Josef Kálal

Příspěvek k theorii kuželoseček

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 2-3, 275--284

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124108

poněvadž

$$\int_0^x 3x^2 dx = x^3, \quad \text{aneb} \quad \frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2.$$

Poslední pořadnici $NM_a = 1 + PM_a$ čáry l_a vypočteme dle vzorce (2):

$$NM_a = 1 + 0{\cdot}1\,(0 + 0{\cdot}03 + 0{\cdot}12 + \ldots + 5{\cdot}88) \doteq 4{\cdot}115$$

a podobně poslední pořadnici $NM_b = 1 + PM_b$ čáry l_b dle vzorce (3):

$$NM_b = 1 + 0{\cdot}1\,(0{\cdot}03 + 0{\cdot}12 + 0{\cdot}27 + \ldots + 6{\cdot}75) = 4{\cdot}790.$$

Poslední pořadnice hledané křivky (6) jest

$$NM = 1 + 1{\cdot}5^3 = 4{\cdot}375.$$

Obr. 3. byl při reprodukci zmenšen v poměru 2 : 1, tak že jednotka délková rovnala se původně 4 *cm*. Pořadnice vztyčené v jednotlivých bodech N_1, N_2 ... nebyly vytaženy. Ačkoliv každá z čar l_a, l_b jest složena z patnácti úseček, činí dojem téměř „hladké“ křivky. Kdybychom volili n větší, na př. $n = 30$ místo $n = 15$, platilo by to tím spíše.

Příspěvek k theorii kuželoseček.

Napsal **Jos. Kálal.**

V učebnicích deskriptivní geometrie pro střední školy uvádí se v odstavci, jednajícím o rovinných řezech na kuželi, bez důkazu tato poučka: *„Průmětem řezu na rovinu kolmou k ose rotačního kužele jest kuželosečka téhož druhu, jejíž jedno ohnisko jest v průmětu vrcholu daného kužele.“*

Příčinou toho jest složitost důkazů, které jsou mi známy*); pouze pro parabolický řez podal prof. E. Vogel**) jednoduchý

---

*) R. Niemtschik: Allgemeine Methoden zur Darstellung der Durchschnitte von Ebenen mit Kegel- und Cylinderflächen u. s. w. Zasedací zprávy Vídeňské Akademie sv. LXIII.

E. Müller: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. Díl I. (V. Jeřábek v „Příloze k časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky“ ročník XLI č. 2.)

**) Die darstellend-geometrische Behandlung der Kegelschnitte. II. část. Výroční zpráva německé reálky v Hodoníně za šk. r. 1911/1912.

důkaz, kterého lze při vyučování užíti. Tento důkaz jest obsažen ve velmi jednoduchém důkazu pro obecný řez kužele, jejž jsem podal ve výroční zprávě zemské reálky v Příboře 1912/3, a který vzhledem k dalšímu bude nutno tuto opakovati.

Předpokládejme, že rotační kužel má svislou osu SV a rovina řezu ϱ jest kolmá k nárysně. Libovolný bod průseku A jest průsečík povrchové přímky kužele A^0V s rovinou ϱ a můžeme jej také pokládati za centrálný průmět bodu A^0 do roviny ϱ, je-li středem promítání vrchol kužele V. Bod A jako středový průmět bodu A^0 musí býti jednak na promítacím paprsku A^0V a na středovém průmětu libovolné přímky a^0 v π bodem A^0 procházející. Průmět této přímky do roviny ϱ stanovíme průměty jejích dvou bodů: jejího průsečíku P se stopou p^ϱ a bodu nekonečně vzdáleného U_∞ (průmět tohoto jest na paprsku b jdoucím vrcholem V rovnoběžně k a^0). Promítneme-li nekonečně vzdálené body přímek v π se nalézajících, z bodu V do roviny ϱ, jsou jejich průměty na přímce d, v níž rovina $\tau \parallel \pi$ a vrcholem V proložená, seče rovinu ϱ; volíme-li přímky a^0 rovnoběžné, mají jejich centrálné průměty společný úběžník U na přímce d. K našemu důkazu volme osnovu rovnoběžných přímek kolmých ke stopě p^ϱ.

