Bohuslav Hostinský
O základní úloze integrálního počtu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 2-3, 268--275

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124089

nost věty Dandelinovy i na jednoplochý hyperboloid rotační. Druh průseku řídí se opět výrazem $\frac{e}{b} \sin \beta$.

5. Dle čl. 3. možno prostorovou interpretací řešiti snadno úlohu: *Sestrojiti kružnici, která majíc střed na ohniskové ose dané kuželosečky dotýká se jí dvojnásobně, je-li mimo to dána tečna (kuželosečku protínající) kružnice.* Stačí danou kuželosečku pokládati za meridián rotační plochy a danou tečnu za průmět její průsečné roviny k meridiánu kolmé. Sestrojíme-li ohnisko průseku pomocí jeho os, obdržíme tak dotyčný bod kružnice na tečně, čímž úloha řešena.

V deskriptivní geometrii vyskytuje se tato úloha při sestrojování vrženého stínu přímky na kulovou plochu. Určíme-li kružnice, dotýkající se dvojnásobně meze vrženého stínu kulové plochy, mající středy na její ohniskové ose a dotýkající se vrženého stínu přímky, jsou to vržené stíny oněch rovnoběžek kulové plochy (vzhledem k rovině vrženého stínu), kterých dotýká se vržený stín přímky na kulovou plochu; dotyčné body mají vržené stíny v dotyčných bodech vržených stínů rovnoběžek na vrženém stínu přímky.

O základní úloze integrálního počtu.

Napsal **Bohuslav Hostinský.**

I.

Hlavní věty infinitesimálního počtu odůvodňují se obyčejně na základě grafického znázornění funkcí známého z analytické geometrie. Daná funkce $f(x)$ jest znázorněna křivkou, jež má rovnici

$$y = f(x).$$

V bodě $M(x, y)$ křivky sestrojme tečnu, která svírá s osou Ox t. zv. *tečnový úhel* α (obr. 1.). Směrnice tečny $= tg\,\alpha$ jest funkcí proměnné x, což vyjádříme rovnicí

$$tg\,\alpha = \varphi(x).$$

Obsah P obrazce $ONMQ$ omezeného obloukem MQ křivky a třemi úsečkami jest rovněž jistou funkcí proměnné x:

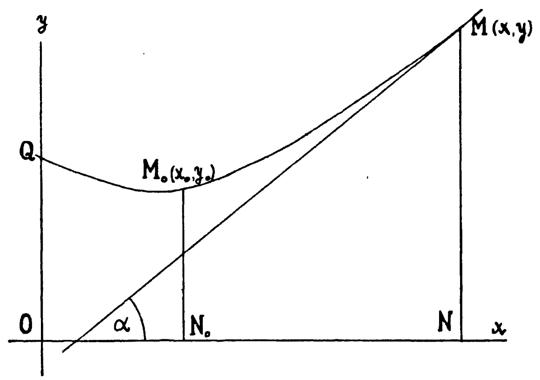
$$P = F(x).$$

Sledujme blíže obsah tří následujících vět:

1. Směrnice tečny $tg\,\alpha$ jest derivací pořadnice y, t. j.

$$\varphi(x) = f'(x).$$

2. Obsah obrazce omezeného obloukem M_0M křivky, pořadnicemi krajních bodů $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ a úsečkou N_0N



Obr. 1.

(obr. 1.) jest roven omezenému integrálu pořadnice od x_0 do x:

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx.$$

(x_0 považujeme v následujícím za konstantní.)

3. Pořadnice y jest derivací plochy P:

$$f(x) = F'(x).*)$$

Tak na př. pro parabolu jest

$$f(x) = x^2, \quad \varphi(x) = 2x, \quad F(x) = \frac{x^3}{3}.$$

---

*) Viz Začátky infinitesimálního počtu ve Vojtěchově Geometrii pro VII. tř. reálek str. 140 aneb ve vydání pro gymnasia a reálná gymnasia: Geom. pro VII. tř. str. 119, Math. pro nejvyšší tř. str. 53.

