vorhergehenden Absatze fortschreiten. Die beiden Gleichungen (17) sind linear für $\hat{\Theta}$. Die Elimination von $\hat{\Theta}$ führt zu einer transzendenten Gleichung für den Umschaltungspunkt y.

(Eingegangen am 26. Mai 1964.)

LITERATUR

[1] W. Feller: Diffusion processes in genetics. Proc. 2nd Berkeley Symp. on Math. Stat. (1951), 227—246.

[2] W. H. Fleming: Some markovian optimisation problems. J. of Math. and Mech. 12 (1963), 131—140.

[3] И. В. Гирсанов: Минимаксные задачи в теории диффузионных процессов. ДАН СССР 136 (1961), 761–764.
[4] P. Mandl: On optimal control of a nonstopped diffusion process. Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie u. verw. G. (im Druck).
[5] П. Мандл: Об управлении необрывающимися диффузионными процессами. Теория вероятностей и ее прим. 9 (1964), 644–669.
[6] P. Mandl: O optimálním řízení jednorozměrných difusních procesů. Aplikace matematiky 9 (1964), 412–420.

VÝTAH

Použití teorie optimálního řízení nepřetržitých difúzních procesů

PETR MANDL

Práce je věnována optimálnímu řízení veličiny $X(t)$, která se uvnitř intervalu $I = \langle r_1, r_2 \rangle$, chová jako řešení diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\,X(t)}{\mathrm{d}t} = b(X(t)) + \sqrt{[2a(X(t))]}\,\xi(t)\,,$$

kde $\xi(t)$ je bílý šum. Řízení spočívá v upravování koeficientů a, b v závislosti na hodnotě řízené veličiny. Po dosažení hranic proces začne znovu v některém z vnitřních bodů intervalu I.

S veličinou $X(t)$ jsou spojeny náklady, které závisí jednak na jejím průběhu v I, jednak na počtu obnovení procesu po dosažení hranic. Cílem řízení je minimalizace průměrných nákladů na jednotku času. Na příkladě regulační nádrže s čerpadlem a na příkladě dodávání živných látek kultuře mikroorganismů je vyjasněna formulace úlohy a vyloženo praktické použití teorie, obsažené v autorových pracích [4], [5]. Pro srovnání je také rozebrán případ, kdy se proces $X(t)$ po dosažení hranice zastaví.

Petr Mandl, CSc., Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.