Kybernetika

Valerii F. Kudin

Аналитическое конструирование нелинейных цифровых регуляторов на основе неквадратичного функционала

Kybernetika, Vol. 26 (1990), No. 6, 484--495

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/124836`

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ НА ОСНОВЕ НЕКВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

ВАЛЕРИЙ Ф. КУДИН

В статье разработана приближенная процедуры аналитического конструирования нелинейных цифровых регуляторов для неквадратичных относительно фазовых координат функционалов.

Решение задачи синтеза цифровых регуляторов опирается на формализм метода динамического программирования, который позволяет получить приближенное уравнение в частных производных для дискретных систем, являющееся аналогом уравнения Беллмана-Ляпунова для непрерывных систем. Найден новый вид функции, оценивающей управляющее воздействие, и позволяющей найти решение задачи синтеза в замкнутой форме.

Рассмотрен пример.

1. Введение и постановка задачи

К настоящему времени осущевтвлена фундаментальная разработка проблемы аналитического контруирования (АК) линейных цифровых регуляторов и эти результаты обобщены в [1–4]. В этих работах сформулированы основные результаты по синтезу линейных цифровых регуляторов на основе минимизации квадратичного функционала.

Имеется ряд публикаций, посвященных проблеме нелинейного синтеза для цифровых систем, в которых используется процедура численной оптимизации [5, 6].

Однако существует весьма ограниченное число работ [1, 7], в которых бы давалось аналитическое решение задач нелинейного синтеза для дискретных систем и в целом данная проблема остается мало исследованной.

В данной статье предлагается приближенное решение задач АК нелинейного цифрового регулятора для линейной дискретной системы и неквадратичного функционала, содержащего формы высокой степени относительно фазовых координат.

Исследование задачи АК с подобными неквадратичными функционалами для непрерывных систем было впервые осуществлено в работах [8 – 10], – для цифровых систем подобные исследования отсутствуют.

Решение задачи синтеза нелинейного цифрового регулятора основывается на формализме метода динамического программирования, использующего уравнение Беллмана в частных производных и позволяет обеспечить быстрое затухание переходного процесса в замкнутой цифровой системе.

Пусть возмущенное движение дискретной системы описывается системой разностных уравнений.

$$x(n+1) = A\,x(n) + b\,u(n)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

где $x - m$ – мерный вектор состояния фазовых координат, u – управляющее воздействие, принадлежащее открытому множеству, A – матрица $(m \times m)$, b – матрица-столбец $(m \times 1)$. Кроме того матрицы A, b таковы, что (1.1) управляема. Задан минимизируемый функционал

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \left[W(x) + \omega(u, x) \right], \tag{1.2}$$

где $W(x)$ – положительно определенная неквадратичная функция, оценивающая качество переходного процесса, функция $\omega(u, x)$ оценивает управляющее воздействие. Функция $W(x)$, определяющая качество переходного процесса, определяется соотношением в виде полинома

$$W(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{1i} x_i^2 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{2i} x_i^4\,. \tag{1.3}$$

Использование такой оценки позволяет улучшить динамическую точность замкнутой системы управления, т. к. предложенная функция (1.2) обладает большой чувствительностью к большим ошибкам в течение переходного процесса, поскольку сильнее штрафуются большие отклонения координат в течение переходного процесса, чем малые.

В целом, используемый неквадратичный функционал аппроксимирует известный критерий минимума максимального отклонения от положения равновесия [11]. Вид функции $\omega(u, x)$ необходимо определить.

Таким образом, подлежит решению следующая задача:

Задана дискретная модель управляемого объекта (1.1) и неквадратичный минимизируемый функционал (1.2), (1.3). Необходимо найти функцию $\omega(u, x)$, позволяющую осуществить решение задачи АК в замкнутой форме и отвечающую физическому содержанию задачи минимакса. Полученый закон управления должен обеспечивать асимптотическую устойчивость (1.1) и доставлять минимум функционалу (1.2).

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ

Рассмотрим сначала решение поставленной нелинейной задачи АК на примере системы первого порядка, используя функциональное уравнение Беллмана в частных производных [1].

