

Zdeněk Vostrý

Нумерический метод спектральной факторизации полиномов

Kybernetika, Vol. 8 (1972), No. 4, (323)--332

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/124392>

Terms of use:

© Institute of Information Theory and Automation AS CR, 1972

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these

Terms of use.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://project.dml.cz>

Численный метод спектральной факторизации полиномов

Зденек Востры

Задачей статьи описать выведение нового метода спектральной факторизации. Всё, что будет в дальнейшем сказано, касается дискретных передаточных функций.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $A(z)$ функция комплексной переменной z , симметрическая по окружности $|z| = 1$. Это значит, что $A(z) = A(z^{-1})$. Потом разложение $A(z) = \Phi^+ \Phi^-$, (где Φ^+ содержит все нули и полюсы лежащие внутри окружности $|z| = 1$; Φ^- содержит все нули и полюсы лежащие вне окружности $|z| = 1$) назовём спектральной факторизацией функции $A(z)$.

Очевидно будут

$$\Phi^+(z) = \bar{\Phi}^-(z) = \Phi^-(z^{-1})$$

где $\bar{}$ значит подставить z вместо z^{-1} . В дальнейшем $A(z)$ будет симметрический полином.

Метод спектральной факторизации выводим на основе регулировки статической системы по минимуму квадратичной площади.

Такую систему можно в Z трансформации записать при условии конечной памяти таким образом, что

$$(1) \quad S = s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} + \dots + z^{-k-1} s_{k+1}.$$

Введём обозначение величин: S — система, X — выходная величина, Y — входная величина.

Замечание 1. Если регулированная статическая система имеет конечную память, то разностное уравнение для входной величины является правилом, как из прошедших входных величин конечного числа и з требований предъявленных к выходной величине вычислить новую входную величину.

Пусть система находится в начальном состоянии данном последовательностью прошедших входных величин системы. В двухсторонней Z трансформации можем начальные условия написать таким образом:

$$Y^- = \sum_{i=1}^k Y_{-i} z^i.$$

Пусть требуемая выходная величина равна нулю.

По замечанию 1 достаточно вычислить y_0 в зависимости от

$$y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_{-k}.$$

В двухсторонней Z трансформации можем писать

$$(2) \quad X = SY + SY^-.$$

Решение задачи об управлении выходной величины на ноль по минимуму квадратной площади сделаем классическим методом и потом приблизительно.

Критерий

$$(3) \quad I = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X \bar{X} z^{-1} dz,$$

где Γ окружность $|z| = 1$.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МИНИМИЗАЦИИ (3)

Подставляя выражение (2) в уравнение (3), получим условие минимума с помощью первой производной по \bar{Y} , как показано в [1].

$$(4) \quad \frac{\partial I}{\partial \bar{Y}} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} S \bar{S} (Y - Y^-) z^{-1} dz = 0.$$

Условие (4) выполним, когда $S \bar{S} (Y - Y^-) z^{-1}$ будет функция регулярная внутри Γ .

Вместе с (1.4) нужно выполнить условия реализуемости и стабильности Y .

Пусть, согласно с определением

$$(5) \quad S \bar{S} = A = \Phi^+ \Phi^-,$$

$$(6) \quad z^{-1} \Phi^+ \Phi^- (Y + Y^-) = A,$$

где A функция регулярная внутри Γ .

Отсюда, как известно, вытекает формула

325

$$(7) \quad Y = \frac{-z}{\Phi^+} \left[\frac{\Phi^+ Y^-}{z} \right]_+,$$

где $[]_+$ значит расщепление

$$\frac{\Phi^+ Y^-}{z} = \left[\frac{\Phi^+ Y^-}{z} \right]_+ + \left[\frac{\Phi^+ Y^-}{z} \right]_-.$$

$[]_+$ содержит полюсы, лежащие внутри Γ . $[]_-$ содержит полюсы, лежащие вне Γ .

В выражение (7) можно подставлять $q \cdot \Phi^+$ вместо Φ^+ , q реальный коэффициент, и Y не изменится.

То можно написать новое Φ^+ в виде

$$(8) \quad \Phi^+ = 1 + z^{-1}\varphi_1 + z^{-2}\varphi_2 + \dots + z^{-k}\varphi_k,$$

где $1, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ называют коэффициентами факторизованного полинома S .