V tomto případě jest (obr. 1.) v půdoryse:

$$V_1A_1 : A_1A_1^0 = U_1M : MN,$$

značí-li body M resp. N body přímky d_1 nejbližší bodům A_1 resp. A_1^0.

Z této úměry plyne dále

$$V_1A_1 : V_1A_1^0 = U_1M : U_1N$$

čili

$$= MA_1 : NP_1,$$

což lze také psáti ve tvaru

$$\frac{V_1A_1}{MA_1} = \frac{V_1A_1^0}{NP_1}.$$

Jest patrno, že, je-li kužel rotační, jest $V_1A_1^0 = r$, konstantní; rovněž v každém případě NP jest stálé a proto také hodnota poměru

$$\lambda = \frac{V_1A_1}{MA_1} \tag{1}$$

musí býti veličinou stálou.

Půdorysem průsečné křivky jest tedy geometrické místo bodů, jejichž vzdálenosti od pevného bodu V_1 a pevné přímky d_1 jsou ve stálém poměru

$$\lambda = \frac{r}{s},$$

kde s značí vzdálenost p_1^ϱ od půdorysu průsečnice $d \equiv (\sigma \times \tau)$; jest tedy tímto geometrickým místem bodů pro

$$r \left.\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} s \left\{\begin{matrix} \text{hyperbola} \\ \text{parabola} \\ \text{ellipsa,} \end{matrix}\right.$$

jejímž ohniskem jest půdorys vrcholu V a přímkou řídící půdorys průsečnice roviny řezu s rovinou vrcholovou rovnoběžnou s půdorysnou.

Současně z obr. 1. vidíme, že vzdálenost V_1 od d_1 jest rovna vzdálenosti stop p_1^σ a p_1^ϱ, kde σ jest rovina vrcholová a jest zřejmo, že pro

$$r \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} s \text{ jest } p_1^\sigma \left\{\begin{matrix} \text{sečnou} \\ \text{tečnou} \\ \text{nesečnou} \end{matrix}\right\} \text{kružnice podstavné a tedy}$$

$$\text{průsek} \left\{\begin{matrix} \text{hyperbolický} \\ \text{parabolický} \\ \text{elliptický} \end{matrix}\right\}, \text{ čímž náš důkaz jest ve všech částech}$$

provedеn.

Z dokázané poučky je tedy patrno, že každou kuželosečku lze nahraditi libovolnou kružnicí o středu v jednom jejím ohnisku. Na kollineárný vztah půdorysu řezu a křivky podstavné poukázáno jest v každé učebnici; z obrazce 1. jest patrný i význam přímky d_1 v této kollineaci, jež jest úběžnicí soustavy, do níž náležejí body kuželosečky. Osou této kollineace jest půdorysná stopa roviny ϱ, jež spojuje průsečíky podstavy kužele s řezem, kdežto ohnisko $F \equiv S$ jest středem kollineace.

Lze tedy postupovati dvojím způsobem: *a*) buď zvolíme libovolnou kružnici kolem ohniska opsanou a hledáme osu ze známého středu (F), úběžnice (d) a libovolného páru sdružených bodů, nebo *b*) z libovolně zvolené osy kollineace rovnoběžné s přímkou řídící, úběžnice a středu hledáme bod kružnice, která v této kollineaci odpovídá dané kuželosečce.

Známe-li tyto prvky kollineace, můžeme pak na základě této pevné kružnice pouhým pravítkem narýsovati libovolné množství bodů, což má svoji výhodu zvláště při hyperbole a parabole, kde rozměry kružítka nedovolují nám konstrukci vzdálenějších bodů.

V článku z počátku zmíněném bylo také ukázáno, jak lze vztahů těchto využitkovati při řešení některých úloh; zde chceme dále vycházeti od společné definice kuželoseček jako geometrických míst bodů, majících od pevného bodu a pevné přímky stálý poměr vzdáleností a ukázati, že lze i tečnu a normálu všech kuželoseček jednotně definovati a pro všechny kuželosečky uvésti jednotnou konstrukci tečen z daného bodu vedených, nebo s danou přímkou rovnoběžných.