Вывод уравнения осуществлен в Приложении.

Тогда для управляемого объекта, возмущенное движение которого описывается разностным уравнением

$$x(n+1) = a\,x(n) + b\,u(n)\,, \quad x(0) = x_0 \tag{2.1}$$

и неквадратичного функционала

$$\min_u I = \sum_{n=0}^{\infty} [W(x) + \omega(u, x)] \tag{2.2}$$

имеем функциональное уравнение Беллмана первого приближения

$$\min_u \left[\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4 + \omega(u, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(a_1 x + bu) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a_1 x + bu)^2\right] = 0\,; \quad a_1 = a - 1\,. \tag{2.3}$$

Пусть функция $\omega(u, x)$ определяется соотношением $\omega(u, x) = Cu^2$. Тогда получаем оптимальное управление

$$u(x) = -\frac{b}{2C_1(x)}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} a_1 x\right) \tag{2.4}$$

где $C_1(x) = c + (b^2/2)(\partial^2 V/\partial x^2)$ – обобщенная весовая константа. Подставляя (2.4) в (2.3), получаем уравнение Беллмана-Ляпунова в частных производных в замкнутой форме для дискретных систем

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4 + \frac{\partial V}{\partial x} a_1 x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a_1 x)^2 =$$
$$= \frac{b^2}{4C_1(x)}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} a_1 x\right)^2. \tag{2.5}$$

Полученное уравнение, определяющее искомую оптимальную функцию Беллмана-Ляпунова, является аналогом известного уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для непрерывных систем. Структура уравнения (2.5) аналогична непрерывному случаю, однако обобщенная весовая константа $C_1(x)$ зависит от переменной состояния, т. к. $V(x)$ неквадратичная функция.

Остановимся теперь на проблеме обоснования и выбора функции $\omega(u, x)$ для уравнения Беллмана первого приближения.

Осуществим эквивалентное преобразование функции оценки управляющего воздействия и представим ее в следующем виде

$$\omega_1(u, x) = C_1(x)\, u^2 - \frac{b^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} u^2 = cu^2 . \tag{2.6}$$

Подобная форма записи функции оценки управления позволяет выделить обобщенную весовую константу в минимизируемом функционале и использовать аналогию с непрерывными системами при формировании функционала. Заметим, что функция оценки $\omega_1(u, x)$ является полуопределенной , т. е. зависит от параметров функции Ляпунова даже в линейном случае.

Если использовать выражение обобщенной весовой константы для квадратичного функционала, то выражение $\omega_1(u, x)$ трансформируется в функцию

$$\omega_1'(u, x) = C_1 u^2 - \frac{b^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} u^2 ,$$

где $C_1 = c + \frac{1}{2} b^2\, \partial^2 V/\partial x^2$. Здесь $V(x)$ – квадратичная функция Ляпунова. соответству ющая решению линейной квадратичной задачи.

Тогда уравнение Беллман-Ляпунова (2.5) трансформируется и определяется соотношением

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4 + \frac{\partial V}{\partial x} a_1 x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a_1 x)^2 =$$

$$= \frac{b^2}{4C_1}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} a_1 x\right)^2 \tag{2.7}$$

Сравнение функций $\omega_1(u, x)$ и $\omega_1'(u, x)$ говорит о том, что $\omega_1(u, x)$ сохраняет положительную знакоопределенность при любых u и x. Функция же $\omega_1'(u, x)$ сохраняет положительную знакоопределенность только в „малом".

При достаточно больших значениях x функция $V(x)$, определяемая уравнением (2.7), не обладает свойствами функции Ляпунова, хотя процедура решения задачи синтеза обладает большей вычислительной простотой.

Рассмотрим теперь решение задачи АК и проблему выбора функции $\omega(u, x)$ исходя из функционального уравнения Беллмана второго приближения.