Уравнение (5) изменяется в

$$S\bar{S} = q^2 \cdot \Phi^+ \Phi^-.$$

Если подставим (1) и (8) в (7), то

$$\begin{aligned} Y &= -z(1 + \varphi_1 z^{-1} + \dots + \varphi_k z^{-k})^{-1} \cdot \\ &\cdot [(1 + \varphi_1 z^{-1} + \dots + \varphi_k z^{-k})(y_{-1}z + y_{-2}z^2 + \dots + y_{-k}z^k) z^{-1}]_+, \\ Y &= -z(1 + z^{-1}\Theta) \cdot \\ &\cdot [(1 + \varphi_1 z^{-1} + \dots + \varphi_k z^{-k})(y_{-1}z + y_{-2}z^2 + \dots + y_{-k}z^k) z^{-1}]_+, \end{aligned}$$

где $(1 + z^{-1}\Theta) = (1 + \varphi_1 z^{-1} + \dots + \varphi_k z^{-k})^{-1}$.

Теперь не трудно показать, что

$$(9) \quad y_0 = - \sum_{j=1}^k \varphi_j y_{-j}.$$

По замечанию 1 можно написать возвратное уравнение для управления на ноль выходной величины.

$$(10) \quad y_i = - \sum_{j=1}^k \varphi_j y_{i-k}.$$

Известно, что рассматриваемая система управляется на ноль выходной величины таким образом, что входная величина стремится к нулю.

Можно сказать, что к $\varepsilon > 0$ существует целое N , так что для $i > N$, будет $|y_i| < \varepsilon$.

Это значит, что критерий (3) является функцией конечного числа входных величин с небольшой ошибкой, которая с увеличением N стремится к нулю.

Отсюда

$$(11) \quad I = I(y_0, y_1, \dots, y_N).$$

Условия минимума (11)

$$(12) \quad \frac{\partial I}{\partial y_r} = 0, \quad r = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Подставив (3) в (12), получим

$$\frac{\partial I}{\partial y_r} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} S\bar{S} \cdot \frac{\partial}{\partial y_r} ((Y + Y^-) \cdot (\bar{Y} + \bar{Y}^-)) z^{-1} dz = 0,$$

отсюда следует условие

$$(13) \quad \frac{\partial I}{\partial y_r} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} S\bar{S} (Y + Y^-) z^{r-1} dz = 0, \quad r = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Теперь распишем подынтегральное выражение

$$(14) \quad S\bar{S} = a_0 + a_1(z + z^{-1}) + \dots + a_k(z^k + z^{-k}),$$

где

$$(15) \quad a_i = \sum_{j=1}^{k-i+1} s_j \cdot s_{i+j}, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Подставив (14) и (15) в (13), получим после интегрирования для $r = 0$ уравнение

$$a_0 y_0 + a_1 y_1 + \dots + a_r y_r + a_1 y_{-1} + a_2 y_{-2} + \dots + a_r y_{-r} = 0,$$

для $r = 1$

$$a_1 y_0 + a_0 y_1 + a_1 y_2 + \dots + a_r y_{r+1} + a_2 y_{-1} + a_3 y_{-2} + \dots + a_r y_{-r+1} = 0$$

и т. д.

Все уравнения (13) можно написать в матричной форме

327

$$(16) \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_r & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_r & \dots & a_1 & a_0 \dots a_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_{N+k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_r \\ a_2 & a_3 & \dots & a_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_r & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{-1} \\ y_{-2} \\ \vdots \\ y_{-r} \end{bmatrix} = 0$$

Система уравнений (16) не имеет решения, потому что число неизвестных y_i больше числа уравнений.

Но мы знаем, что для достаточно больших N справедливо

$$|y_{N+i}| < \varepsilon, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

То добавим к уравнениям (16) условия

$$y_{N+i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Явно, что это условие вызывает ошибку, которая для $N \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Обозначим

$$(17) \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_r & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_r & \dots & a_1 & a_0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

и уравнение (16) изменится в

$$\mathbf{A}\mathbf{Y} + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{Y}^- = \mathbf{0}.$$

Мы хотим из (18) вычислить только y_0 , из этого следует, что достаточно вычислить первую строку матрицы \mathbf{A}^{-1} . Обозначим её

$$\overline{\mathbf{M}} = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_N].$$

Из формы матрицы $\overline{\mathbf{B}}$ вытекает, что достаточно вычислить только часть первой

328 строки \mathbf{A}^{-1}

$$(19) \quad \mathbf{M} = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_k]$$

и

$$(20) \quad y_0 = -[m_1 \ m_2 \ \dots \ m_k] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ a_2 & \dots & a_k & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_k & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{-1} \\ y_{-2} \\ \vdots \\ y_{-k} \end{bmatrix}$$

в сокращенной форме

$$(21) \quad y_0 = -\mathbf{M}\mathbf{B}\mathbf{Y}^{-1}$$

Вычислением (20) получим результат в форме

$$(22) \quad y_0 = -\sum_{j=1}^k \alpha_j y_{-j},$$

где α_j приблизительно коэффициент факторизованного полинома.