Pokládáme-li kuželosečku za půdorys rovinného řezu rotačního kužele na půdorysně stojícího, můžeme tečnu v bodu A_1 (obr. 1.) sestrojiti jako přímku odpovídající tečně t^0 kružnice k^0 v bodě A^0 (jak i z deskriptivní geometrie jest známo a obyčejně se rýsuje), tedy jako spojnici $A_1 R$, kde $R \equiv (t^0 \times p^\varrho)$. Jest však patrno, že tečna t jako průmět přímky t^0 do roviny ϱ musí obsahovati také průmět nekonečně vzdáleného bodu přímky t^0, jenž jest v průsečíku přímky d s paprskem u jdoucím vrcholem V rovnoběžně s tečnou t^0.

Poněvadž však poloměr $S_1 A_1{}^0$ jest kolmý k tečně t^0, musí býti také

$$u_1 \equiv S_1 Q \perp S_1 A_1 ; \tag{2}$$

prochází tedy tečna t libovolného bodu A průsečíkem přímky řídící s kolmicí v ohnisku k jeho průvodiči vztyčenou.

Této okolnosti možno s výhodou využiti při rýsování tečen v jednotlivých bodech půdorysu rovinného průseku rotačního kužele, zvláště pak při průseku hyperbolickém a parabolickém v bodech na obvodu kruhové podstavy.

Tím však jest také dána možnost definovati jednotně tečnu a normálu všech kuželoseček; neboť z pravoúhlých trojúhelníků $A_1 S_1 Q$ a $A_1 M Q$ plyne, nazveme-li

$$\sphericalangle\, Q A_1 V = \alpha, \quad \sphericalangle\, Q A_1 M = \beta,$$

$$\cos\alpha : \cos\beta = S_1 A_1 : A_1 M = r : s. \tag{3}$$

Nazveme-li tedy průvodiči bodu A jeho spojnici s ohniskem a kolmici s bodu A na přímku řídící spuštěnou (jak jsme zvyklí při parabole), pak *tečna kuželosečky jest přímka, jež s průvodiči libovolného jejího bodu svírá úhly, jejichž cosiny jsou v poměru přilehlých průvodičů*; a poněvadž normála svírá s průvodiči úhly $90 - \alpha$, resp. $90 - \beta$, jest *normála* přímka, která *svírá s průvodiči libovolného bodu úhly, jejichž siny jsou v poměru přilehlých průvodičů.*

Vztah uvedený pod (2) umožňuje nám jednoduché *řešení kuželosečky dané řídící přímkou d, ohniskem F a tečnou t*, neboť lze ihned určiti dotyčný bod A, jenž nachází se na kolmici v ohnisku vztyčené ke spojnici $F(d \times t)$. Bodem A určena jest pak kuželosečka, ježto jeho průvodiče stanoví nám stálý poměr λ. Můžeme ho však užiti také *k sestrojení průseku přímky jdoucí ohniskem s danou kuželosečkou.* Vztyčíme-li v ohnisku F k této přímce p kolmici q, procházejí průsečíkem kolmice q s přímkou řídící d tečny kuželosečky, mající dotyčné body na přímce p. Z obrazce 1. jest patrno, že tečna svírá s přímkami q a d úhly, jejichž siny jsou v poměru $r : s$ a obdržíme tedy další bod takové tečny v průsečíku přímek m a n, jež jsou rovnoběžny s přímkou d resp. q ve vzdálenostech s resp. r (při parabole tečny ovšem půlí úhly $\sphericalangle\, dq$).