Spojíme-li druhou a třetí větu, vychází: Integrací dané funkce $f(x)$ obdržíme novou funkci $F(x) - F(x_0)$*), jež má $f(x)$ za derivaci. Tato věta platí pro každou funkci proměnné x; užijeme-li ji na funkci $\varphi(x) = tg\,\alpha$, dospějeme k čtvrté větě:

4. *Pořadnice y bodu M křivky zmenšená o pořadnici y_0 bodu M_0 rovná se omezenému integrálu směrnice od x_0 do x:*

$$y - y_0 = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx.$$

Tato věta doplňuje větu 1. právě tak jako věta 3. větu 2.

II.

Přistupme k přímému důkazu věty 4., ve kterém nebudeme užívati znázornění integrálu plošným obsahem. Jde o řešení úlohy:

Směrnice tečny $tg\,\alpha = \varphi(x)$ jest dána jako funkce úsečky x; jest sestrojiti oblouk M_0M křivky, t. j. nalézti $y = f(x)$ jako funkci proměnné x, je-li dán jeden bod M_0 (x_0, y_0) křivky.

Průmět hledaného oblouku do osy Ox budiž N_0N (v obr. 2. jest hledaný oblouk tečkován). Úsečku $N_0N = x - x_0$ osy Ox rozdělme na n stejných dílů o délce Δx (v obrazci 2. jest $n = 6$). Nazveme-li dělící body $N_1, N_2, \ldots (N_n \equiv N)$, jest

$$\Delta x = N_0N_1 = N_1N_2 = \ldots = N_{n-1}N = \frac{x - x_0}{n}. \qquad (1)$$

Každým z bodů $N_0, N_1, N_2 \ldots$ veďme krátkou úsečku $a_0, a_1, a_2, \ldots$, jež svírá s osou Ox daný tečnový úhel $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, takže jest

$$tg\,\alpha_0 = \varphi(x_0),\ tg\,\alpha_1 = \varphi(x_0 + \Delta x),\ tx\,\alpha_2 = \varphi(x_0 + 2\Delta x), \ldots$$

Sestrojíme nyní dvě lomené čáry l_a, l_b, jež přibližně představují hledanou křivku:

a) Bodem M_0 veďme rovnoběžku k a_0, která protne kolmici vztyčenou v N_1 ku Ox; průsečíkem rovnoběžku k a_1, která protne kolmici vztyčenou v N_2; novým průsečíkem rovnoběžku

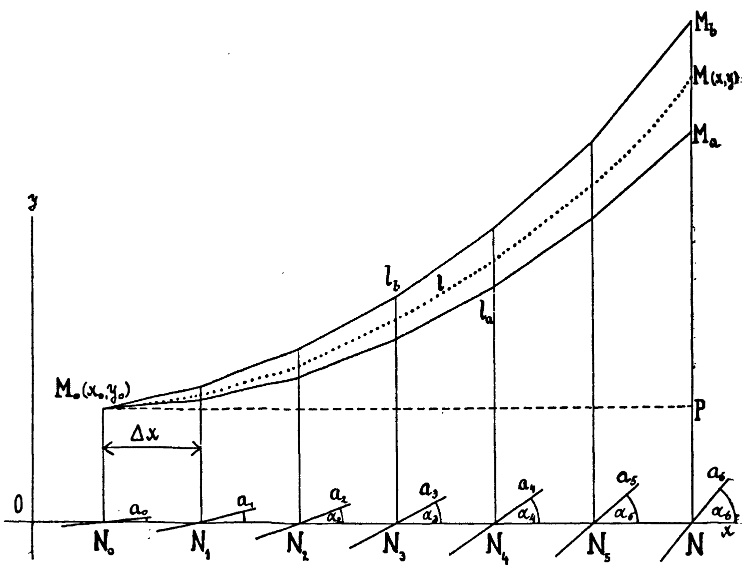
*) x_0 jest libovolná konstanta; totéž platí o $F(x_0)$.