Удалось доказать, что для $N \rightarrow \infty$, стремится геометрически $\alpha_j \rightarrow \varphi_j$.

Теперь надо составить метод для вычисления части первой строки матрицы \mathbf{A}^{-1} , порядок которой может быть 100 и больше.

Используем метод вычисления обратной матрицы от блочной матрицы.

Видно, что \mathbf{A} является положительно определенной. Введем

$$(23) \quad \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} \\ a_1 & a_0 & a_1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_1 \\ a_{k-1} & \dots & a_1 & a_0 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_0 \text{ порядка } k,$$

$$(24) \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ a_2 & \dots & a_k & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_k & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \text{ порядка } k,$$

$$(25) \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \mathbf{P} \text{ порядка } k \times 1, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{P}} \text{ порядка } (k+1) \times 1,$$

$$(26) \quad \begin{bmatrix} [a_0] & [\mathbf{P}^T] \\ [\mathbf{P}] & [\mathbf{Q}_{i-1}] \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{Q}}_i \text{ порядка } k+1,$$

$$(27) \quad \begin{bmatrix} [e_i] & [\mathbf{G}_i^T] \\ [\mathbf{G}_i] & [\mathbf{H}_i] \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{Q}}_i^{-1} \text{ порядка } k+1.$$

Из уравнения $\mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i^{-1} = \mathbf{1}$ следуют четыре уравнения

$$(28) \quad \begin{aligned} a_0 e_i + \mathbf{P}^T \mathbf{G}_i &= 1, \\ \mathbf{P} e_i + \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{G}_i &= \mathbf{0}, \\ a_0 \mathbf{G}_i^T + \mathbf{P}^T \mathbf{H}_i &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{P} \mathbf{G}_i^T + \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{H}_i &= \mathbf{1}, \end{aligned}$$

оттуда следуют формулы для определения субматриц матрицы $\bar{\mathbf{Q}}_i^{-1}$

$$(29) \quad \begin{aligned} e_i &= (a_0 - \mathbf{P} \mathbf{Q}_{i-1}^{-1} \mathbf{P}^T)^{-1}, \\ \mathbf{G}_i &= -\mathbf{Q}_{i-1}^{-1} \mathbf{P} e_i, \\ \mathbf{H}_i &= \mathbf{Q}_{i-1}^{-1} + \mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_i \cdot e_i^{-1}. \end{aligned}$$

Теперь добавим первую строку и первый столбец к матрице $\bar{\mathbf{Q}}_i$ и получим матрицу $\bar{\mathbf{Q}}_{i+1}$

$$(30) \quad \bar{\mathbf{Q}}_{i+1} = \begin{bmatrix} a_0 & [\mathbf{P}^T] & 0 \\ [\mathbf{P}] & & \\ 0 & & [\bar{\mathbf{Q}}_i] \end{bmatrix}$$

$$(31) \quad \bar{\mathbf{Q}}_{i+1}^{-1} = \begin{bmatrix} e_{i+1} & [\mathbf{G}_{i+1}^T] \\ [\mathbf{G}_{i+1}] & [\mathbf{H}_{i+1}] \end{bmatrix}$$

330 Для определения $\bar{\mathbf{Q}}_{i+1}^{-1}$ можем применить формулы (29)

$$(32) \quad e_{i+1} = \left(a_0 - \left[\begin{array}{c} [\mathbf{P}^T] \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \bar{\mathbf{Q}}_i^{-1} \\ * \\ \vdots \\ * \\ * \dots * \\ * \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{P} \\ 0 \end{array} \right] \right)^{-1}$$

(элементы * умножены на ноль),

$$(33) \quad \mathbf{G}_{i+1} = \left[\begin{array}{c} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \bar{\mathbf{Q}}_{i+1}^{-1} \\ \vdots \\ * \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{P} \\ 0 \end{array} \right] \cdot e_{i+1}.$$

Последний элемент матрицы \mathbf{G}_{i+1} не употребляется в следующем шагу и его не нужно определять.

Смотря на (32) и (33), видно, что матрицу $\bar{\mathbf{Q}}_{i+1}^{-1}$ порядка $k+1$ можно пропусшением $(k+1)$ -ой строки и $(k+1)$ -ого столбца изменить в матрицу $\bar{\mathbf{Q}}_{i+1}^{-1}$ k -го порядка.

Элементы матрицы $\bar{\mathbf{Q}}_{i+1}^{-1}$ определяются по формулам (29), только не определяется последний элемент матрицы \mathbf{G}_i , и последняя строка и последний столбец матрицы \mathbf{H}_i .