Для уравнения (2.1) и неквадратичного функционала (2.2) уравнение Беллмана имеет вид

$$\min_u \left[\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4 + \omega_2(u, x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x}(a_1 x + bu) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a_1 x + bu)^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(a_1 x + bu)^3\right] = 0 \tag{2.8}$$

Функция оценки управляющего воздействия, позволяющая получить решение задачи АКОР в замкнутом виде, определяется следующим соотношением

$$\omega_2(u, x) = C_1(x)\,u^2 - \frac{b^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\,a_1 x\right)u^2 - \frac{b^3}{6}\,\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\,u^3 \tag{2.9}$$

Процедура минимизации (2.8) приводит к оптимальному управлению

$$u(x) = -\frac{b}{2C_1(x)}\left[\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,a_1 x + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\,(a_1 x)^2\right], \tag{2.10}$$

где обобщенная весовая константа определяется уже выражением вида

$$C_1(x) = c + \frac{b^2}{2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{b^2}{2}\,\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\,a_1 x\,. \tag{2.11}$$

Подставляя (2.10) в (2.8) приходим к уравнению Беллмана-Ляпунова второго приближения в замкнутой форме.

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4 + \frac{\partial V}{\partial x}\,a_1 x + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,(a_1 x)^2 + \frac{1}{6}\,\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\,(a_1 x)^3 =$$

$$= \frac{b^2}{4C_1(x)}\left[\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,a_1 x + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\,(a_1 x)^2\right]^2 \tag{2.12}$$

Подобные соотношения для $\omega(u, x)$ и $C_1(x)$ и соответствующую процедуру АКОР можно получить, опираясь на функциональное уравнение Беллмана третьего приближения. Однако, на этом останавливатьця не будем.

Таким образом, решение задачи АК позволяет получить следующуй результат.

Для заданной модели управляемого объекта (1.1) и функционала (1.2), (2.6) нелинейное управление (2.4) является решением задачи АК по минимизации минимума максимальнофо отклонения в том случае, если функция $\omega(u, x)$ определяется соотношением (2.6).

Общего метода решения нелинейного уравнения (2.7) не существует. Поэтому решение уравнения аппроксимируем степенным рядом

$$V(x) = K_1 x^2 + K_2 x^4 + K_3 x^6 + \ldots \tag{2.13}$$

Коэффициент K_1 определяется нелинейным уравнением Риккати

$$d_0 K_1^2 - d_1 K_1 - d_2 = 0\,, \tag{2.13а}$$

где $d_0 = b^2$; $d_1 = \alpha_1 b^2 + 2ca_1 + C_1 a_1^2$; $d_2 = \alpha_1 c$, а K_2 – линейным алгебраическим уравнением

$$m_0 + m_1 K_1 + m_2 K_2 = m_{12} K_1 K_2\,, \tag{2.13б}$$

где $m_0 = \alpha_2 c$; $m_2 = 4a_1 c + 6a_1^2 c + 6\alpha_1 b^2$; $m_1 = \alpha_2 b^2$; $m_{12} = 4b^2$. Для уравнения второго приближения (2.12) параметр K_1 определяется аналогичным уравнением типа Риккати, а параметр K_2 линейным уравнением $m_0 + m_1 K_1 + m_2 K_2 = m_{12} K_1 K_2$, где $m_0 = \alpha_2 c$; $m_2 = 4a_1 c + 6a_1^2 c + 4a_1^3 c + 6\alpha_1 b^2$; $m_1 = \alpha_2 b^2$; $m_{12} = 4b^2 + 12b^2 a_1^2 + 8b^2 a_1^3$.