Vztah vyjádřený rovnicí (3) poskytuje nám jednoduchou *konstrukci malé osy ellipsy dané řídící přímkou, ohniskem a poměrem $s : r$*; neboť ve vrcholech malé osy jsou tečny kolmé k přímce řídící, tedy

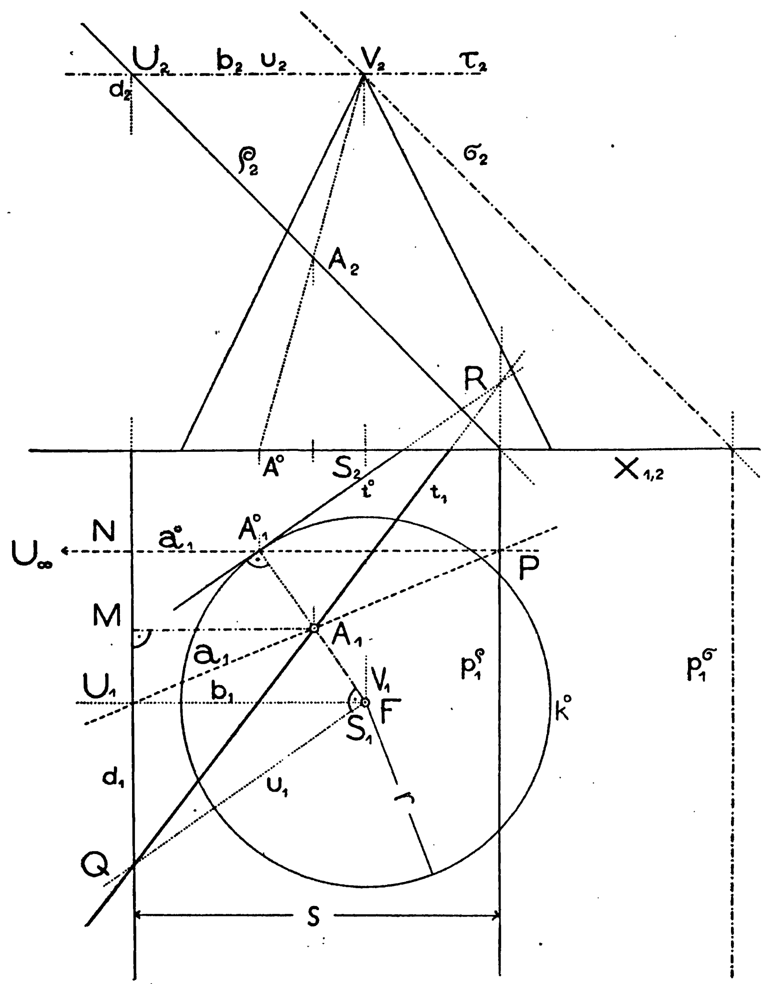
$$\beta = 0$$

a proto

$$\cos \alpha = \frac{r}{s} \tag{4}$$

udává odchylku průvodiče vrcholu malé osy od velké osy. Vztyčíme-li k tomuto směru, jejž lze velmi jednoduše sestrojiti, v ohnisku F kolmici, seče tato přímku řídící v bodě, jímž prochází tečna hledaného vrcholu, čímž nejen tento, ale i střed ellipsy i její velká osa jest sestrojena. Zároveň vidíme z rovnice (4), že při ellipse $r : s = e : a$, jsou-li e a a obvyklá označení částí ellipsy.

Opačným pochodem lze velmi jednoduše *sestrojiti řídící přímku ellipsy, dané oběma osami,* neboť řídící přímka pro-

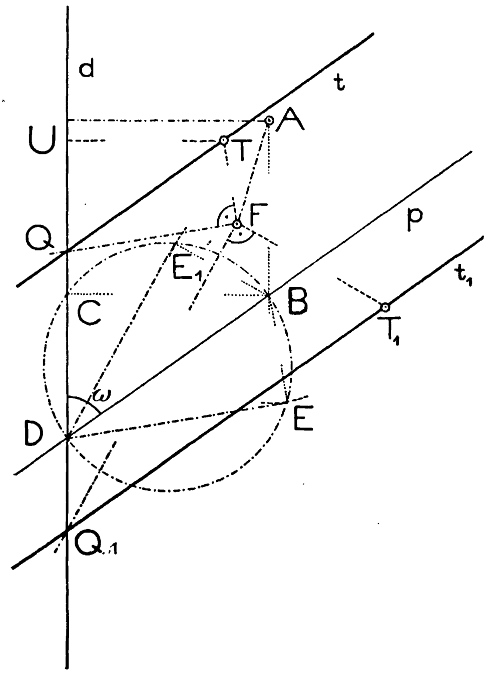


Obr. 1.

chází průsečíkem tečny ve vrcholu malé osy s kolmicí k jeho průvodiči v ohnisku vztyčenou a jest k velké ose kolmá, což jest nejjednodušší její konstrukce.