k a_2, která protne kolmici vztyčenou v N_3 atd. Takto sestrojená lomená čára l_a protíná poslední kolmici, vztyčenou v N, v bodě M_a; průmět celé čáry l_a do této kolmice má délku

$$PM_a = \Delta x(tg\, \alpha_0 + tg\, \alpha_1 + tg\, \alpha_2 + \ldots + tg\, \alpha_{n-1}),$$

aneb

$$PM_a = \Delta x\,[\varphi(x_0) + \varphi(x_0 + \Delta x) + \varphi(x_0 + 2\Delta x) + \ldots + \varphi(x_0 + \overline{n-1}\,\Delta x)]. \quad (2)$$



Obr. 2.

b) Bodem M_0 veďme rovnoběžku k a_1, která protne kolmici vztyčenou v N_1; průsečíkem rovnoběžku k a_2, která protne kolmici vztyčenou v N_2 atd. Tato lomená čára l_b protíná poslední kolmici, vztyčenou v N, v bodě M_b; průmět celé čáry l_b do této kolmice má délku

$$PM_b = \Delta x(tg\, \alpha_1 + tg\, \alpha_2 + \ldots + tg\, \alpha_n),$$

aneb

$$PM_0 = \Delta x\,[\varphi(x_0 + \Delta x) + \varphi(x_0 + 2\Delta x) + \ldots + \varphi(x)]. \quad (3)$$

Oblouk AB libovolné křivky, jejíž směrnice s rostoucím x se zvětšuje, jest vždy celý nad tečnou sestrojenou v počátečním bodě A a celý pod přímkou vedenou bodem A rovnoběžně k tečně koncového bodu B. Z toho následuje,*) že hledaný oblouk křivky jest celý nad čarou l_a a celý pod čarou l_b; jest tedy (viz obr. 2.)

$$PM_a < PM < PM_b. \tag{4}$$

Dle (2) a (3) jest

$$PM_b - PM_a = \Delta x\,[\varphi(x) - \varphi(x_0)].$$

Tento výraz blíží se nulle, platí-li totéž o Δx, t. j. roste-li n do nekonečna; viz rovnice (1). Pro dosti velké n může býti hledaná křivka nahražena buď čarou l_a aneb čarou l_b s libovolnou přesností. V limitě ($n = \infty$) splývají — dle nerovností (4) — M_b i M_a s M. Proto splývají čáry l_a, l_b s hledanou křivkou a rozdíl pořadnic hledané křivky v krajních bodech M_0 a M jest

$$PM = y - y_0 = \lim_{\Delta x = 0} \Delta x\,[\varphi(x_0) + \varphi(x_0 + \Delta x) + \ldots$$
$$+ \varphi(x_0 + \overline{n-1}\,\Delta x)]. \tag{5}$$

Výraz na pravo jest omezený integrál funkce $\varphi(x)$ od x_0 do x; tím jest věta 4. dokázána. —

Poznámka. Dosaďme do (5) za Δx hodnotu $\frac{x - x_0}{n}$; obdržíme

$$PM = y - y_0 =$$
$$(x - x_0)\,.\,\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(x_0) + \varphi(x_0 + \Delta x) + \ldots + \varphi(x_0 + \overline{n-1}\,\Delta x)}{n}.$$

Tento vzorec, který se liší od vzorce (5) jen úpravou, vyjadřuje větu, že omezený integrál dané funkce od x_0 do x rovná se arithmetickému středu hodnot funkce v n dělících bodech**) intervallu $x_0 \ldots x$ (pro $\lim n = \infty$) násobené délkou toho intervallu.

*) Obr. 2. odpovídá právě případu, že směrnice s rostoucím x se zvětšuje; kdyby se zmenšovala, vyměnila by se úloha čar l_a a l_b.