Для векторного случая для функционала (1.2) функция оценки управления имеет вид

$$\omega_1(u, x) = C_1(x)\, u^2 - \tfrac{1}{2}\sum_{ij=1}^{m} b_i b_j \frac{\partial^2 V}{\partial x_i\, \partial x_j}\, u^2 ,$$

а функциональное уравнение Беллмана для (1.1) и (1.2)

$$\min_u \left[W(x) + \omega(u, x) + \left\langle A_1 x + bu \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle V(x) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \left\langle A_1 x + bu \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle^2 V(x) \right] = 0 \tag{2.14}$$

Оптимальное управление определяется соотношением

$$u(x) = -\frac{1}{2C_1(x)} \left(\sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{ij=1}^{m} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i\, \partial x_j}\, b_i \lambda_j \right), \tag{2.15}$$

где $C_1(x) = c + \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{m} b_i b_j (\partial^2 V/\partial x_i\, \partial x_j)$; $\lambda_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} x_k$. Уравнение Беллмана-Ляпунова первого приближения в замкнутой форме после исключения u из (2.14) приобретает следующий вид

$$W(x) + \left\langle A_1 x \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle V(x) + \frac{1}{2} \left\langle A_1 x \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle^2 V(x) =$$
$$= [4C_1(x)]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{ij=1}^{m} b_i \lambda_j \frac{\partial^2 V}{\partial x_i\, \partial x_j} \right]^2 \tag{2.16}$$

Структура уравнения аналогична уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана для непрерывных цистем.

Подобные уравнения второго и третьего приближений в замкнутой форме для векторного случая можно получить исходя из соответствующих функциональных уравнений Беллмана.

Решение уравнения (2.16) аппроксимируем последовательностью степенных форм

$$V(x) = \sum_{q=1}^{\infty} v^{2q}(x) = v^2(x) + v^4(x) + \ldots \tag{2.17}$$

Параметры квадратичной формы определяются из матричного уравнения Риккати [4, 5]. Коэффициенты четвертичной формы и последующих форм определяются системой линейных алгебраических уравнений. Здесь процедура решения задачи АКОР полностью аналогична процедуре, изложенной в [8 – 10], для неквадратичных функционалов.

Пример. Для иллюстрации **решения** задачи синтеза нелинейного управления рассмотрим управляемый объект с передаточной функцией $W(p) = h/p$ и фиксатором нулевого порядка. Разностное уравнение имеет вид

$$x(n+1) = a\,x(n) + b\,u(n)\,; \quad a = 1\,; \quad b = hT_0\,; \quad h = 0,1\,; \quad T_0 = 0,1\ \text{с}.$$

Минимизируемый функционал определим выражением

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_1\, x^2(n) + \alpha_2\, x^4(n) + \omega(u, x)\right].$$

Исследуем решение задачи аналитического конструирования на основании уравнения Беллмана первого и второго приближения и функций $\omega_1(u, x)$ и $\omega_2(u, x)$.

Для заданного уравнения и критерия оптимальности получаем уравнение Беллмана первого приближения

$$\min_u \left[\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4 + \omega_1(u, x) + \frac{\partial V}{\partial x}\, bu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,(bu)^2\right] = 0$$

Уравнение цифрового регулятора в случае $\omega_1(u, x)$ определяется соотношением (2.4)

$$u_1(x) = -\frac{b\,\dfrac{\partial V}{\partial x}}{2\left(c + \dfrac{b^2}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)} = -\frac{b(K_1 x + 2K_2 x^3)}{c + b^2(K_1 + 6K_2 x^2)}.$$

В том случае, если использовать значение обобщенной весовой константы для квадратичного функционала $C_1 = c + b^2 K_1$, т. е. функцию оценки $\omega_1'(u, x)$, то оптимальное управление определится соотношением вида

$$u_1'(x) = -\frac{b}{2C_1}\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{b}{c}\,(K_1 x + 2K_2 x^3).$$

Заметим, что для исходного разностного уравнения функциональное уравнение второго приближения будет иметь следующий вид

$$\min_u \left[\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4 + \omega_2(u, x) + \frac{\partial V}{\partial x}\, bu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,(bu)^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\,(bu)^3\right] = 0,$$

где

$$\omega_2(u, x) = C_1(x)\, u^2 - \frac{b^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\, u^2 - \frac{b^3}{6}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\,(u)^3$$

и закон управления $u_2(x) = u_1(x)$, т. к. коэффициент $a_1 = 0$, т. е. оптимальные управления совпадают для уравнених первого и второго приближений.