Týž vztah dává nám dále možnost *sestrojiti ke kuželosečce dané přímkou řídící d, ohniskem F a bodem A* (poslední nahražuje neb může býti nahražen poměrem $r:s$) *tečny rovnoběžné s danou přímkou p.*

K sestrojení těchto tečen stačilo by nám úplně, kdybychom znali body Q, Q_1, v nichž sekou přímku řídící. Při tom známe z hledaného čtyřúhelníka $FQUT$ (obr. 2.) poměr dvou stran



Obr. 2.

$FT:TU = r:s$, dva pravé úhly při vrcholech F a U, jakož i úhel úhlopříčky $t \equiv QT$ s přímkou řídící d, tak že můžeme sestrojiti čtyřúhelník $BCDE$ jemu podobný a podobně položený, čímž získáme směr strany FQ a tím také bod Q sám.

Pro konstrukci samu bylo by nejvhodnější zobraziti na daném směru p bod B stejně od řídící přímky vzdálený jako bod A, tak že by pak zbývalo pouze nad úsečkou BD (je-li D průsečík přímky p s řídící přímkou d) opsati polokružnici a tuto protnouti poloměrem $r = FA$ z bodu B v bodech E a E_1. Spojnice DE resp. DE_1 udávají nám pak směr spojnic FQ resp. FQ_1, čímž stanoveny jsou dvě tečny, jejichž dotyčné body stanovíme pak podle vztahu (2).

Při tom jest patrno, že při parabole, kde $r = s$, splyne jeden tento směr DE_1 s řídící přímkou, tak že bod Q_1 bude v nekonečnu; jest proto možno k parabole vésti pouze jedinou tečnu rovnoběžnou s danou přímkou p. Kdežto při ellipse úloha jest vždy možná a dvojznačná, není tomu tak při hyperbole, kde úloha stane se nemožnou pro $r > BD$ a jednoznačnou pro $r = BD$.

Poněvadž pak

$$BD = \frac{s}{\sin \omega},$$

kde ω značí odchylku směru p od řídící přímky d, bude pro tento krajní případ

$$\sin \omega = \frac{s}{r}. \tag{5}$$

V tomto případě splynou body D, E v jeden a jejich spojnice v tečnu kolmou k přímce p, z čehož podle vztahu (2) plyne, že dotyčný bod na této mezní tečně kuželosečky jest v nekonečnu, čili, že *asymptota jest tečna hyperboly, svírající s řídící přímkou úhel ω, jehož sinus jest dán poměrem* $\frac{s}{r}$, čímž jest dán úhel ω i $180 - \omega$.

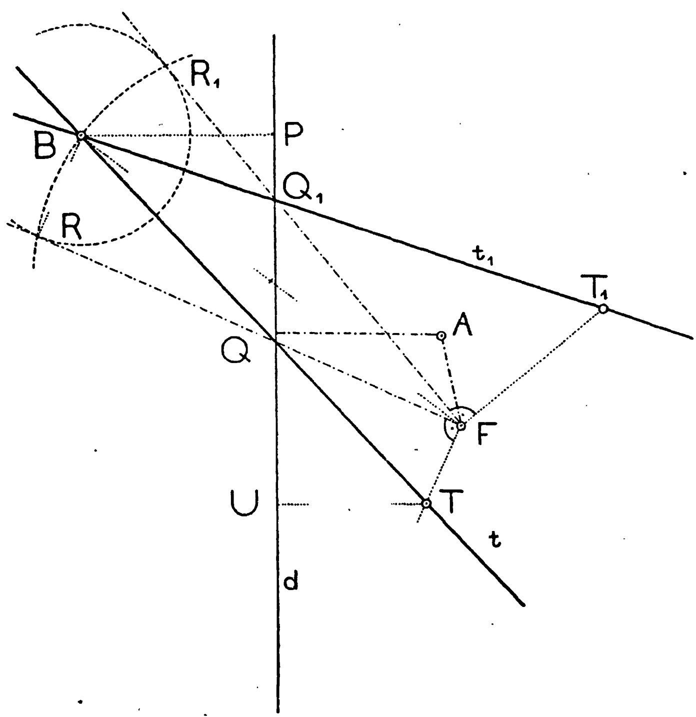
Z toho dále přímo vyplývá, že řídící přímka hyperboly jde patou kolmice z ohniska na asymptotu spuštěné, podobně jako z rovnice (5) a obvyklé konstrukce asymptoty hyperboly jde