**) Říkáme zkrátka „hodnota funkce $f(x)$ v bodě a" místo obšírnějšího rčení: hodnota, které funkce $f(x)$ nabývá, jestliže $x = a$.

III.

Příklad: Jest sestrojiti oblouk křivky od $x_0 = 0$ do $x = 1{\cdot}5$, je-li dána její směrnice rovnicí

$$\varphi(x) = 3x^2$$

a jeden její bod

$$M_0\,(x_0 = 0,\ y_0 = 1).$$

N_0 jest tedy v počátku souřadnic a N má souřadnice *1·5, 0.* Tečnové úhly příslušné jednotlivým dělícím bodům N_1, $N_2 \ldots$ sestrojíme nejpohodlněji v pomocných pravoúhlých trojúhelnících SAB_1, $SAB_2 \ldots$ o společné základně $SA = 1$ *), která leží v prodloužení osy Ox (v obr. 3. na pravo). Odvěsny těchto trojúhelníků, ležící proti tečnovým úhlům, jsou, volíme-li $n = 15$,

$$AB_1 = tg\,\alpha_1 = 3\,.\,0{\cdot}1^2,\ AB_2 = 3\,.\,0{\cdot}2^2, \ldots AB_k = 3\,.\left(\frac{k}{10}\right)^2, \ldots$$

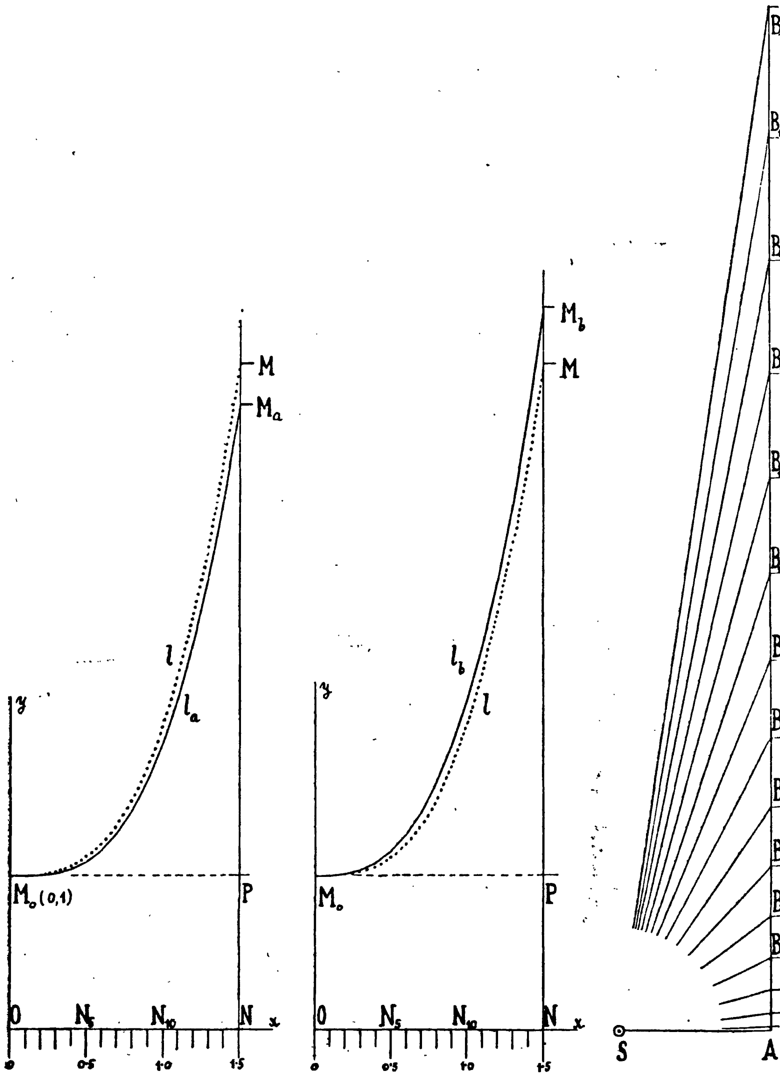
Sestavme tabulku hodnot AB_k:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$3\left(\frac{k}{10}\right)^2$	0	0·03	0·12	0·27	0·48	0·75	1·08	1·47
k	8	9	10	11	12	13	14	15
$3\left(\frac{k}{10}\right)^2$	1·92	2·43	3·00	3·63	4·32	5·07	5·88	6·75