Для численных значений весовых констант $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 6$; $c = 0{,}01$ получаем следующие значения параметров $K_1 = 15{,}1$; $K_2 = 14{,}3$ для $\omega_1(u, x)$ и $K_1 = 15{,}1$; $K_2 = 11{,}4$ для функции $\omega_1'(u, x)$.

В итоге закон управления определяется следующими соотношениями соответственно для первого и второго случаев

$$u_0(x) = -13{,}2x\,; \quad u_1(x) = -\frac{13{,}2x + 24{,}8x^3}{1 + 0{,}75x^2}\,;$$

$$u_1'(x) = -(13{,}2x + 20x^3)\,.$$

Здесь $u_0(x)$ линейное оптимальное управление, полученное для квадратичного функционала.

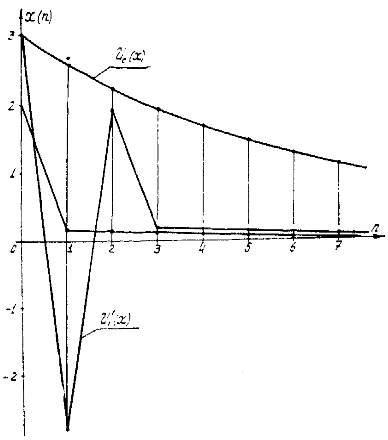

Рис. 1.

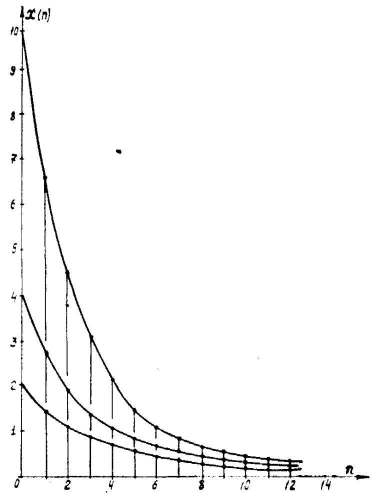

Рис. 2.

На рис. 1 представлены переходные процессы замкнутой цифровой системы для линейного $u_0(x)$ и нелинейного законов управления $u_1'(x)$. Характер переходных процессов свидетельствует о резком улучшении качества при нелинейном управлении $u_1'(x)$. Однако, этот эффект наблюдается только для определенной области начальных условий.

При начальных условиях $x(0) = 3$ процесс становится резко колебательным и при $x(0) > 3$ начинает расходится. Это обусловлено тем обстоятельством, что оценка $\omega_1'(u, x) = C_1 u^2 - \frac{1}{2}b^2(\partial^2 V/\partial x^2)$ теряет свойства положительной знакоопределенности при больших значениях $x(0)$, а функция $V(x)$ не обладает уже свойствами функции Ляпунова.

На рис. 2 представлены переходные процессы для нелинейных законов управления $u_1(x) = u_2(x)$, которые обеспечивают уже устойчивость и требуемые качества переходных процессов при любых начальных условиях.

В заключение представляется интересным для синтезированной оптимальной нелинейной дискретной системы исследовать свойства первой разности функции Беллмана-Ляпунова, поскольку в функциональном уравнении Беллмана она была аппроксимирована. Изучение своиств осуществим путем вычисления первой разности функции $V(x)$ вдоль оптимальной траектории по формулам различного приближения.

Для исследуемого примера функция Ляпунова имеет вид

$$V(x) = K_1 x^2 + K_2 x^4, \quad \text{где} \quad K_1 = 15{,}1\,; \quad K_2 = 14{,}3\,.$$

Первая разность функции $V(x)$, вычисленная вдоль оптимальной траектории, определяется соотношением

$$\Delta V[x(n)] = V[x(n+1)] - V[x(n)] =$$
$$= \frac{\partial V}{\partial x}\Delta x(n) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\Delta x^2(n) + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\Delta x^3(n) + \ldots$$