$$\sin \omega = \frac{s}{r} = \frac{a}{e}.$$

Máme-li *z daného bodu B vésti tečny ke kuželosečce dané ohniskem F, přímkou řídící d a bodem A* (nebo poměrem $r : s$), mysleme si úlohu již řešenu (obr. 3.) a zachovávajíce označení stejné jako výše, spusťme s bodu B kolmice na řídící přímku d i hledanou spojnici FQ, jejichž paty označme P resp. R; i bude $QFTU \sim QRBP$, tak že spojnice FQR jest tečnou vedenou z ohniska F ke kružnici opsané kolem bodu B poloměrem

$$BR^{*)} = \frac{BP \cdot r}{s},$$

jak vychází ze vztahu (2). Jest samozřejmo, že úloha jest vždy možná, je-li bod vně křivky, a jednoznačná, přecházející ve vztah



Obr. 3.

(2), je-li bod B na křivce, a nemožná, je-li uvnitř, neboť pak i ohnisko F jest uvnitř kružnice (B, BR).

Tyto jednotné konstrukce nejsou sice v některých případech jednodušší oněch obyčejně užívaných, a na ohniskových vlastnostech kuželoseček spočívajících, přece však nehledě k výhodné

*) Nejlépe redukčním úhlem pro poměr $r : s$, který jest téměř nepostrádatelný při rýsování kuželosečky dané jako v této úloze.

jednotnosti, mohou býti velmi výhodny v případech, kdy kuželosečka jest dána formou, jak o ní hovořeno, nebo když její střed či druhé ohnisko ubíhá z nákresny, což se velmi často stává při řezu hyperbolickém.

Příspěvek k analytické geometrii kuželoseček.

Dr. Karel Čupr.

Úloha nalézti osy kuželosečky dané rovnicí

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

(a_{11}, a_{12}, ... a_{33} jsou čísla reálná) řešívá se pravidelně transformací souřadnic. V článku tomto bude podáno řešení jiné, transformačních vzorců vůbec neužívající. Též některé jiné detaily budou odvozeny způsobem jiným. Vyšetřování provedeme pro soustavu os kosoúhlou, za tím účelem odvodíme si dva vzorce.

1. Je-li dána soustava os svírajících úhel ω, jest vzdálenost dvou bodů M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2) dána dle Carnotovy věty výrazem

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \cos \omega.$$

Rovnice kruhu o středu (p, q) a poloměru r jest pak

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 + 2(x - p)(y - q) \cos \omega = r^2.$$

Spojme body M_1, M_2 se středem soustavy O; jest stanoviti úhel M_1OM_2. Způsobem týmž jako v soustavě pravoúhlé odvodíme, že plocha trojúhelníka OM_1M_2 jest dána výrazem

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \sin \omega = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - y_1x_2) \sin \omega;$$

jest však též

$$\Delta = \tfrac{1}{2} r_1 r_2 \sin \varphi,$$

kdež φ jest hledaný úhel

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 \cos \omega, \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2 \cos \omega.$$

Jest tedy

$$\sin \varphi = \frac{(x_1y_2 - y_1x_2) \sin \omega}{r_1 r_2}, \tag{1}$$