Lomenou čáru l_a sestrojíme takto: bodem M_0 vedeme rovnoběžku s Ox, která protne kolmici vztyčenou k Ox v bodě *(0·1, 0)*; průsečíkem rovnoběžku k SB_1, která protne kolmici vztyčenou v *(0·2, 0)*; novým průsečíkem rovnoběžku k SB_2 atd.

Podobně sestrojíme dle návodu odst. II. lomenou čáru l_b. V levé a v prostřední části obr. 3. jsou sestrojeny čáry l_a a l_b.

*) Kdyby šlo o konstrukci co nejpřesnější, narýsovali bychom pomocné trojúhelníky ve větším měřítku.



Obr. 3.

Hledaná křivka sama, která jest vždy naznačena tečkovaně, jest kubická parabola; dle věty 4. má rovnici

$$y = 1 + x^3,$$

poněvadž

$$\int_0^x 3x^2dx = x^3, \quad \text{aneb} \quad \frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2.$$

Poslední pořadnici $NM_a = 1 + PM_a$ čáry l_a vypočteme dle vzorce (2):

$$NM_a = 1 + 0{\cdot}1\,(0 + 0{\cdot}03 + 0{\cdot}12 + \ldots + 5{\cdot}88) \doteq 4{\cdot}115$$

a podobně poslední pořadnici $NM_b = 1 + PM_b$ čáry l_b dle vzorce (3):

$$NM_b = 1 + 0{\cdot}1\,(0{\cdot}03 + 0{\cdot}12 + 0{\cdot}27 + \ldots + 6{\cdot}75) = 4{\cdot}790.$$

Poslední pořadnice hledané křivky (6) jest

$$NM = 1 + 1{\cdot}5^3 = 4{\cdot}375.$$

Obr. 3. byl při reprodukci zmenšen v poměru 2 : 1, tak že jednotka délková rovnala se původně 4 *cm*. Pořadnice vztyčené v jednotlivých bodech N_1, N_2 ... nebyly vytaženy. Ačkoliv každá z čar l_a, l_b jest složena z patnácti úseček, činí dojem téměř „hladké“ křivky. Kdybychom volili n větší, na př. $n = 30$ místo $n = 15$, platilo by to tím spíše.

Příspěvek k theorii kuželoseček.

Napsal Jos. Kálal.

V učebnicích deskriptivní geometrie pro střední školy uvádí se v odstavci, jednajícím o rovinných řezech na kuželi, bez důkazu tato poučka: *„Průmětem řezu na rovinu kolmou k ose rotačního kužele jest kuželosečka téhož druhu, jejíž jedno ohnisko jest v průmětu vrcholu daného kužele.“*

Příčinou toho jest složitost důkazů, které jsou mi známy*); pouze pro parabolický řez podal prof. E. Vogel**) jednoduchý

---

*) R. Niemtschik: Allgemeine Methoden zur Darstellung der Durchschnitte von Ebenen mit Kegel- und Cylinderflächen u. s. w. Zasedací zprávy Vídeňské Akademie sv. LXIII.

E. Müller: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. Díl I. (V. Jeřábek v „Příloze k časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky“ ročník XLI č. 2.)

**) Die darstellend-geometrische Behandlung der Kegelschnitte. II. část. Výroční zpráva německé reálky v Hodoníně za šk. r. 1911/1912.