Осуществим оценку первой разности для двух начальных условий

$$x(0) = 2 \quad \text{и} \quad x(0) = 4\,.$$

Тогда для нулевого такта, при $x(0) = 2$, $x(1) = 1,4$

$$\Delta V[x(0)] = -204{,}6\,; \quad \Delta x(0) = -0{,}6\,.$$

получаем первое приближение

$$\Delta V[x(0)] = \frac{\partial V}{\partial x}\Delta x(0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\Delta x^2(0) = -181{,}8$$

и соответственно второе приближение

$$\Delta V[x(0)] = \frac{\partial V}{\partial x}\Delta x(0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\Delta x^2(0) + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\Delta x^3(0) = -206{,}4$$

Ошибка составляет для первого приближения около 10%, для второго менее 1%.

Во втором случае для $x(0) = 4$, $x(1) = 2{,}93$ соответственно получаем.

$$\Delta V[x(0)] = -2659\,, \quad \Delta x(0) = -1{,}07\,;$$

$$\Delta V[x(0)] = \frac{\partial V}{\partial x}\Delta(x0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\Delta x^2(0) = -2459\,;$$

$$\Delta V[x(0)] = \frac{\partial V}{\partial x}\Delta x(0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\Delta x^2(0) + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\Delta x^3(0) = -2735$$

Ошибка для первого приближения составляет 7,5%, а для второго приближения 2,5%.

Заметим, что по мере увеличения n и уменьшения $\Delta x(n)$ ошибка в определении $\Delta V(x)$ с помощью разложения первого приближения уменьшается,

Поэтому для приближенного решения нелинейных задач оптимального управления можно использовать функциональное уравнение первого приближения.

3. ВЫВОДЫ

В статье разработана приближенная процедура аналитического конструирования нелинейных цифровых регуляторов, исходя из минимизации неквадратичного функционала. Получено уравнение Беллмана-Ляпунова для непрерывных систем. Найден вид функций $\omega(u, x)$ неквадратичного критерия оптимальности, позволяющий найти уравнение Беллмана-Ляпунова в замкнутом виде. Осуществлен расчет цифрового регулятора и произведен сравнительный качественный анализ полученного решения.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ВЫВОД ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим задачу минимизации неквадратичного функционала

$$\min_u I = \min_u \sum_{n=0}^{\infty} W[x(n), u(n)] \tag{П.1}$$

при условии, что экстремум ищется на решениях уравнения

$$x(n+1) = f[x(n), u(n)] \quad x(0) = x_0\,; \quad x(\infty) = 0 \tag{П.2}$$

Тогда, используя принцип оптимальности, получаем

$$V(x_0) = \min_u \Big[\sum_{n=0}^{s} W(x, u) + \sum_{s}^{\infty} W(x, u)\Big] \tag{П.3}$$

Далее, (П.3) можно представить следующим образом:

$$V(x_0) = \min_u \Big[\sum_{n=0}^{s} W(x, u) + V(x_s)\Big] \tag{П.4}$$

Это соотношение верно для любого момента времени n, но для простоты положим $s = 1$. Тогда получим в упрощенных обозначениях

$$V(x_0) = \min_u \big[W(x_0, u_0) + V(x_1)\big] \tag{П.5}$$

Осуществим разложение функции $V(x_1)$, по формуле Тейлора, полагая функция непрерывной и имеющей частные производные высших порядков.

$$V[x_0 + \Delta x(0)] = V(x_0) + \frac{\partial V}{\partial x}\Delta x(0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\Delta x^2(0) + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\Delta x^3(0) + \ldots \tag{П.6}$$

В дискретном варианте $\Delta x(n)$ зависит от интервала дисретности и уже не является бесконечно малой величиной. Поэтому, неизбежен учет высших производных по формуле Тейлора.

Тогда, уравнение (П.5) с учетом соотношения (П.6) выглядит следующим образом

$$V(x_0) = \min_u \left[W(x_0, u_0) + V(x_0) + \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x(0) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Delta x^2(0) + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} \Delta x^3(0) + \ldots \right] \qquad (П.7)$$

Определяя величину $\Delta x(0)$ из (П.2) и, подставляя ее в (П. 7), получаем

$$\min_u \left[W(x_0. u_0) + \frac{\partial V}{\partial x} (f(x_0, u_0) - x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} (f(x_0, u_0) - x_0)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} (f(x_0, u_0) - x_0)^3 + \delta \right] = 0 , \qquad (П.8)$$

где δ – остаток разложения по формуле Тейлора.