Эти оформления представляют нам возможность определения субматрицы порядка k в левом верхнем углу матрицы \mathbf{A}^{-1} , на основе действий над матрицей k -ого порядка, причем порядок \mathbf{A}^{-1} довольно высок.

Теперь знаем, как определить $\bar{\mathbf{Q}}_{i+1}^{-1}$, когда знаем $\bar{\mathbf{Q}}_i^{-1}$ и что $\bar{\mathbf{Q}}_0^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$ (см. 17)).

Удалось доказать, что последовательность матриц $\bar{\mathbf{Q}}_i^{-1}$ сходится равномерно и геометрически к матрице $\bar{\mathbf{Q}}^{-1}$, и что по (1.21) $y_0 = -\mathbf{M}\mathbf{B}\mathbf{Y}^- = -\sum_{j=1}^k \alpha_j y_{-j}$, где α_j коэффициенты факторизованного полинома.

Переход от $\bar{\mathbf{Q}}_i^{-1}$ до $\bar{\mathbf{Q}}_{i+k}^{-1}$ будем считать как одну итерацию. Этот метод был проверен на вычислительной машине Еллиот 4100.

Для иллюстрации приведем три примера.

Пример 1.

$$S = 1 + 2,7z^{-1} + 1,41z^{-2} + 0,02z^{-3}$$

	итерация 1	итерация 6	точно	ошибка
φ_1	1,1513887	1,1999992	1,2000000	$8 \cdot 10^{-8}$
φ_2	0,33657962	0,35999958	0,36000000	$4,2 \cdot 10^{-7}$
φ_3	0,00466865	0,00499999	0,00500000	10^{-8}

$$\Phi^+ = 1 + \varphi_1 z^{-1} + \varphi_2 z^{-2} + \varphi_3 z^{-3}.$$

Пример 2.

$$S = 1 + 4z^{-2}$$

	итерация 1	итерация 6	точно	ошибка
φ_1	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0
φ_2	0,24908425	0,25000000	0,25000000	0

$$\Phi^+ = 1 + \varphi_1 z^{-1} + \varphi_2 z^{-2}.$$

Пример 3.

$$S = 1 - 7,3z^{-1} - 25,59z^{-2} - 13,9z^{-3} - 0,2z^{-4}$$

	итерация 1	итерация 4	точно	ошибка
φ_1	1,0636866	1,0843677	1,0843696	$1,9 \cdot 10^{-6}$
φ_2	0,22510956	0,23315103	0,23315184	$8,1 \cdot 10^{-7}$
φ_3	0,02935514	0,03022127	0,03022136	$9 \cdot 10^{-8}$
φ_4	0,00047999	0,00049449	0,00049449	0

$$\Phi^+ = 1 + \varphi_1 z^{-1} + \varphi_2 z^{-2} + \varphi_3 z^{-3} + \varphi_4 z^{-4}.$$

Из примеров, которые были вычислены, видно, что метод очень быстро сходится для таких полиномов, корни которых не лежат на Γ . Если некоторые корни полинома лежат на Γ , то метод тоже сходится, но уже не так быстро.

(Поступила в редакцию 7 июля 1970 г.)

- [1] Strejc a kol.: Syntéza regulačních obvodů s číslicovým počítačem. NČSAV, Praha 1965.
- [2] Vostrý Z.: Algoritmus číslicové regulace. ČVUT FEL 1969.
- [3] Ф. Р. Гантмахер: Теория матриц. Наука, Москва 1966.

VÝTAH

Numerická metoda spektrální faktorizace polynomů

ZDENĚK VOSTRÝ

Řešení diskrétních regulačních procesů podle kritéria minima kvadrátů vede na Wienerovu-Hopfovu rovnici. Při řešení této rovnice se neobejdeme bez spektrální faktorizace polynomů.

V článku popsaná metoda je odvozena pomocí optimální regulace statické soustavy podle minima kvadrátů výstupní veličiny. Regulace probíhá z počátečního stavu do nulového ustáleného výstupu. Soustava je dána impulsní charakteristikou konečné délky, kde pořadnice impulsní charakteristiky jsou právě koeficienty faktorizovaného polynomu.

Při sestavování algoritmu je použita rekurentní metoda inverze matice.

Výpočty ukazují, že metoda konverguje pro libovolné kořeny zadaného polynomu. Pro kořeny, jejichž absolutní hodnota je blízká nebo rovna 1, je konvergence poměrně pomalá.

Ing. Zdeněk Vostrý, Ústav teorie informace a automatizace ČSAV (Институт теории информации и автоматизации — Чехословацкая Академия наук), Vršehradská 49, Praha 2.