Это выражение и представляет собой функциональное уравнение Беллмана для дискретной системы в том случае, когда цифровой регулятор ищется, исходя из условия минимизации неквадратичного функционала.

Так как уравнение (П.8) справедливо для произвольного момента времени n, то его можно записать следующим образом:

$$\min_u \left\{ W(x, u) + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, u) - x] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} [f(x, u) - x]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} [f(x, u) - x]^3 + \delta \right\} = 0 \qquad (П.9)$$

или

$$\min_u \left\{ W(x, u) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m V}{\partial x^ш} [f(x, u) - x]^m \right\} = 0$$

Для векторного процесса уравнения (П.9) записываются цледующим образом

$$\min_u \left[W(x, u) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left\langle A_1 x + bu \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle^m V(x) \right] = 0 . \qquad (П.10)$$

Однако, при решении прикладных задач теории управления возникает необходимость аппроксимации уравнения (П.10) отрезком степенного ряда.

Поэтому целессобразно ввести понятие функционального уравнения Беллмана первого приближения

$$\min_u \left[W(x, u) + \left\langle A_1 x + bu \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle V(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left\langle A_1 x + bu \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle^2 V(x) \right] = 0 , \qquad (П.11)$$

второго приближения

$$\min_u \left[W(x, u) + \left\langle A_1 x + bu \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle V(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left\langle A_1 x + bu \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle^2 V(x) + \frac{1}{6} \left\langle A_1 x + bu \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle^3 V(x) \right] = 0 \qquad (\text{П.12})$$

Заметим, что в случае квадратичного функционала и линейного динамического процесса уравнение (П.11) является точным [1], т. к. функция Беллмана-Ляпунова есть квадратичная форма от переменных состояния динамической системы.

(Поступило в редакцию 2 февраля 1989 г.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Д. Крутько: Вариационные методы синтеза систем с цифровыми регуляторами. Советское Радио, Москва 1967.

[2] Т. Яхаги: Синтез оптимальных линейных многомерных дискретных систем. ВИНИТИ, Экспесс-информация — Системы автоматического управления, No. 46, 1971, с. 21—38.

[3] В. И. Кунцевич, М. М. Лычак: Синтез систем автоматоческого управления с помощью функций Ляпунова. Наука, Москва 1977.

[4] В. Стрейц: Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. Наука, Москва 1985.

[5] А. Табак, Б. Куо: Оптимальное управление и математическое программирование. Наука, Москва 1975.

[6] Г. К. Валеев, Г. С. Финин: О численном синтезе оптимальных регуляторов для нелинейных дискретных систем управления. Кибернетика и вычислит. техника, Республ. сборник No. 49, Киев 1980, с. 32—40.

[7] В. Ф. Кудин: Аналитическое конструирование цифрового регулятора при ограничении на управление. Известия АН СССР — Техническая кубернетика (1988), 3, 175—180.

[8] А. М. Летов: Динамика полета и управление. Наука, Москва 1969.

[9] В. Ф. Кудин: К вопросу об оптимальном решении задачи стабилизации. Труды III Всесоюзного Совещания по теории автоматического управления, Наука, Москва 1965.

[10] Р. В. Бэсс, Р. Ф. Вебер: Построение оптимального нелинейного закона управления линейной системой на основе использования критериев оптимизации высокого порядка. ВИНИТИ, Экспресс-информация — Системы автоматического управления, No. 6, 1976, с. 1—10.

[11] А. А. Фельдбаум: Основы теории оптимальных автоматических систем. Гос. издат. физ-мат. литературы, Москва 1963.

Валерий Фёдорович Кудин, доктор технических наук, профессор Киевского политехнического института, 252056 Киев, проспект Победы 37. СССР.